



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ



ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Εισαγωγή στην Κυματική - Ακουστική



"The Great Wave Off Kanagawa," by Katsushika Hokusai (1760-1849).

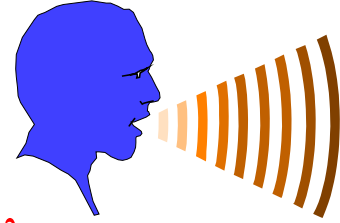
Μάϊος 2015

Τα κύματα είναι παντού!





KYMATΑ



Τα κύματα στην ακροθαλασσιά, ένα τραγούδι, το φως του ήλιου, η αγαπημένη μας εκπομπή στο ραδιόφωνο, οι ειδήσεις στην τηλεόραση, ένας σεισμός, ο παλμός της καρδιάς μας, ο ήχος της τρομπέτας, το γλυκό κελιάδισμα του βιολιού, ο εντοπισμός ενός ναυαγίου, η καταστροφή της Χιροσίμα, μα και πολλά - πολλά άλλα που μας συμβαίνουν έχουν κάτι κοινό:

είναι αποτέλεσμα μιας φυσικής διαδικασίας που περιγράφεται υπό το γενικό όνομα **κύμα**.

Κύμα είναι μια διαταραχή στην κατάσταση ισορροπίας, η οποία ταξιδεύει ή διαδίδεται, από μια περιοχή του χώρου σε μια άλλη.





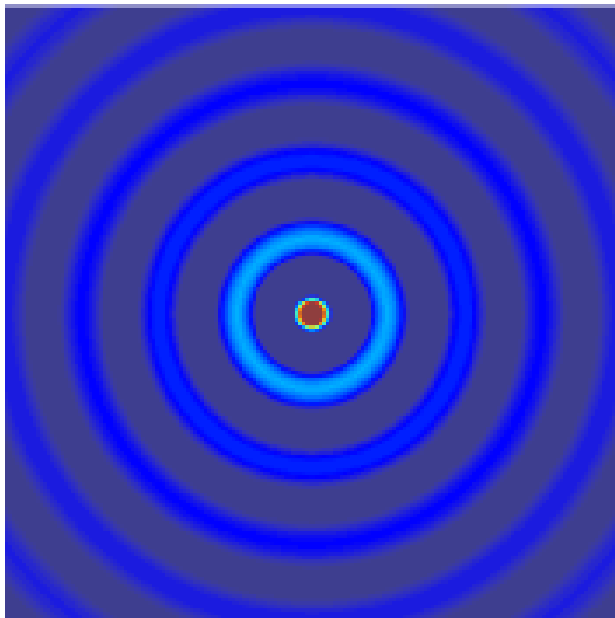
Η διάδοση του ηχητικού κύματος περιγράφεται αναλυτικά από τις κυματικές εξισώσεις

– Περιγραφή σε μια, δύο ή τρεις διαστάσεις

• Η κυματική εξίσωση του ήχου:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

– όπου c ή v η ταχύτητα διάδοσης του κύματος στο μέσο μετάδοσης



Κυματική εξίσωση

**Σε 1
διάσταση**

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

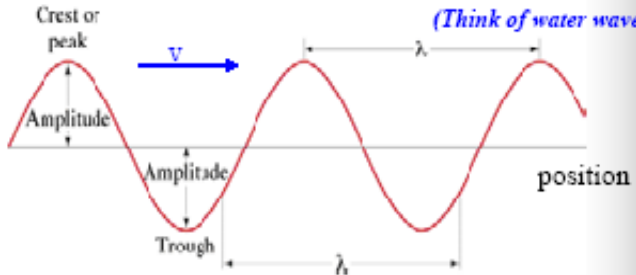
**Σε 2
διαστάσεις**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$



Waves

- Waves are "moving oscillations".
- They carry **energy**; they do **NOT** carry matter
(Think of water waves)



- Wavelength, λ** : length of one full cycle at **fixed time**
- Period, T** : time for one full cycle at **fixed position**
- Waves travel at **speed v** $\lambda = vT$ $\frac{\lambda}{T} = v$





■ Λύση της κυματικής εξίσωσης

Η **κυματική εξίσωση** δίνεται με τη μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους, όπου **c** είναι η ταχύτητα του κύματος (**φασική ταχύτητα**) στο μέσο που διαδίδεται το κύμα .

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} ,$$

$$\text{όπου } \mathbf{c} = (\mathbf{T}/\rho)^{1/2}$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι συναρτήσεις της μορφής $y = f_1(ct - x)$ αποτελούν λύση της κυματικής εξίσωσης. Επίσης συναρτήσεις της μορφής $y = f_2(ct + x)$, καθώς και ότι ο συνδυασμός τους αποτελεί την πλήρη λύση:

$$y = f_1(ct - x) + f_2(ct + x)$$

Αν η κίνηση του στοιχειώδους τμήματος της χορδής στη θέση x κατά τη χρονική στιγμή t είναι αρμονική, η μετατόπιση θα είναι μια ημιτονική ή συνημιτονική συνάρτηση και θα μπορεί να εκφρασθεί με τις ισοδύναμες σχέσεις:

Ορίζοντας τον
κυματικό αριθμό, k :

$$k = 2\pi/\lambda = \omega/c$$

$$y = a \sin(\omega t - \phi) = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (ct - x)$$

$$y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (ct - x)$$

$$y = a \sin 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$y = a \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

$$y = a \sin(\omega t - kx)$$

$$y(x, t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right]$$

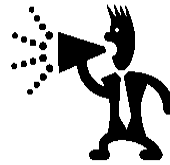
$$y(x, t) = A \cos \left[\omega \left(\frac{x}{v} - t \right) \right]$$

$$= A \cos \left[2\pi f \left(\frac{x}{v} - t \right) \right]$$

$$= A \cos \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right]$$



■ Ταχύτητες στην κυματική κίνηση



Οι στοιχειώδεις ταλαντωτές του μέσου **δεν** οδεύουν μέσα στο μέσον μαζί με τα κύματα. Η κίνησή τους είναι απλή αρμονική και περιορίζεται σε ταλαντώσεις εγκάρσιες ή διαμήκεις, γύρω από τη θέση ισορροπίας τους. Η μορφή της κυματικής διαταραχής είναι αυτή που ταξιδεύει. **Τα κύματα μεταφέρουν ενέργεια, αλλά όχι ύλη, από μια περιοχή σε άλλη.**

Έστω η μετατόπιση

$$y = a \sin (\omega t - kx)$$

Υπάρχουν τρεις χαρακτηριστικές ταχύτητες στη κυματική κίνηση:

1. Η σωματιδιακή ταχύτητα: είναι η απλή αρμονική ταχύτητα του ταλαντωτή γύρω από τη θέση ισορροπίας του.

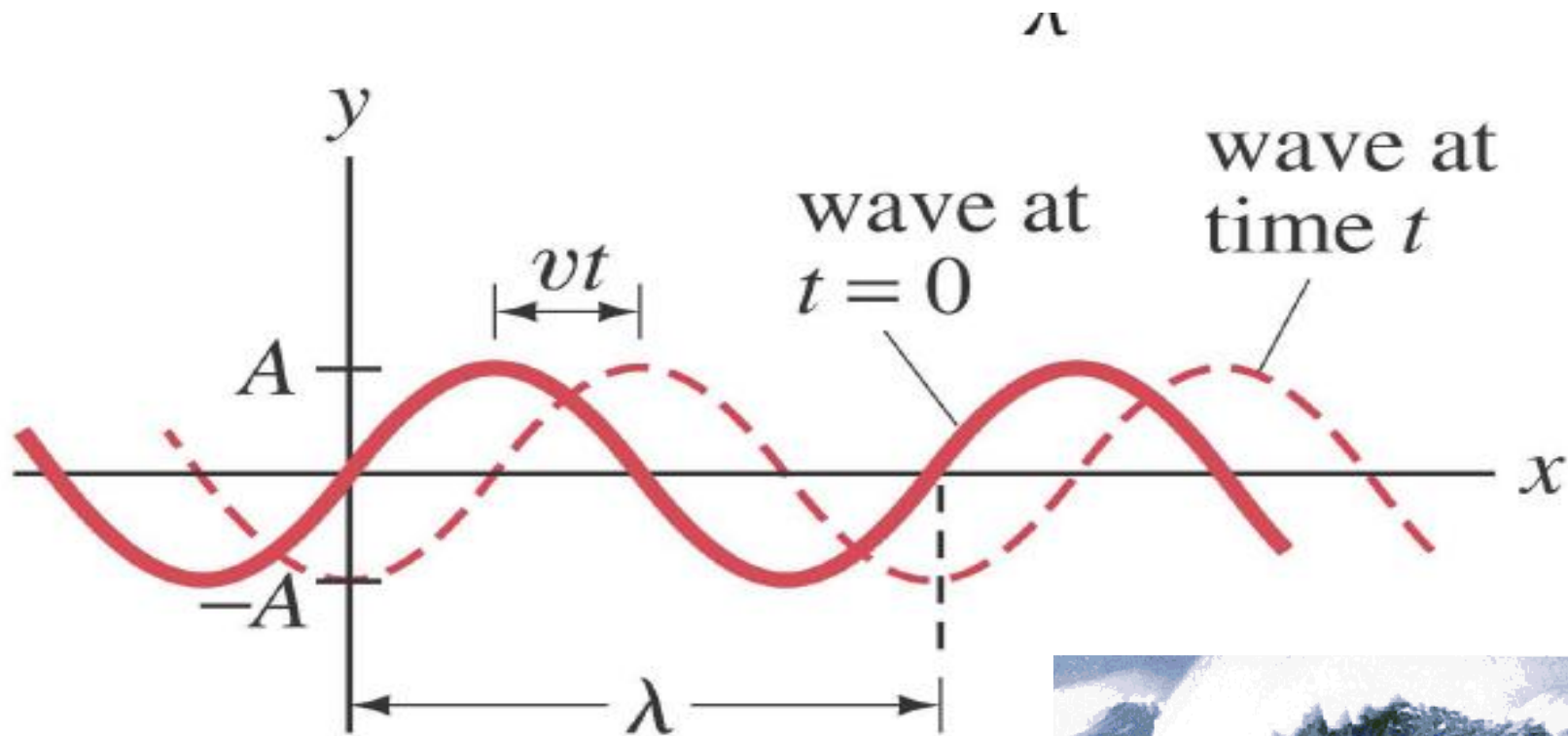
$$\frac{\partial y}{\partial t} = \omega a \cos (\omega t - kx)$$

2. Η κυματική ή φασική ταχύτητα: είναι η ταχύτητα με την οποία επίπεδα με την ίδια φάση, κορυφές ή κοιλάδες, διαδίδονται στο μέσον.

$$c = \frac{\partial x}{\partial t}$$

3. Η ομαδική ταχύτητα: είναι η ταχύτητα ενός κυματοπακέτου, το οποίο προκύπτει από την υπέρθεση κυμάτων με διαφορετική συχνότητα, μήκος κύματος και ταχύτητα (θα την ορίσουμε παρακάτω).

**ΤΑ ΚΥΜΑΤΑ ΜΕΤΑΦΕΡΟΥΝ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΚΑΙ
ΟΧΙ ΥΛΗ ΑΠΟ ΜΙΑ ΠΕΡΙΟΧΗ ΣΕ ΑΛΛΗ**



Τα κύματα διακρίνονται σε:

***Οδεύοντα κύματα:** είναι κύματα που προχωρούν σ'ένα μέσον χωρίς σύνορα, χωρίς να ανακλώνται πουθενά.

***Στάσιμα κύματα:** είναι κύματα που προχωρούν σ'ένα μέσον, φθάνουν σ' ένα ακλόνητο άκρο όπου ανακλώνται, με την ανακλώμενη να βρίσκεται σε αντίθετη φάση σε σχέση με την προσπίπτουσα. Η συνισταμένη διαταραχή είναι το στάσιμο κύμα.

***Διαμήκη κύματα:** είναι εκείνα τα κύματα, στα οποία οι μετατοπίσεις ή ταλαντώσεις στο μέσον είναι παράλληλες με τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.

***Εγκάρσια κύματα:** είναι εκείνα τα κύματα, στα οποία οι μετατοπίσεις ή ταλαντώσεις στο μέσον είναι κάθετες (εγκάρσιες) στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.

***Επίπεδα κύματα:** είναι εκείνα τα κύματα, στα οποία θεωρούμε την ταλάντωση των στοιχειωδών ταλαντωτών του μέσου, οι οποίοι τη στιγμή της παρατήρησης έχουν την ίδια φάση, σ'ένα επίπεδο κάθετο στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος (ισοφασικό επίπεδο).

***Σφαιρικά κύματα:** είναι τα κύματα στα οποία οι ισοφασικές επιφάνειες είναι σφαίρες και η πηγή των κυμάτων είναι ένα κεντρικό σημείο, π.χ. μια έκρηξη.

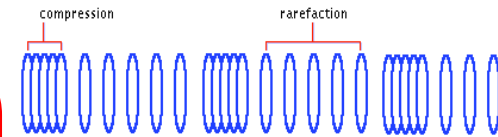


Figure 1: Longitudinal Wave

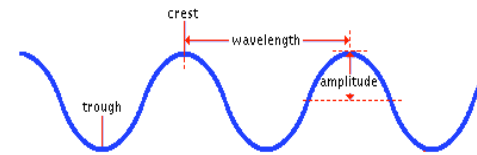
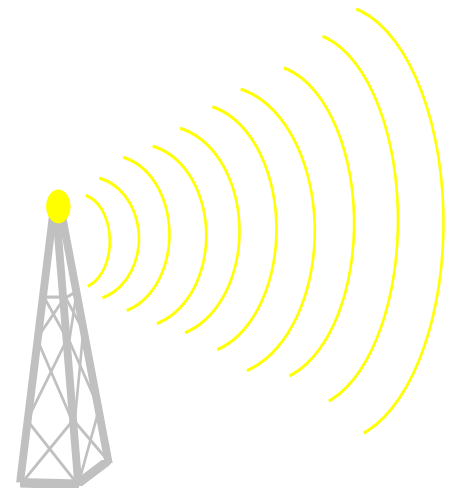


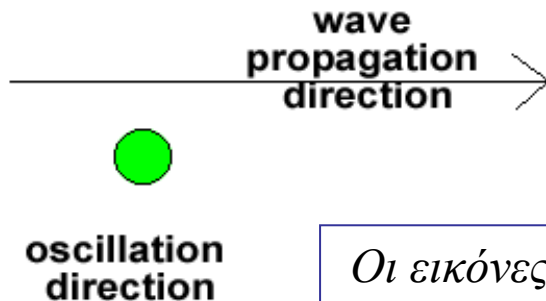
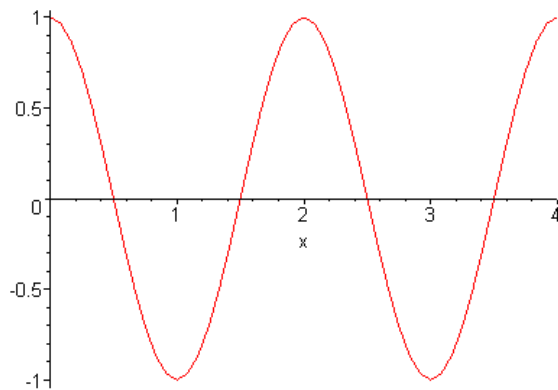
Figure 2: Transverse Wave
Microsoft Illustration



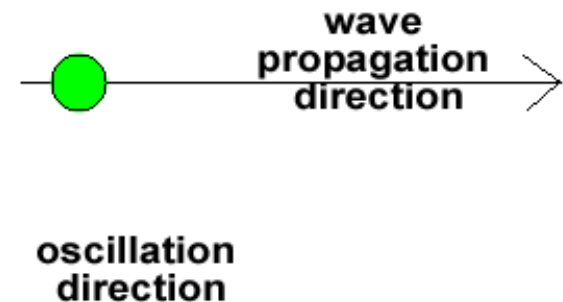
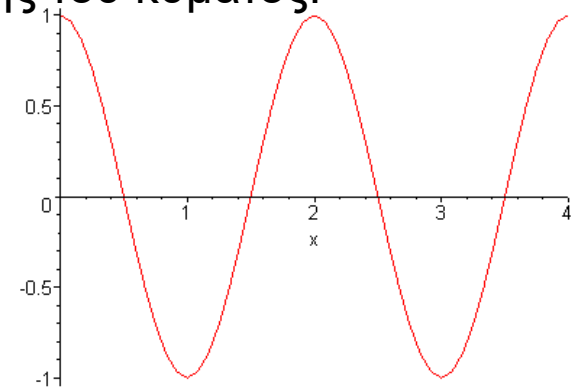


❖ Εγκάρσια και διαμήκη κύματα

***Εγκάρσια κύματα:** είναι εκείνα τα κύματα, στα οποία οι μετατοπίσεις ή ταλαντώσεις στο μέσον είναι κάθετες (εγκάρσιες) στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.



***Διαμήκη κύματα:** είναι εκείνα τα κύματα, στα οποία οι μετατοπίσεις ή ταλαντώσεις στο μέσον είναι παράλληλες με τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.



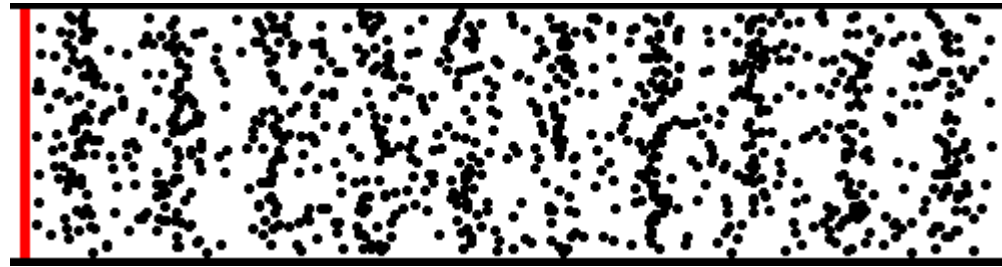
*Οι εικόνες αυτές φαίνονται
ωραία σε animation*



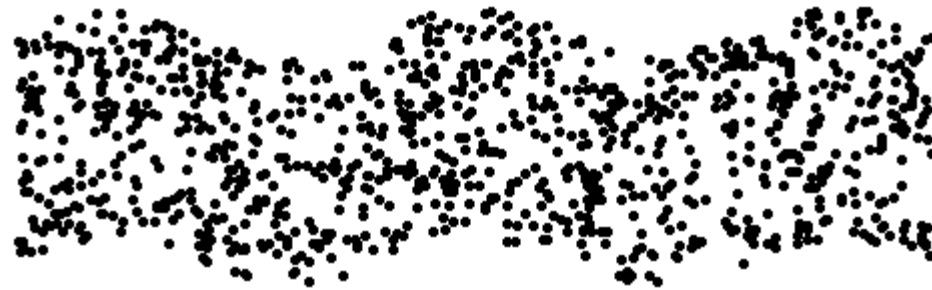
❖ Εγκάρσια, διαμήκη και σύνθετα κύματα



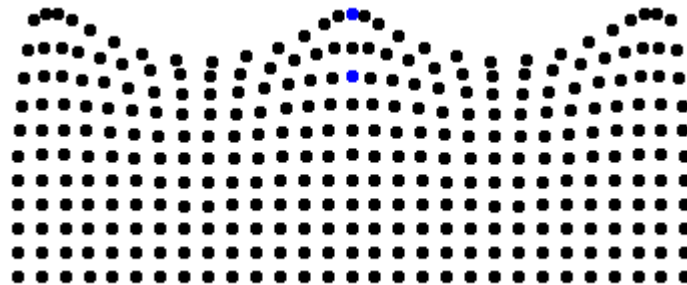
Longitudinal Waves



Transverse Waves



Water Waves



©1999, Daniel A. Russell

Οι εικόνες αυτές φαίνονται ωραία σε animation.
Επισκεφτείτε την ιστοσελίδα: **Physics for Civil Engineering**

<http://www.insula.com.au/physics/1279/L14.html>

ή την:

Acoustics Animations

Dr. Dan Russell

Kettering University Applied Physics,

<http://www.acs.psu.edu/drussell/>



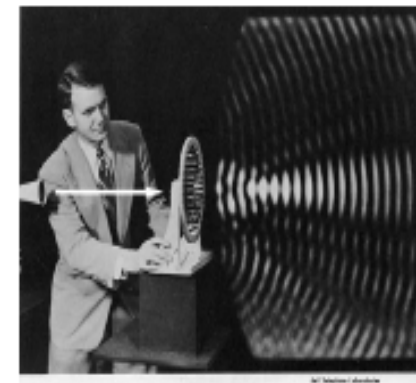
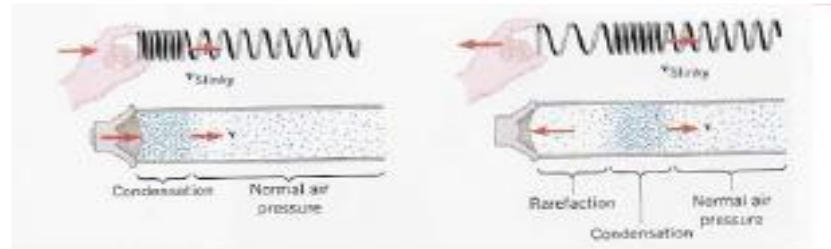
Μηχανικά κύματα



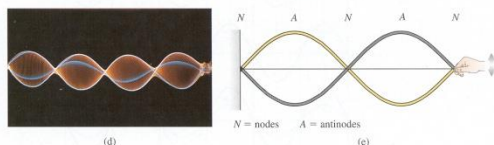
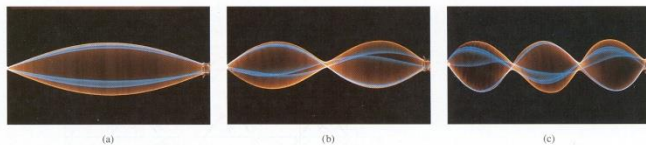
Μηχανικά κύματα ονομάζονται εκείνα τα κύματα που μεταφέρουν **μηχανική ενέργεια**.

Παραδείγματα μηχανικών κυμάτων είναι τα κύματα στο νερό, τα θαλάσσια κύματα, τα κύματα που διαδίδονται κατά μήκος ενός σκοινιού ή ελατηρίου, τα ηχητικά και τα σεισμικά κύματα.

Η ενέργεια των κυμάτων αυτών μεταφέρεται μέσω του νερού, του σκοινιού, του ελατηρίου, του αέρα, του εδάφους κ.α.



Το διάμηκες ηχητικό κύμα που διαδίδεται στον αέρα οπτικοποιείται με τη βοήθεια καπνού.



*Ένα παράδειγμα μηχανικών κυμάτων: Τα σεισμικά κύματα

Τα σεισμικά κύματα προέρχονται από διαταραχές της μηχανικής ισορροπίας στα γήινα πετρώματα, οπότε απελευθερώνεται μηχανική ενέργεια, η οποία με τη μορφή κυμάτων διαδίδεται μέσα στη Γη και εκδηλώνεται με τη μορφή δονήσεων του εδάφους. Τα σεισμικά κύματα διακρίνονται σε δύο κύριες κατηγορίες:

***Τα κύματα χώρου**, διαδιδόμενα προς κάθε διεύθυνση στο εσωτερικό της Γης (προς την επιφάνεια και προς το κέντρο αυτής),

***Τα επιφανειακά κύματα**, διαδιδόμενα μόνον προς κάποιες διευθύνσεις σε επιφανειακά στρώματα της Γης.

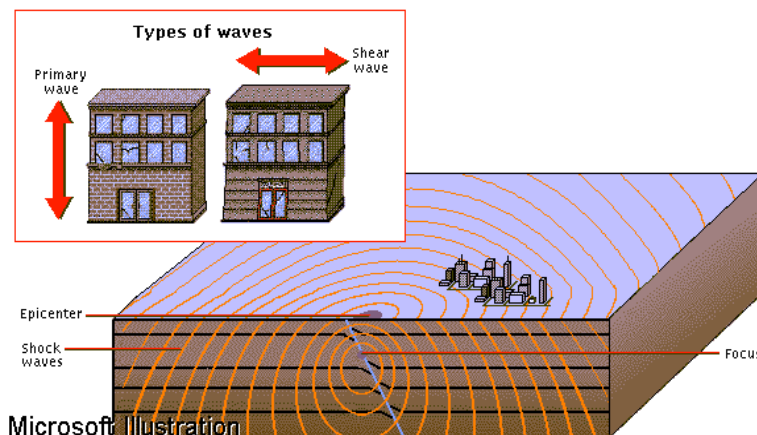
Τα κύματα χώρου διακρίνονται σε:

- α) διαμήκη σεισμικά κύματα (P κύματα),
- β) εγκάρσια σεισμικά κύματα (S κύματα).

Τα επιφανειακά κύματα διακρίνονται σε:

α) κύματα **Rayleigh**, που διαδίδονται σε ελλειπτικές περιοχές, των οποίων οι μεγάλοι άξονες είναι κάθετοι και οι μικροί άξονες είναι παράλληλοι προς τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος,

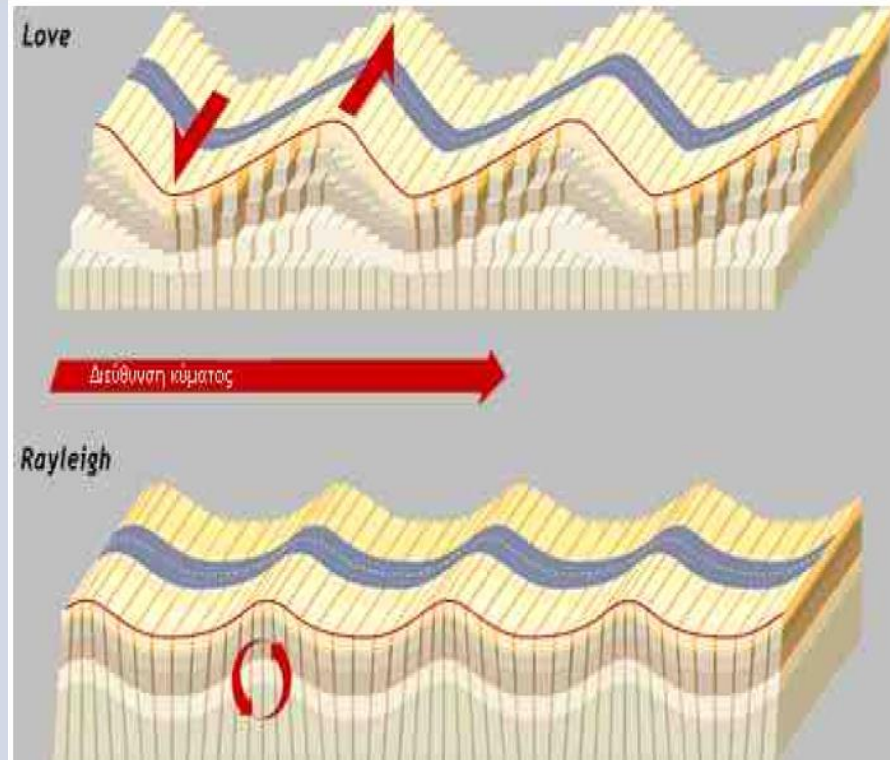
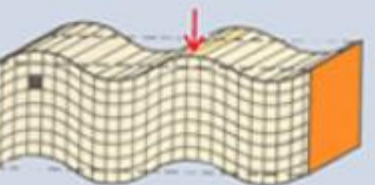
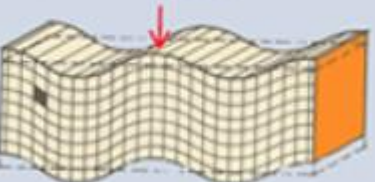
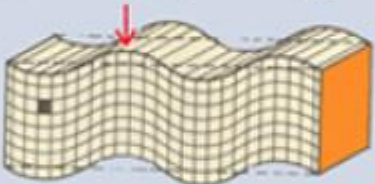
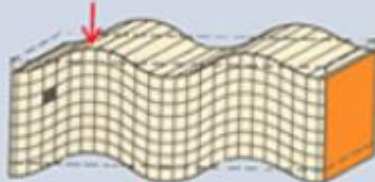
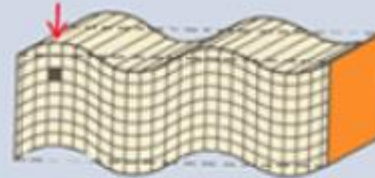
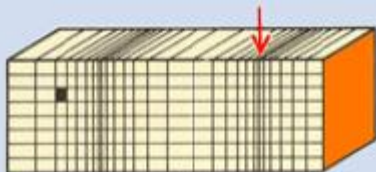
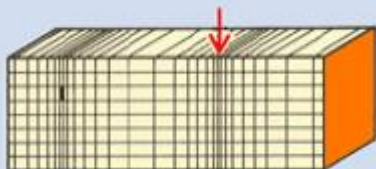
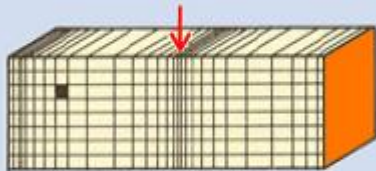
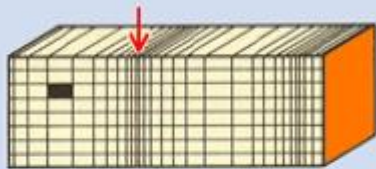
β) κύματα **Love**, που διαδίδονται σε οριζόντιες ταλαντώσεις κάθετες στη διεύθυνση διάδοσης των κυμάτων.



ΤΥΠΟΙ ΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

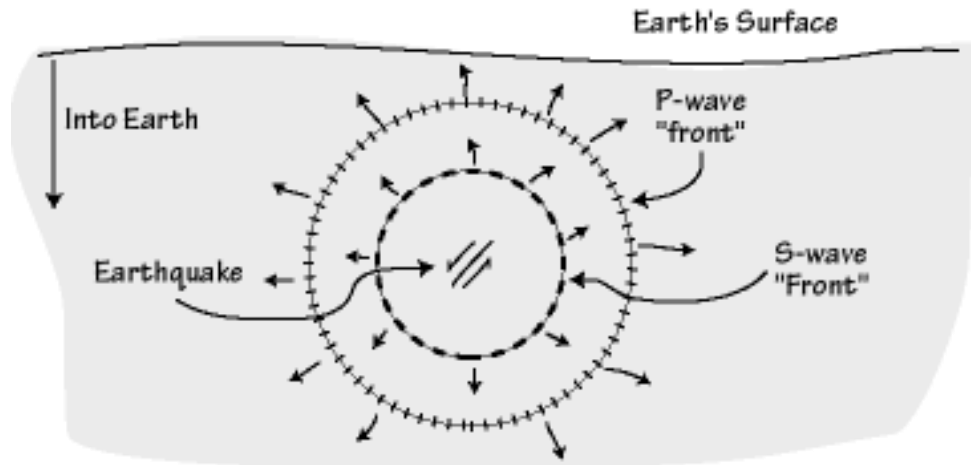
Διαμήκη

Εγκάρσια





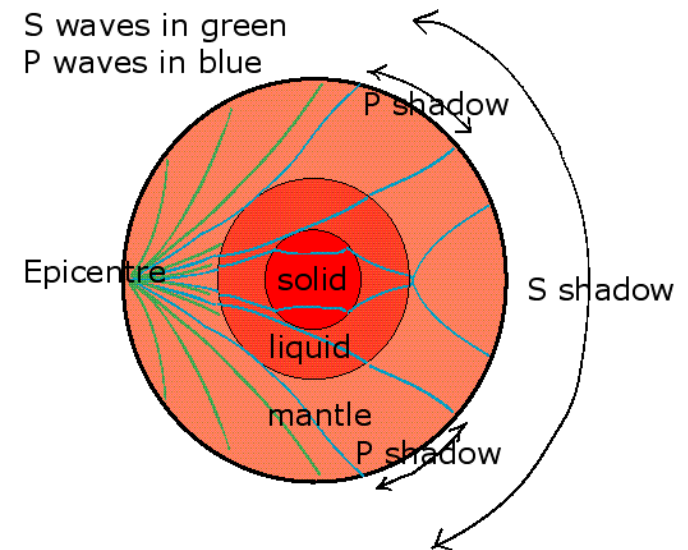
Ένα παράδειγμα μηχανικών κυμάτων: Τα σεισμικά κύματα



Τα κύματα χώρου διακρίνονται σε:

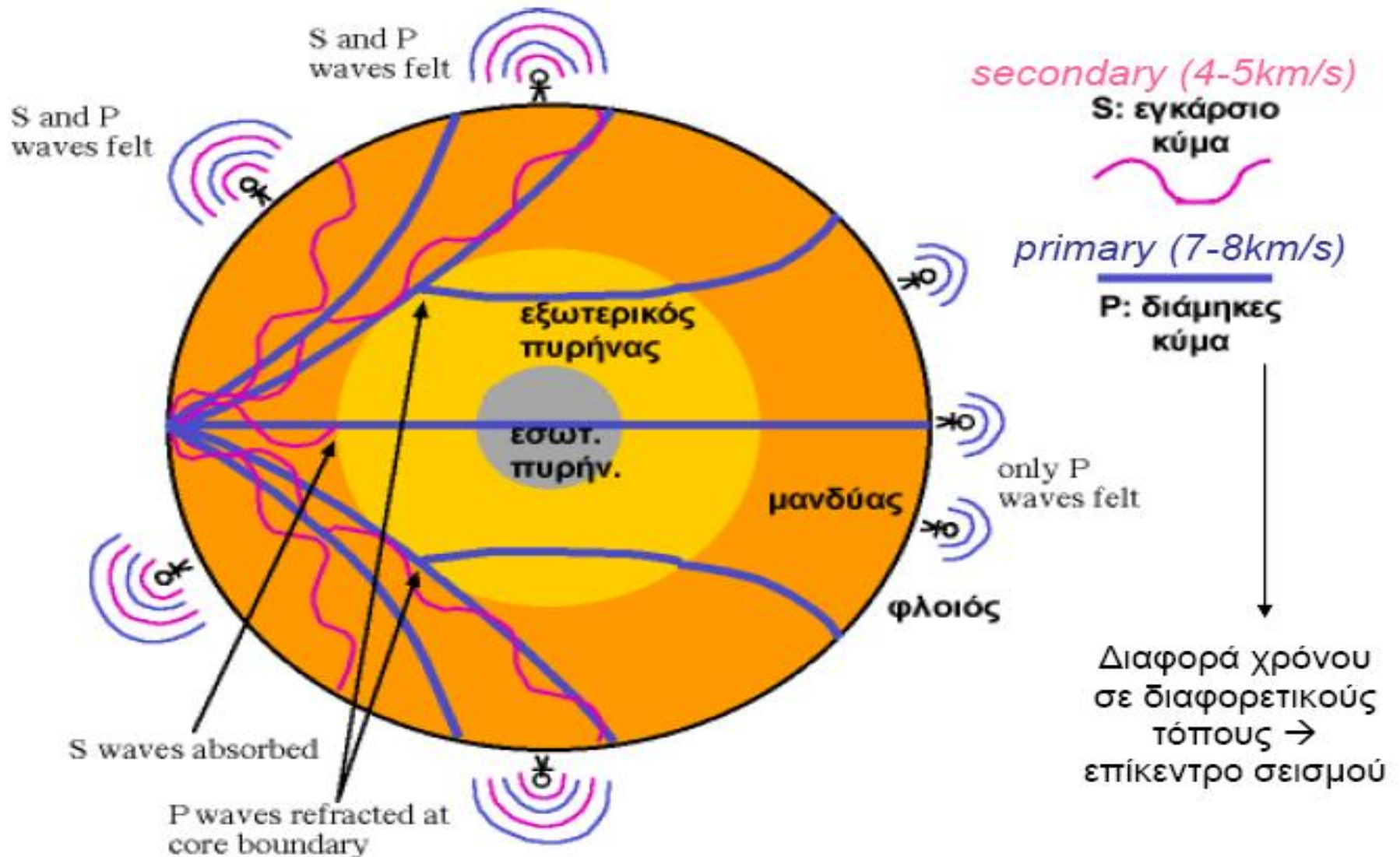
α) διαμήκη σεισμικά κύματα (P κύματα),

β) εγκάρσια σεισμικά κύματα (S κύματα).



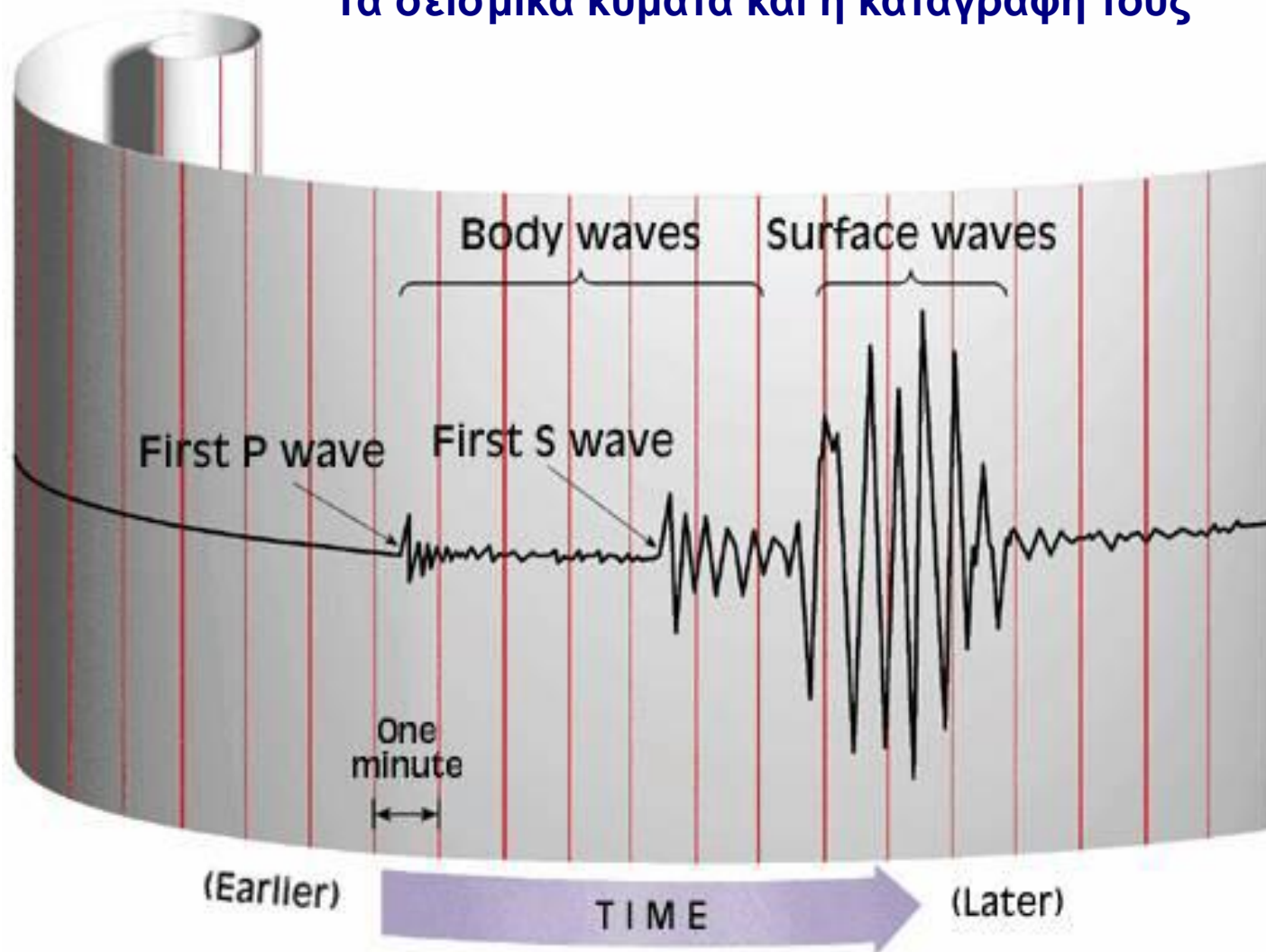


Ένα παράδειγμα μηχανικών κυμάτων: Τα σεισμικά κύματα





Τα σεισμικά κύματα και η καταγραφή τους



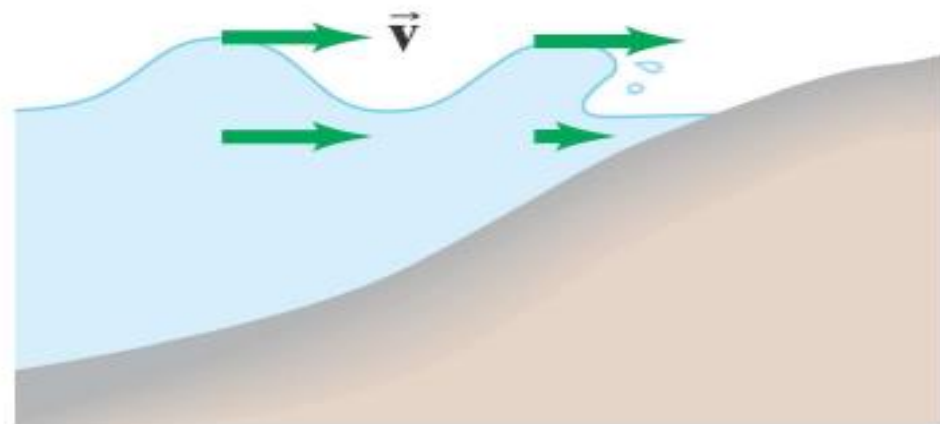
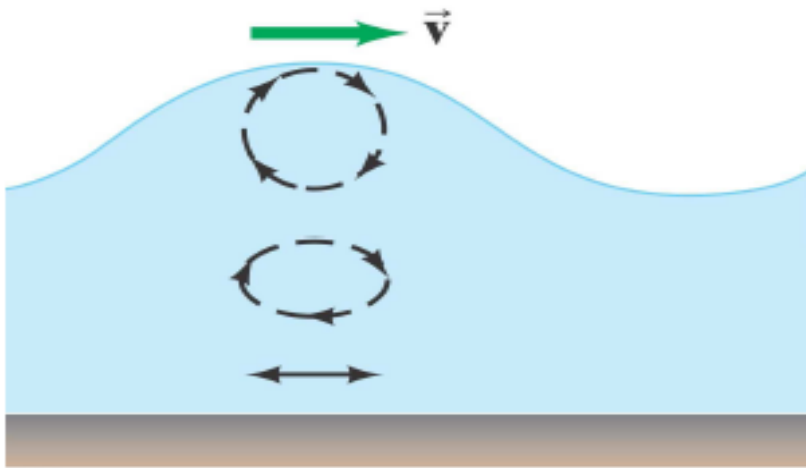
Τμήμα σειсмоγράμματος με τα διάφορα είδη κυμάτων, των οποίων τα πλάτη χρησιμεύουν για τον υπολογισμό του μεγέθους του σεισμού.

Από: ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ Κ. Σπυράκος, Ε. Τουτουδάκη, ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΕΙΣΜΟΛΟΓΙΑΣ



Οι σεισμοί παράγουν εγκάρσια και διαμήκη κύματα. Και τα δύο διαδίδονται μέσα από στερεά υλικά αλλά μόνο ΔΙΑΜΗΚΗ μπορούν να διαδοθούν μέσα από «υγρά», διότι τα υγρά δεν έχουν δυνάμεις επιστροφής κάθετες στην διεύθυνση διάδοσης.

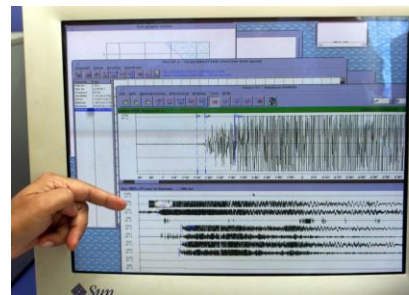
Επιφανειακά κύματα είναι κύματα που διαδίδονται κατά μήκος της διαχωριστικής επιφάνειας δύο μέσων (π,χ, αέρα και νερού).





Η διάδοση των σεισμικών κυμάτων στα διάφορα πετρώματα της Γης επηρεάζεται από πολλούς παράγοντες, όπως είναι π.χ. οι ελαστικές και αδρανειακές ιδιότητες των υλικών, η ανομοιογένεια της σύστασης των διαφόρων πετρωμάτων, το πορώδες αυτών, η διαφορετική στρωμάτωση κ.λ.π.

Μία κλασσική πλέον κατηγορία γεωφυσικών μεθόδων ανίχνευσης ορυκτών και πετρελαϊκών δομών είναι οι σεισμικές μέθοδοι, οι οποίες βασίζονται στην ανίχνευση ανακλώμενων ή/και διαδιδόμενων σεισμικών κυμάτων που προκαλούνται τεχνητά στη γήϊνη επιφάνεια, στη μέτρηση του χρόνου που απαιτείται για να ταξιδέψει το κύμα από την πηγή παραγωγής του στους ανιχνευτές-φωρατές, καθώς και στην κατάλληλη επεξεργασία των ανιχνευόμενων σημάτων, ώστε να απομονωθεί η χρήσιμη πληροφορία από παρεμβολές και θόρυβο (π.χ με χρήση ανάλυσης Fourier). Οι σεισμικές μέθοδοι μπορούν να εφαρμοστούν κατάλληλα και στη ξηρά και στη θάλασσα (σε βαθιά ή σε ρηχά νερά). Η διαφορετική συμπεριφορά (διαφορετική χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση, διαφορετική ταχύτητα κύματος) του στερεού ή του υγρού περιβάλλοντος, στο οποίο γίνονται οι μετρήσεις, καθορίζει και την ανάλογη γεωφυσική τεχνολογία (π.χ οι κύριες ανιχνευτικές διατάξεις διακρίνονται αντίστοιχα σε **γεώφωνα** και **υδρόφωνα**).





ΣΕΙΣΜΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ



Αποτελέσματα της ρευστοποίησης του εδάφους σε κατασκευές της πόλης Niigata της Ιαπωνίας, λόγω του σεισμού της 16ης Ιουνίου 1964 με μέγεθος $M=7.5$ (Steinbrugge Collection, E.E.R.C., University of California, Berkeley).

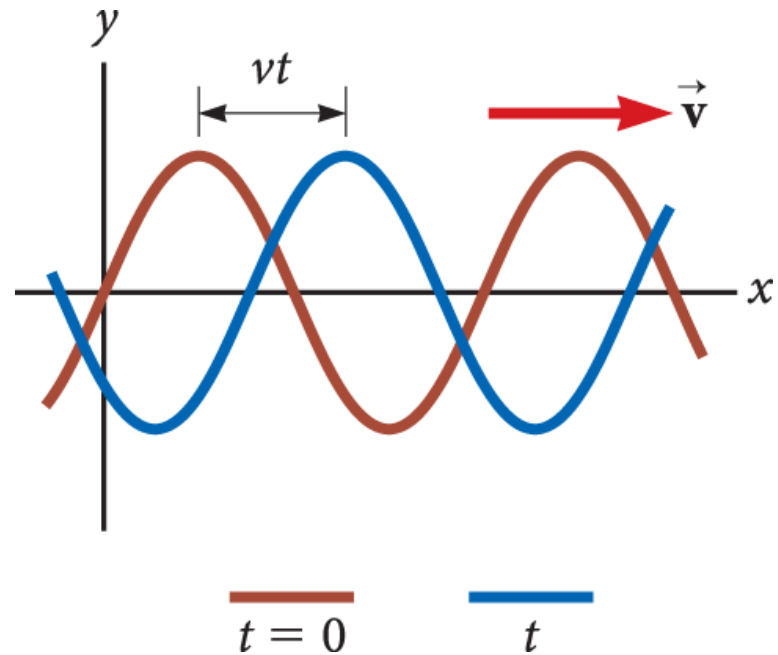
Ημιτονοειδή κύματα

Το κύμα που παριστάνει η καμπύλη, η οποία φαίνεται στην εικόνα, είναι ένα **ημιτονοειδές ή αρμονικό κύμα**.

Πρόκειται για την καμπύλη του γραφήματος της τριγωνομετρικής συνάρτησης $\sin \theta$ ως προς τη γωνία θ .

Αυτό είναι το πιο απλό παράδειγμα ενός περιοδικού συνεχούς κύματος.

- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία πιο σύνθετων κυμάτων.



Ημιτονοειδή κύματα (συνέχεια)

Το κύμα κινείται προς τα δεξιά.

- Στην προηγούμενη εικόνα, η καφέ καμπύλη περιγράφει την αρχική θέση.
- Καθώς το κύμα κινείται προς τα δεξιά, η καφέ καμπύλη θα φτάσει τελικά στη θέση της μπλε καμπύλης.

Κάθε στοιχείο κινείται πάνω-κάτω εκτελώντας απλή αρμονική κίνηση.

- Αυτή η κίνηση είναι η κίνηση που εκτελούν τα στοιχεία του μέσου.

Είναι σημαντικό να διαχωρίσουμε την κίνηση του κύματος από την κίνηση των στοιχείων του μέσου.

Μοντέλο κύματος

Το κύμα είναι ένα νέο μοντέλο απλούστευσης.

- Θα μας επιτρέψει να ορίσουμε περισσότερα μοντέλα ανάλυσης για την επίλυση προβλημάτων.
- Ένα ιδανικό κύμα έχει μόνο μία συχνότητα.
- Ένα ιδανικό κύμα έχει άπειρο μήκος.
- Μπορούμε να δημιουργήσουμε σύνθετα κύματα, συνδυάζοντας ιδανικά κύματα.

Μοντέλο ανάλυσης του οδεύοντος κύματος

- Το μοντέλο αυτό χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις στις οποίες ένα κύμα διαδίδεται στον χώρο χωρίς να αλληλεπιδρά με άλλα κύματα ή σωματίδια.

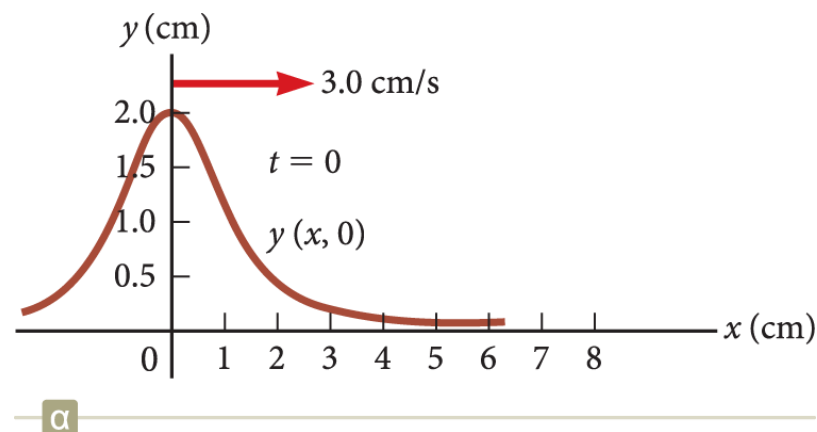
Ορολογία: Πλάτος και μήκος κύματος

Το σημείο στο οποίο η μετατόπιση του στοιχείου από την κανονική του θέση είναι μέγιστη ονομάζεται **κορυφή** ή **όρος** του κύματος.

- Η μέγιστη αυτή μετατόπιση ονομάζεται **πλάτος** A .

Το **μήκος κύματος** λ είναι η απόσταση μίας κορυφής από την επόμενη.

- Γενικότερα, το μήκος κύματος είναι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο οποιωνδήποτε αντίστοιχων σημείων διαδοχικών κυμάνσεων.



Ορολογία: Περίοδος και συχνότητα

Η περίοδος, T , είναι το χρονικό διάστημα που απαιτείται ώστε δύο αντίστοιχα σημεία διαδοχικών κυμάνσεων να περάσουν από το ίδιο σημείο.

- Η περίοδος του κύματος είναι ίδια με την περίοδο της απλής αρμονικής ταλάντωσης ενός στοιχείου του μέσου.

Η **συχνότητα** f είναι ο αριθμός των κορυφών (ή οποιουδήποτε άλλου σημείου που ανήκει στο κύμα) που διέρχονται από ένα δεδομένο σημείο στη μονάδα του χρόνου.

- Συνήθως ως μονάδα χρόνου λαμβάνουμε το δευτερόλεπτο.
- Η συχνότητα του κύματος είναι ίδια με τη συχνότητα της απλής αρμονικής ταλάντωσης ενός στοιχείου του μέσου.

Ορολογία: Περίοδος και συχνότητα (συνέχεια)

Η σχέση που συνδέει τη συχνότητα με την περίοδο είναι

$$f = \frac{1}{T}$$

Όταν η μονάδα του χρόνου είναι το δευτερόλεπτο, οι μονάδες της συχνότητας είναι $s^{-1} = \text{Hz}$.

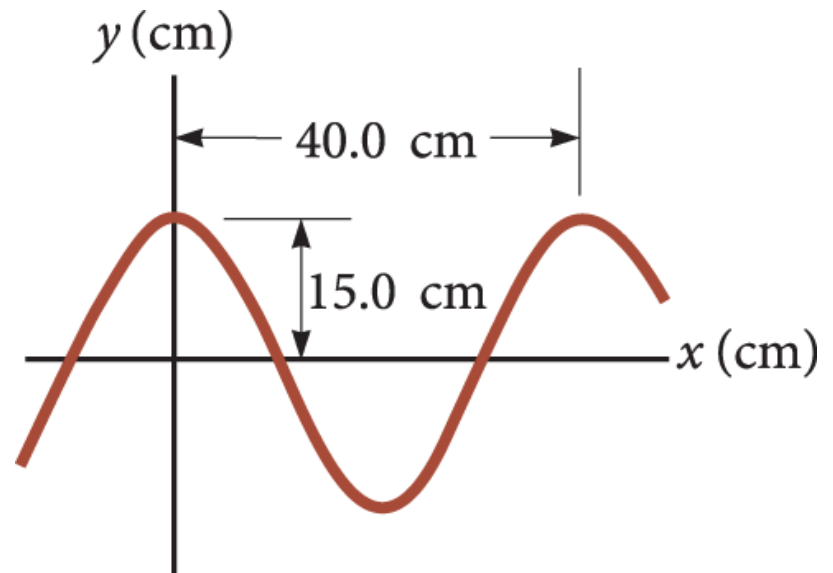
- Το Hz είναι συντόμευση του hertz.

Ορολογία – Παράδειγμα

Το μήκος κύματος λ είναι 40.0 cm.

Το πλάτος A είναι 15.0 cm.

Μπορούμε να γράψουμε την κυματοσυνάρτηση στη μορφή $y = A \cos(kx - \omega t)$.



Ταχύτητα κυμάτων

Τα κύματα διαδίδονται με συγκεκριμένη ταχύτητα.

- Η ταχύτητα εξαρτάται από τις ιδιότητες του διαταρασσόμενου μέσου.

Η κυματοσυνάρτηση περιγράφεται από τη σχέση

$$y(x,t) = A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right]$$

- Η σχέση αυτή ισχύει για ένα κύμα το οποίο κινείται προς τα δεξιά.
- Για ένα κύμα το οποίο κινείται προς τα αριστερά, αντικαθιστούμε το $x - vt$ με το $x + vt$.

Κυματοσυνάρτηση – Μια άλλη μορφή

Εφόσον το μέτρο της ταχύτητας ισούται με το πηλίκο της απόστασης προς τον χρόνο,

$$v = \lambda/T$$

Η κυματοσυνάρτηση μπορεί στη συνέχεια να εκφραστεί ως

$$y(x,t) = A \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right]$$

Αυτή η μορφή της κυματοσυνάρτησης δείχνει την περιοδική φύση του y .

- Για συντομία, θα χρησιμοποιούμε συχνά το y και όχι το $y(x, t)$.

Εξισώσεις κύματος

Μπορούμε ακόμα να ορίσουμε τον κυκλικό κυματαριθμό ή απλώς κυματαριθμό k .

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Επίσης, η κυκλική συχνότητα ορίζεται ως

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Η κυματοσυνάρτηση μπορεί να εκφραστεί ως $y = A \sin(kx - \omega t)$.

Η ταχύτητα του κύματος γίνεται $v = \lambda f$.

Αν $x \neq 0$ τη χρονική στιγμή $t = 0$, η κυματοσυνάρτηση μπορεί να γενικευτεί στη μορφή $y = A \sin(kx - \omega t + \phi)$, όπου το ϕ είναι η **σταθερά φάσης**.

Εξισώσεις κύματος (συνέχεια)

Οι βασικές μαθηματικές σχέσεις του μοντέλου ανάλυσης του οδεύοντος κύματος είναι οι εξής:

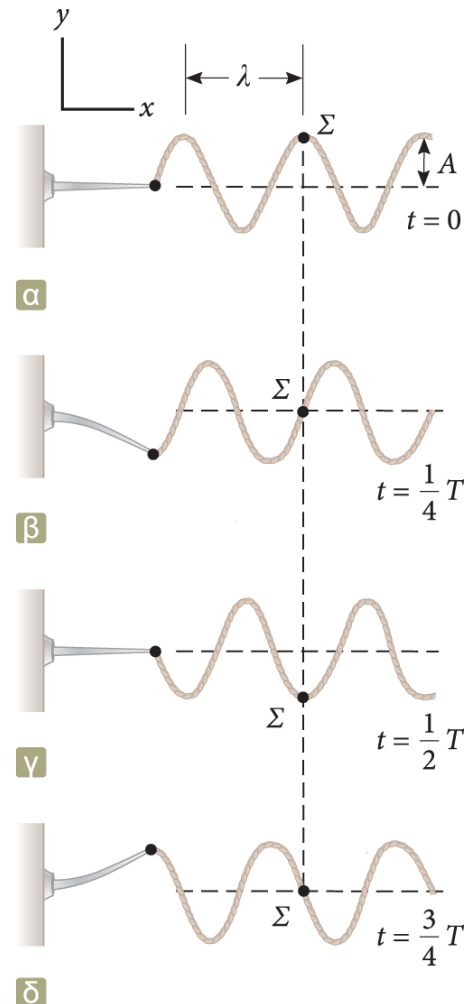
- $f = 1/T$
- $y = A \sin(kx - \omega t)$
- $v = f\lambda$

Ημιτονοειδή κύματα σε νήματα

Για να δημιουργήσουμε μια σειρά παλμών, μπορούμε να προσαρτήσουμε το νήμα σε ένα έλασμα που ταλαντώνεται.

Το κύμα αποτελείται από μια σειρά ίδιων κυματομορφών.

Εξακολουθούν να ισχύουν οι σχέσεις που συνδέουν το μέτρο της ταχύτητας, την ταχύτητα, και την περίοδο.



Ημιτονοειδή κύματα σε νήματα (2)

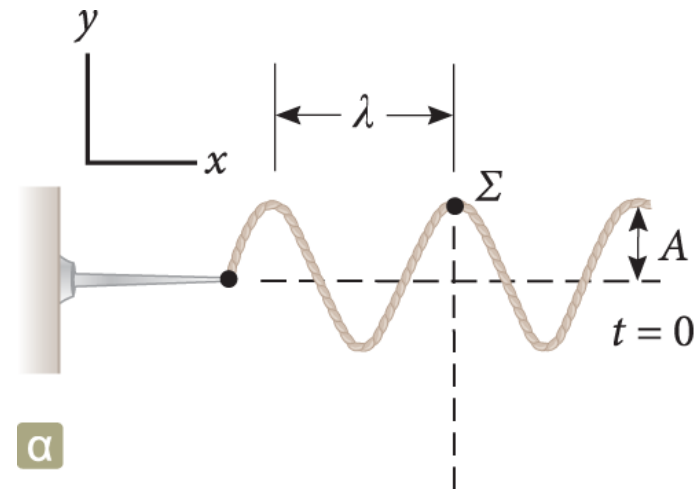
Κάθε στοιχείο του νήματος ταλαντώνεται κατακόρυφα και εκτελεί απλή αρμονική κίνηση.

- Για παράδειγμα, το σημείο Σ .

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε στοιχείο του νήματος είναι ένας απλός αρμονικός ταλαντωτής που ταλαντώνεται με συχνότητα ίση με εκείνη της ταλάντωσης του ελάσματος.

Ενώ κάθε στοιχείο ταλαντώνεται στον άξονα y , το κύμα διαδίδεται κατά μήκος του άξονα x με ταχύτητα μέτρου v .

Τη χρονική στιγμή $t = 0$,
 $y = A \sin(kx - \omega t)$.



Ημιτονοειδή κύματα σε νήματα (3)

Το μέτρο της εγκάρσιας ταχύτητας του στοιχείου είναι

$$v_y = \left. \frac{dy}{dt} \right]_{x=\text{σταθερό}}$$

$$\text{ή } v_y = -\omega A \cos(kx - \omega t)$$

Είναι διαφορετικό από το μέτρο της ταχύτητας του ίδιου του κύματος.

Η εγκάρσια επιτάχυνση του στοιχείου είναι

$$a_y = \left. \frac{dv_y}{dt} \right]_{x=\text{σταθερό}}$$

$$\text{ή } a_y = -\omega^2 A \sin(kx - \omega t)$$

Ημιτονοειδή κύματα σε νήματα (τελική διαφάνεια)

Οι μέγιστες τιμές της εγκάρσιας ταχύτητας και της εγκάρσιας επιτάχυνσης είναι:

- $v_{y, \max} = \omega A$
- $a_{y, \max} = \omega^2 A$

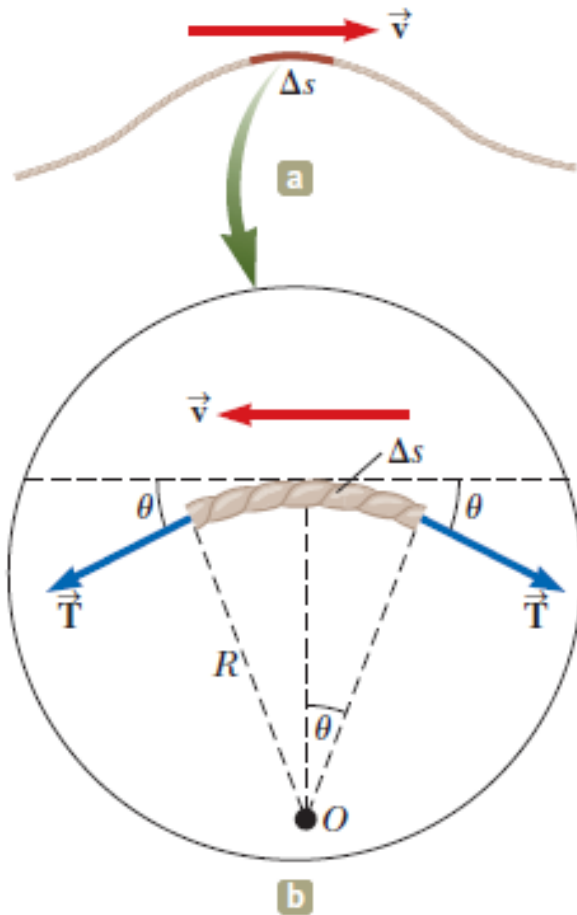
Η εγκάρσια ταχύτητα και η εγκάρσια επιτάχυνση δεν λαμβάνουν τις μέγιστες τιμές τους ταυτόχρονα.

- Η ταχύτητα v γίνεται μέγιστη στο σημείο $y = 0$.
- Η επιτάχυνση a γίνεται μέγιστη στο σημείο $y = \pm A$.

Μη συγχέετε την ταχύτητα v του κύματος με την εγκάρσια ταχύτητα v_y ενός σημείου του νήματος.

- Σε ένα ομογενές μέσο, η ταχύτητα v είναι σταθερή, ενώ η εγκάρσια ταχύτητα v_y μεταβάλλεται ημιτονοειδώς.

Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων σε νήματα



$$F = 2T \sin \theta \approx 2T\theta$$

$$m = \mu \Delta s = 2\mu R\theta$$

$$F = \frac{mv^2}{R}$$

$$2T\theta = \frac{2\mu R\theta v^2}{R} \quad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων σε νήματα

Η ταχύτητα του κύματος εξαρτάται από τα φυσικά χαρακτηριστικά του νήματος και την τάση που ασκείται στο νήμα.

$$v = \sqrt{\frac{\text{τάση}}{\text{μάζα/μήκος}}} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Υποθέτουμε ότι η τάση δεν επηρεάζεται από τον παλμό.

Δεν θεωρούμε ότι ο παλμός έχει συγκεκριμένο σχήμα.

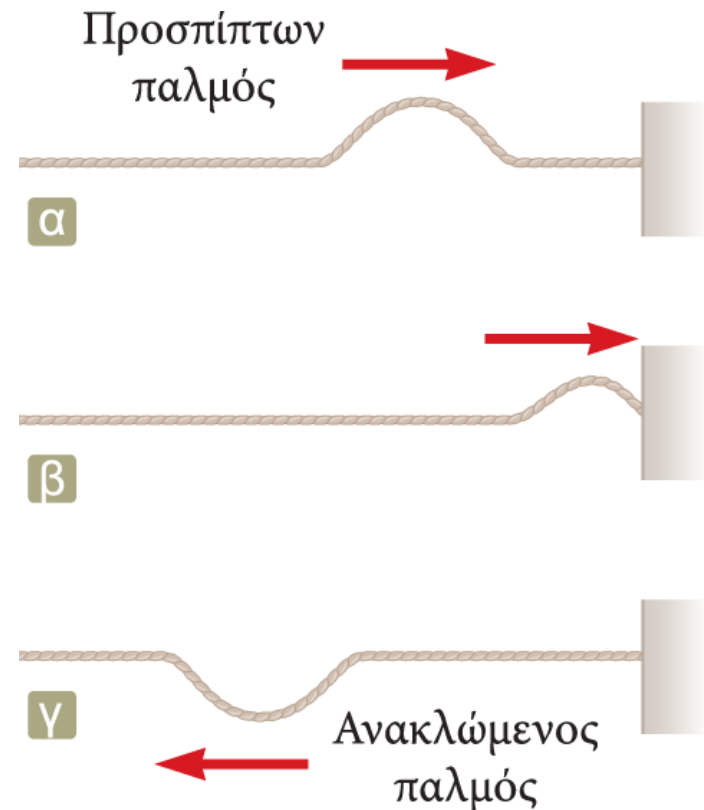
Ανάκλαση κύματος, σταθερό άκρο

Όταν ο παλμός φτάσει στον τοίχο, διαδίδεται στο νήμα προς την αντίθετη κατεύθυνση.

Δηλαδή, ο παλμός **ανάκλαται**.

Κατά την ανάκλαση, ο παλμός αναστρέφεται.

- Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα
 - Όταν ο παλμός φτάνει στο σταθερό άκρο του νήματος, το νήμα ασκεί μια κατακόρυφη δύναμη στον τοίχο με φορά προς τα επάνω.
 - Ο τοίχος ασκεί στο νήμα μια δύναμη αντίδρασης ίδιου μέτρου, αλλά αντίθετης κατεύθυνσης.



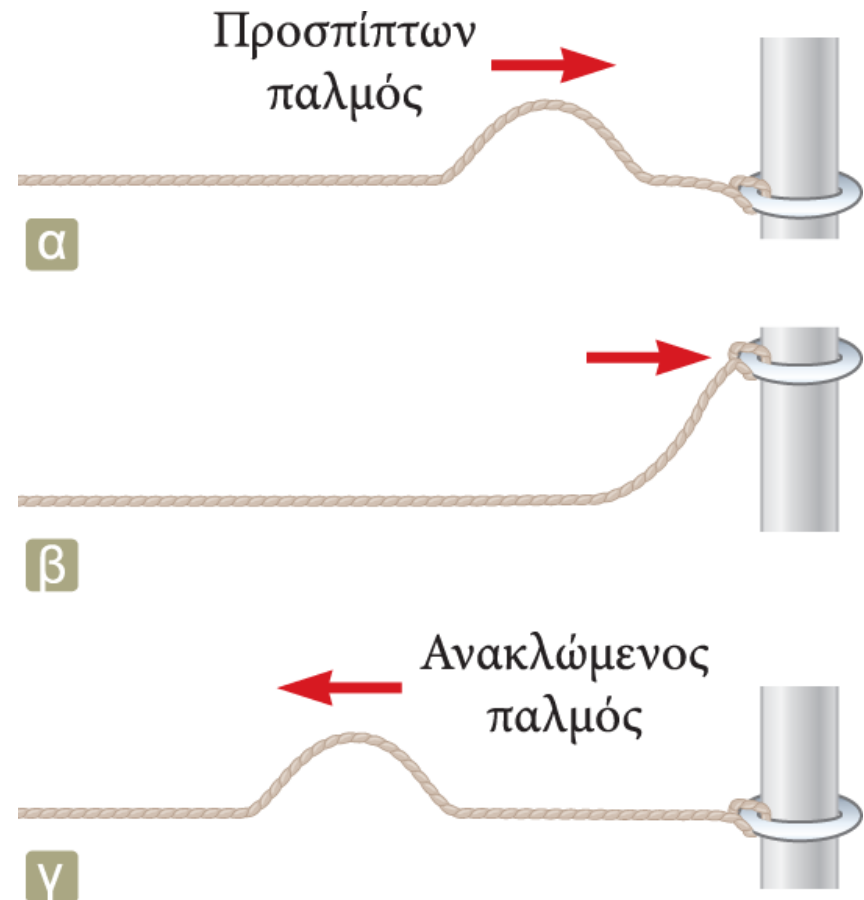
Ανάκλαση κύματος, ελεύθερο άκρο

Όταν το άκρο είναι ελεύθερο, το νήμα μπορεί να κινείται κατακόρυφα.

Ο παλμός ανακλάται.

Ο παλμός δεν αναστρέφεται.

Ο ανακλώμενος παλμός έχει το ίδιο πλάτος με τον αρχικό παλμό.



Μετάδοση κύματος

Ας θεωρήσουμε μια περίπτωση η οποία είναι ενδιάμεση των προηγούμενων δύο περιπτώσεων.

- Ένα μέρος της ενέργειας του προσπίπτοντος παλμού ανακλάται και ένα μέρος **μεταδίδεται**.
 - Ένα μέρος της ενέργειας διασχίζει το όριο των δύο μέσων.

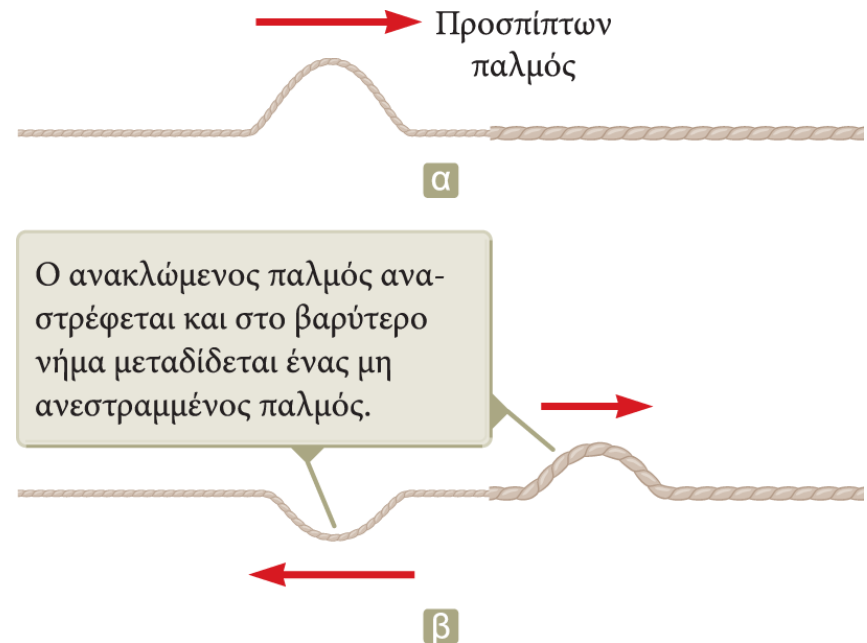
Μετάδοση κύματος (2)

Ας υποθέσουμε ότι ένα ελαφρύ νήμα είναι ενωμένο με ένα πιο βαρύ νήμα.

Ο παλμός διαδίδεται στο ελαφρύ νήμα και φτάνει στο όριο.

Το μέρος του παλμού που ανακλάται, αναστρέφεται.

Ο ανακλώμενος παλμός έχει μικρότερο πλάτος.

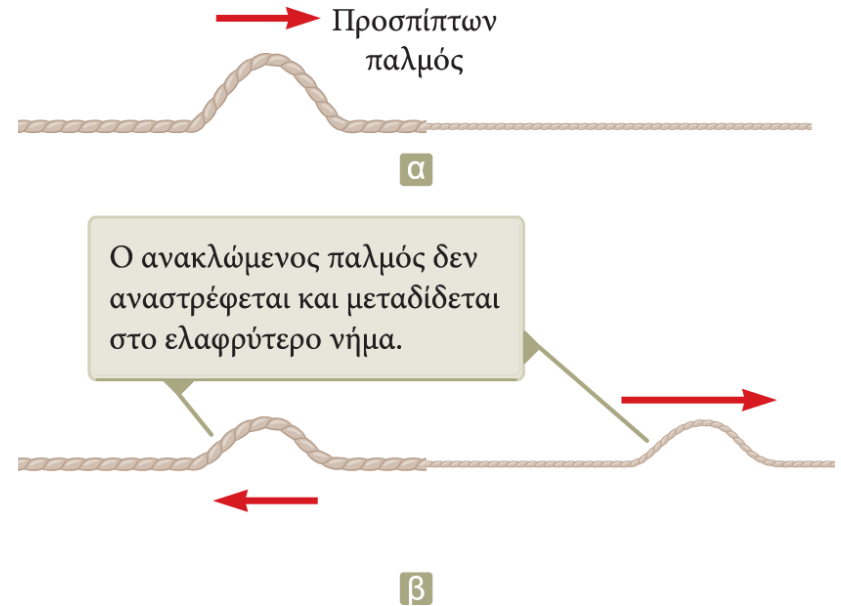


Μετάδοση κύματος (3)

Ας υποθέσουμε ότι ένα βαρύ νήμα είναι ενωμένο με ένα πιο ελαφρύ νήμα.

Ένα μέρος του παλμού ανακλάται και ένα μέρος του μεταδίδεται.

Ο ανακλώμενος παλμός δεν αναστρέφεται.



Μετάδοση κύματος (4)

Ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας:

- Όταν ο παλμός φτάνει στο όριο του μέσου διάδοσης και χωρίζεται στον παλμό που ανακλάται και στον παλμό που μεταδίδεται στο δεύτερο μέσο, το άθροισμα των ενεργειών των δύο παλμών πρέπει να ισούται με την ενέργεια του αρχικού παλμού.

Όταν ένα κύμα ή ένας παλμός διαδίδεται από το μέσο A στο μέσο B και $v_A > v_B$, ο παλμός αναστρέφεται κατά την ανάκλαση.

- Το B έχει μεγαλύτερη πυκνότητα από το A.

Όταν ένα κύμα ή ένας παλμός διαδίδεται από το μέσο A στο μέσο B και $v_A < v_B$, ο παλμός δεν αναστρέφεται κατά την ανάκλαση.

- Το A έχει μεγαλύτερη πυκνότητα από το B.

Μεταφορά ενέργειας των ημιτονοειδών κυμάτων σε νήματα

Καθώς τα κύματα διαδίδονται σε ένα μέσο, μεταφέρουν ενέργεια.

Μπορούμε να μοντελοποιήσουμε κάθε στοιχείο του νήματος ως έναν απλό αρμονικό ταλαντωτή.

- Η ταλάντωση γίνεται στον άξονα y .

Κάθε στοιχείο έχει την ίδια συνολική ενέργεια.

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε στοιχείο έχει μάζα dm .

Η κινητική ενέργεια που έχει ένα στοιχείο λόγω της κατακόρυφης κίνησής του είναι $dK = \frac{1}{2}(dm)v_y^2$.

Η μάζα dm είναι επίσης ίση με μdx .

Η κινητική ενέργεια ενός στοιχείου του νήματος είναι $dK = \frac{1}{2}(\mu dx)v_y^2$.

Μεταφορά ενέργειας (συνέχεια)

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση για όλα τα στοιχεία βρίσκουμε τη συνολική κινητική ενέργεια ενός μήκους κύματος $K_\lambda = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2\lambda$.

Η συνολική δυναμική ενέργεια ενός μήκους κύματος είναι $U_\lambda = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2\lambda$.

Επομένως, η συνολική ενέργεια είναι

- $E_\lambda = K_\lambda + U_\lambda = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2\lambda$

Η ισχύς ενός κύματος

Η ισχύς είναι ο ρυθμός μεταφοράς της ενέργειας:

$$P = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{\frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \lambda}{T} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 v$$

Η ισχύς που μεταφέρει ένα ημιτονοειδές κύμα, το οποίο διαδίδεται σε ένα νήμα είναι ανάλογη

- του τετραγώνου της συχνότητας
- του τετραγώνου του πλάτους
- της ταχύτητας του κύματος

Ο ρυθμός μεταφοράς ενέργειας σε οποιοδήποτε ημιτονοειδές κύμα είναι ανάλογος του τετραγώνου της κυκλικής συχνότητας και του τετραγώνου του πλάτους.

Η γραμμική εξίσωση κύματος

Οι κυματοσυναρτήσεις $y(x, t)$ είναι λύσεις της **γραμμικής εξίσωσης κύματος**.

Η εξίσωση περιγράφει πλήρως την κίνηση του κύματος.

Από αυτήν μπορούμε να πάρουμε την εξίσωση της ταχύτητας του κύματος.

Η γραμμική εξίσωση κύματος είναι θεμελιώδης για πολλές μορφές κίνησης των κυμάτων.

Η γραμμική εξίσωση κύματος που διαδίδεται σε νήμα

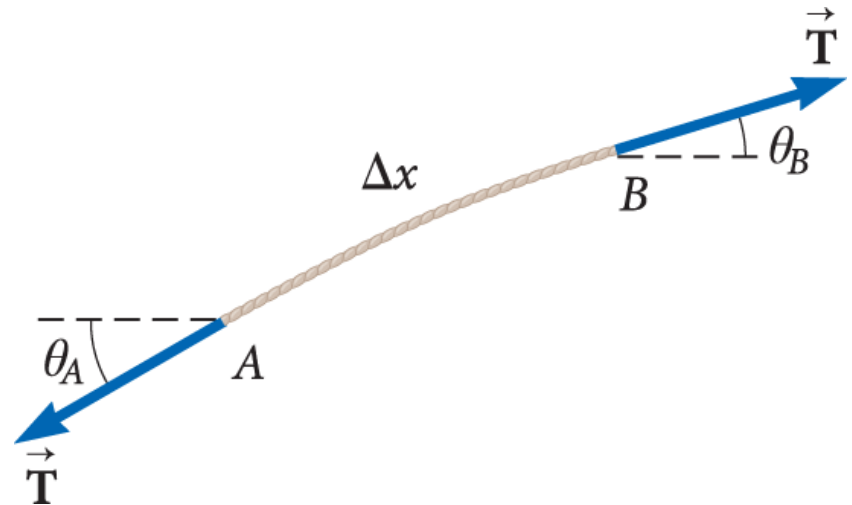
Το νήμα δέχεται τάση T .

Θεωρούμε ένα μικρό στοιχειώδες τμήμα του νήματος μήκους Δx .

Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται κατά μήκος του άξονα y είναι

$$\Sigma F_y \approx T(\tan \theta_B - \tan \theta_A)$$

- Χρησιμοποιούμε την προσέγγιση της μικρής γωνίας $\sin \theta \approx \tan \theta$.



Η γραμμική εξίσωση ενός κύματος που διαδίδεται σε νήμα (συνέχεια)

Εφαρμόζοντας τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε

$$\frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{(\partial y / \partial x)_B - (\partial y / \partial x)_A}{\Delta x}$$

Καθώς $\Delta x \rightarrow 0$, η σχέση γίνεται

$$\frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Η παραπάνω σχέση είναι η γραμμική εξίσωση για κύματα που διαδίδονται κατά μήκος νημάτων.

Γραμμική εξίσωση κύματος, γενικά

Μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση στη μορφή

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Η σχέση αυτή ισχύει γενικά για διάφορους τύπους κυμάτων.

- Το y παριστάνει διάφορες θέσεις.
 - Για ένα νήμα, το y είναι η κατακόρυφη μετατόπιση των στοιχείων του.
 - Για ένα ηχητικό κύμα που διαδίδεται σε ένα αέριο, το y είναι η διαμήκης μετατόπιση των στοιχείων του αερίου από τη θέση ισορροπίας τους.
 - Για ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα, το y είναι μια συνιστώσα του ηλεκτρικού ή του μαγνητικού πεδίου.

Γραμμική εξίσωση κύματος, γενικά (συνέχεια)

Η γραμμική εξίσωση κύματος ικανοποιείται από όλες τις κυματοσυναρτήσεις της μορφής

$$y = f(x \pm vt)$$

Η γραμμική εξίσωση κύματος προκύπτει άμεσα από την εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα σε οποιοδήποτε στοιχειώδες τμήμα ενός νήματος, στο οποίο διαδίδεται ένα οδεύον κύμα.



Ας θυμηθούμε τι είναι κύμα:

Κύμα είναι μια διαταραχή που διαδίδεται σε ένα ελαστικό μέσο.

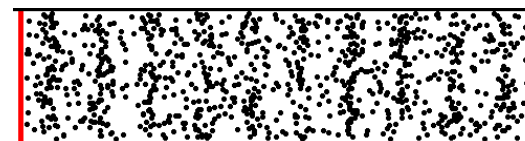
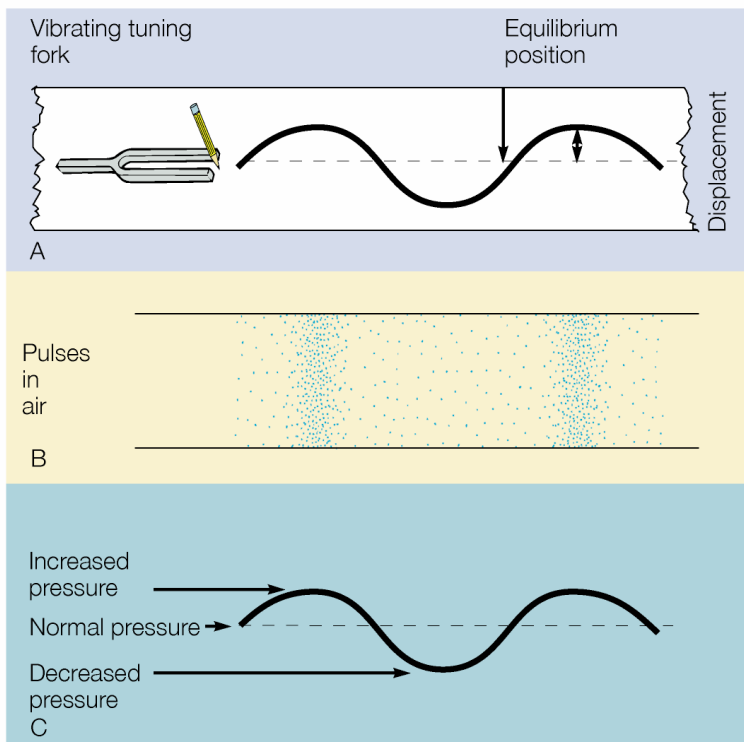
Η διαταραχή μπορεί να είναι

α. η απομάκρυνση υλικών σημείων από τη θέση

ισορροπίας τους ή

β. η μεταβολή της πίεσης ή της πυκνότητας του αέρα.

ΗΧΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ



Τα ηχητικά κύματα είναι διαμήκη κύματα (πυκνώματα - αραιώματα της πυκνότητας και της πίεσης του αέρα) και ανάλογα με τη συχνότητά τους διακρίνονται σε **ήχους**, **υπερήχους** και **υποήχους**.

• **Ήχοι:** $20 \text{ Hz} < f < 20\,000 \text{ Hz}$

• **Υπέρηχοι:** $f > 20\,000 \text{ Hz}$

• **Υπόηχοι:** $f < 20 \text{ Hz}$

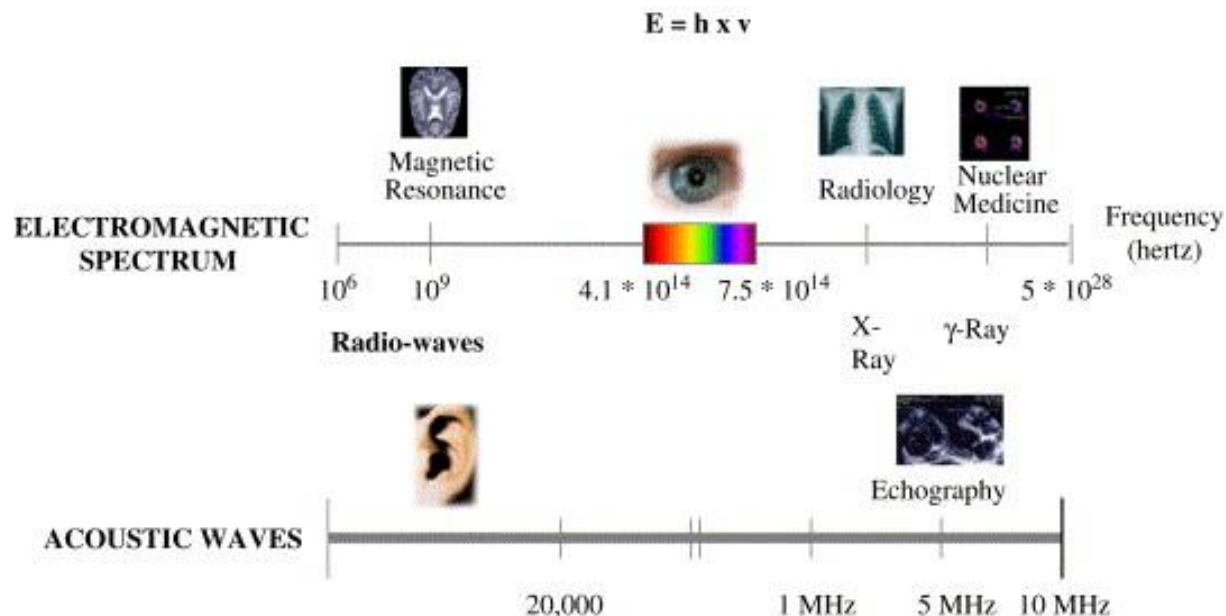


Ένα παράδειγμα διαμήκων κυμάτων: Τα ηχητικά κύματα

Τα ηχητικά κύματα είναι διαμήκη κύματα (πυκνώματα - αραιώματα της πυκνότητας και της πίεσης του αέρα) και ανάλογα με τη συχνότητά τους διακρίνονται σε ήχους, υπερήχους και υποήχους.

***Οι ήχοι** είναι ηχητικά κύματα συχνότητας f μεταξύ 20 και 20 000 Hz. Οι ήχοι γίνονται αντιληπτοί από το αισθητήριο ακοής του ανθρώπου, αφού γίνει η κατάλληλη βιοφυσική μετατροπή των μηχανικών ταλαντώσεων σε ηλεκτρικά σήματα, τα οποία επεξεργάζεται έπειτα ο ανθρώπινος εγκέφαλος.

• **Ήχοι:** $20 \text{ Hz} < f < 20\,000 \text{ Hz}$



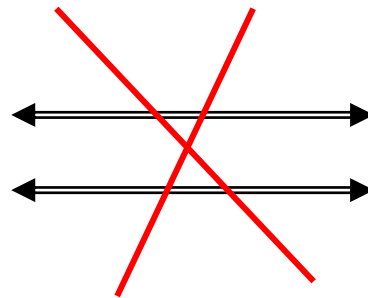


***Οι υπέρηχοι** είναι ηχητικά κύματα συχνότητας f μεγαλύτερης των 20 000 Hz, η οποία είναι το άνω όριο των ακουστικών συχνοτήτων. Συχνότητες της περιοχής συχνοτήτων των υπερήχων γίνονται αντιληπτές από άλλους ζωντανούς οργανισμούς, π.χ. τους σκύλους.

*Οι υπέρηχοι έχουν μεγάλη κατευθυντικότητα και χρησιμοποιούνται σε μια σειρά διαγνωστικών και άλλων τεχνολογικών εφαρμογών, όπως π.χ οι **βυθομετρήσεις**, ο **ηχοεντοπισμός**, η **ιατρική διάγνωση και θεραπεία**, η ακουστική **διάγνωση ρωγμών** ή φαινομένων σπηλαίωσης σε μέταλλα, ο **κατακερματισμός** ανεπιθύμητων επικαλύψεων σε ορυκτά (φυσικά ή καλλιτεχνικά δημιουργήματα) και ο **καθαρισμός εργαλείων** (υπερηχητικά “πλυντήρια”). Για τον έλεγχο των πετρωμάτων με υπέρηχους χρησιμοποιούνται δύο είδη κυμάτων: τα διαμήκη και τα διατμητικά (ή αλλιώς εγκάρσια).



***Υπέρηχοι: $f > 20\ 000\ \text{Hz}$**



**Άλλο υπέρηχοι και
άλλο υπερηχητική
ταχύτητα!!!**



- **Supersonic speed** - shock wave and sonic boom produced



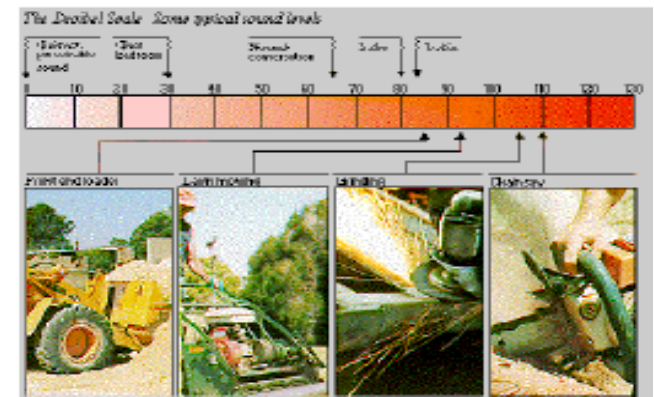
***Οι υπόηχοι** είναι ηχητικά κύματα συχνότητας f μικρότερης των 20 Hz, η οποία είναι το κάτω όριο των ακουστικών συχνοτήτων. Οι υπόηχοι προκαλούνται από σεισμούς, ηφαίστεια, βροντές, ανέμους και βαριές μηχανολογικές εγκαταστάσεις. Πρέπει να αποφεύγεται η παραγωγή ή/και η έκθεση του ανθρώπου στους υποήχους γιατί βλάπτουν το νευρικό σύστημα. Συχνότητες της περιοχής συχνοτήτων των υποήχων γίνονται αντιληπτές από άλλους ζωντανούς οργανισμούς, π.χ. τις κατσαρίδες (βιολογική μέθοδος ανίχνευσης σεισμών!).

•Υπόηχοι: $f < 20$ Hz



Σύμφωνα με τον ΕΛΟΤ 263.1

- «Θόρυβος ονομάζεται κάθε απεριοδικός σύνθετος ήχος που η στιγμιαία τιμή του αυξομειώνεται με τυχαίο τρόπο»
- «Θόρυβος ονομάζεται κάθε δυσάρεστος ή ανεπιθύμητος ήχος»



Δημιουργία περιοδικού ηχητικού κύματος

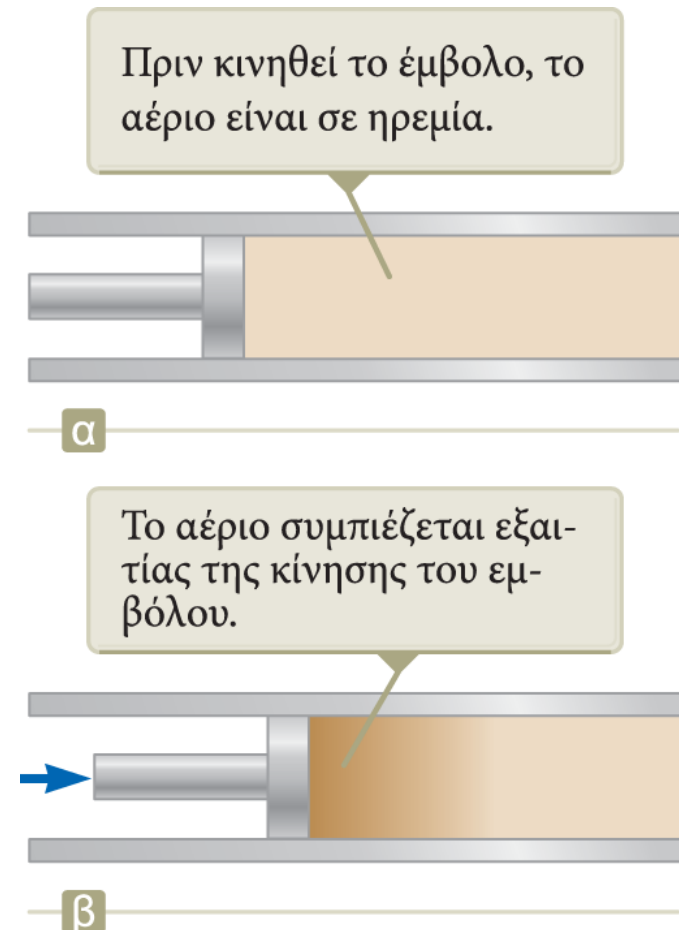
Στην εικόνα φαίνεται η κίνηση ενός μονοδιάστατου διαμήκους ηχητικού παλμού, ο οποίος διαδίδεται σε έναν μακρύ σωλήνα που περιέχει ένα συμπιεστό αέριο.

Το έμβολο στο αριστερό άκρο του σωλήνα μπορεί να κινηθεί γρήγορα προς τα δεξιά για να συμπίεσει το αέριο και να δημιουργήσει τον παλμό.

Πριν κινηθεί το έμβολο, το αέριο έχει ομοιόμορφη πυκνότητα.

Αν σπρώξουμε απότομα το έμβολο προς τα δεξιά, το αέριο που βρίσκεται μπροστά από αυτό συμπιέζεται.

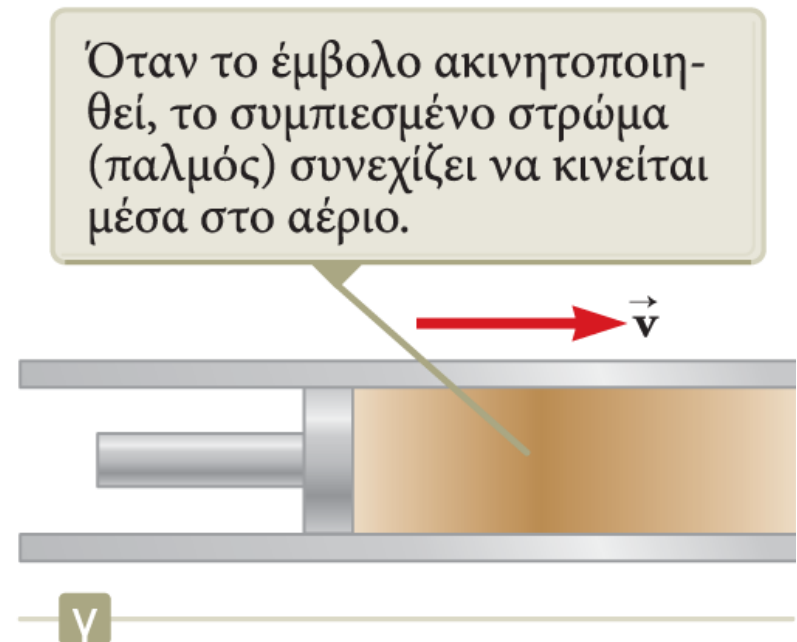
- Η σκούρα περιοχή στην εικόνα (β).
- Η πίεση και η πυκνότητα σε αυτό το στρώμα αερίου είναι μεγαλύτερες από ό,τι πριν ωθήσουμε το έμβολο.



Δημιουργία περιοδικού ηχητικού κύματος (συνέχεια)

Μόλις το έμβολο ακινητοποιηθεί, το συμπιεσμένο στρώμα του αερίου συνεχίζει να κινείται.

- Το πύκνωμα αυτό είναι ένας διαμήκης παλμός, ο οποίος διαδίδεται στον σωλήνα με ταχύτητα v .

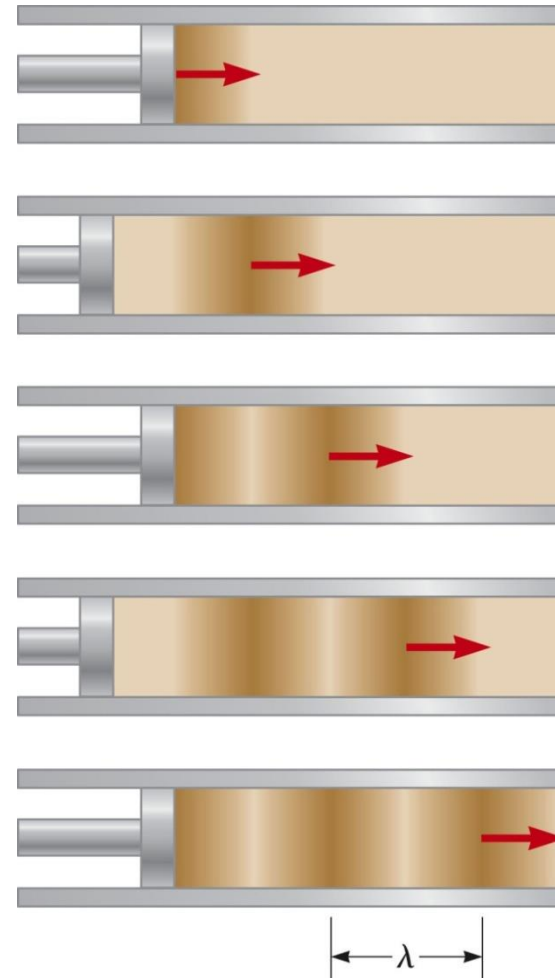


Δημιουργία περιοδικού ηχητικού κύματος

Αν αναγκάσουμε το έμβολο να εκτελέσει απλή αρμονική κίνηση, θα δημιουργήσουμε ένα μονοδιάστατο, περιοδικό ηχητικό κύμα.

Τα σκουρόχρωμα τμήματα στις εικόνες είναι περιοχές όπου το αέριο έχει συμπιεστεί. Η πυκνότητα και η πίεση σε αυτές τις περιοχές έχουν τιμές μεγαλύτερες από τις τιμές ισορροπίας.

Οι συμπιεσμένες περιοχές ονομάζονται **πυκνώματα**.



Δημιουργία περιοδικού ηχητικού κύματος (συνέχεια)

Όταν τραβάμε το έμβολο προς τα πίσω, το αέριο που βρίσκεται μπροστά από το έμβολο εκτονώνεται, οπότε η πίεση και η πυκνότητα σε αυτή την περιοχή έχουν τιμές μικρότερες από τις τιμές ισορροπίας.

Οι περιοχές χαμηλής πίεσης ονομάζονται **αραιώματα**.

Τα αραιώματα διαδίδονται στον σωλήνα ακολουθώντας τα πυκνώματα.

Τα πυκνώματα και τα αραιώματα κινούνται στο μέσο με την ταχύτητα του ήχου.

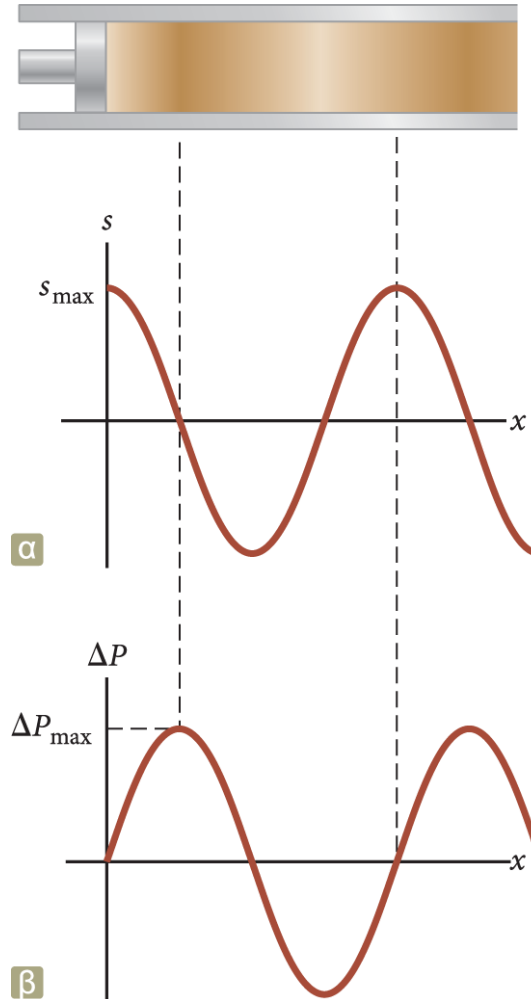
Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών πυκνωμάτων ή αραιωμάτων ισούται με το μήκος κύματος.

Περιοδικά ηχητικά κύματα (τελική διαφάνεια)

Ένα ηχητικό κύμα μπορεί να θεωρηθεί είτε ως κύμα μετατόπισης είτε ως κύμα πίεσης.

Το κύμα της πίεσης και το κύμα της μετατόπισης έχουν διαφορά φάσης 90° .

- Η πίεση είναι μέγιστη όταν η μετατόπιση είναι μηδενική, κ.λπ.



Περιοδικά ηχητικά κύματα, μετατόπιση

Καθώς τα πυκνώματα και τα αραιώματα διαδίδονται στον σωλήνα, κάθε μικρό στοιχειώδες τμήμα του αερίου εκτελεί απλή αρμονική κίνηση παράλληλα με τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.

Η αρμονική συνάρτηση θέσης είναι

$$s(x, t) = s_{\max} \cos(kx - \omega t) \quad \Delta P = -B \frac{\Delta V}{V} = -B \frac{A \Delta s}{A \Delta x} = -B \frac{\partial s}{\partial x}$$

όπου

- $s_{\max}$ είναι η μέγιστη θέση του στοιχείου ως προς τη θέση ισορροπίας.
 - Συχνά, η παράμετρος αυτή ονομάζεται πλάτος μετατόπισης του κύματος.
- k είναι ο κυματαριθμός.
- ω είναι η κυκλική συχνότητα του κύματος.

Σημειώστε ότι η μετατόπιση του στοιχείου γίνεται κατά μήκος του άξονα x , δηλαδή στη διεύθυνση διάδοσης του ηχητικού κύματος.

Περιοδικά ηχητικά κύματα, πίεση

Η μεταβολή ΔP της πίεσης του αερίου είναι επίσης περιοδική.

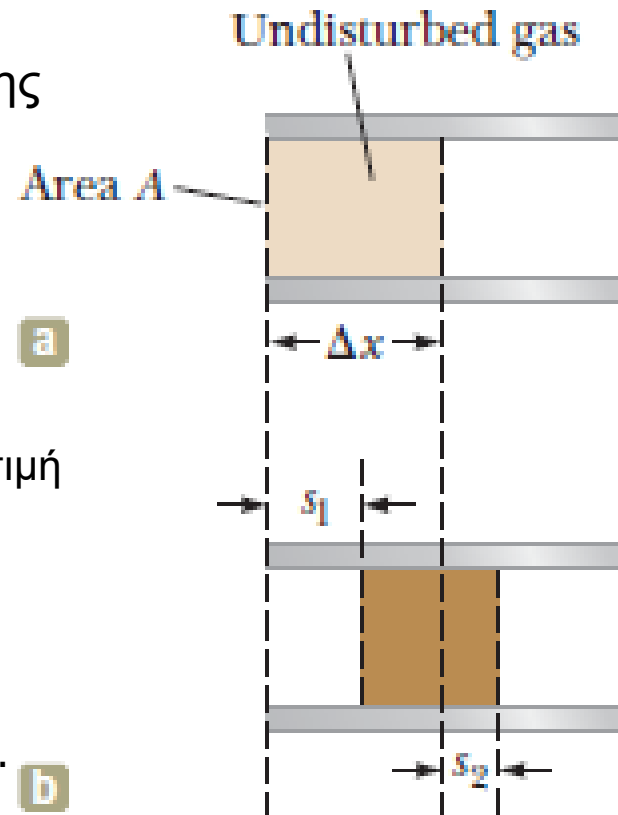
$$\Delta P = \Delta P_{\max} \sin(kx - \omega t)$$

όπου

- $\Delta P_{\max}$ είναι το πλάτος της πίεσης.
 - Είναι η μέγιστη μεταβολή της πίεσης από την τιμή ισορροπίας.
- k είναι ο κυματαριθμός.
- ω είναι η κυκλική συχνότητα.

Η πίεση μπορεί να συσχετιστεί με τη μετατόπιση.

- Τα δύο μεγέθη συνδέονται μέσω της σχέσης $\Delta P_{\max} = B s_{\max} k$.
 - Το B είναι το μέτρο ελαστικότητας όγκου του υλικού.



Σχέση μεταξύ πίεσης και μετατόπισης

$$\Delta P = -B \frac{\Delta V}{V_i}$$

$$\Delta P = -B \frac{A \Delta s}{A \Delta x}$$

$$\Delta P = -B \frac{\partial s}{\partial x}$$

Το πλάτος της πίεσης συνδέεται με το πλάτος μετατόπισης μέσω της σχέσης

$$\Delta P_{\max} = B s_{\max} k$$

Γενικά, το μέτρο ελαστικότητας όγκου δεν προσδιορίζεται τόσο εύκολα όσο η πυκνότητα του αερίου.

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση για την ταχύτητα του ήχου, μπορούμε να γράψουμε τη σχέση μεταξύ του πλάτους πίεσης και του πλάτους μετατόπισης για τα ηχητικά κύματα ως

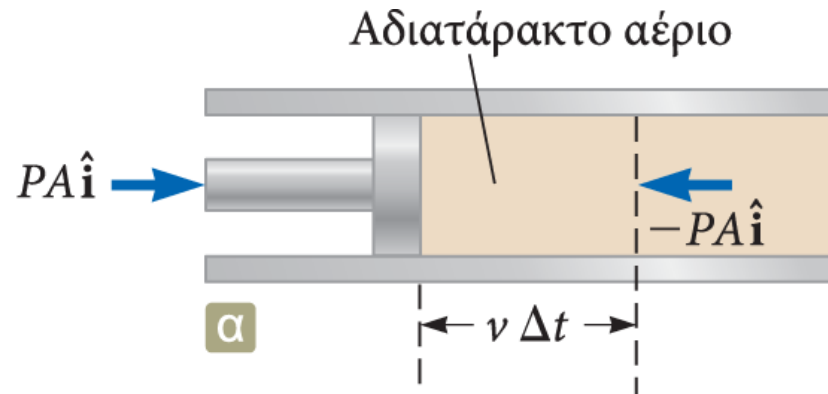
$$\Delta P_{\max} = \rho v \omega s_{\max}$$

Ταχύτητα διάδοσης του ήχου μέσα σε ένα αέριο

Θεωρούμε ένα στοιχειώδες τμήμα του αερίου μεταξύ του εμβόλου και της διακεκομμένης γραμμής.

Αρχικά, το στοιχειώδες τμήμα βρίσκεται σε ισορροπία υπό την επίδραση δυνάμεων ίσου μέτρου:

- Το έμβολο ασκεί μια δύναμη από τα αριστερά.
- Το υπόλοιπο αέριο ασκεί μια δύναμη από τα δεξιά.
- Οι δυνάμεις αυτές έχουν ίδιο μέτρο, ίσο με PA .
 - P είναι η πίεση του αερίου.
 - A είναι το εμβαδόν της διατομής του σωλήνα.

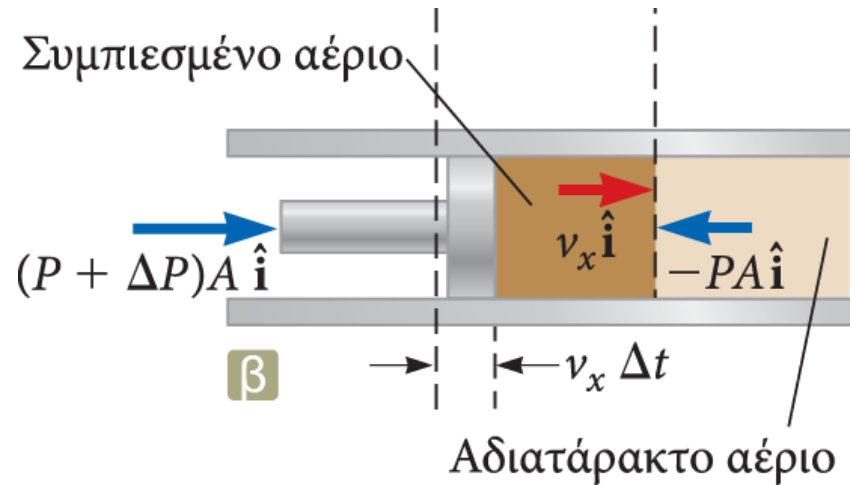


Ταχύτητα διάδοσης του ήχου μέσα σε ένα αέριο (συνέχεια)

Μετά από χρονικό διάστημα Δt , το έμβολο έχει κινηθεί προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα μέτρου v_x .

Το μέτρο της δύναμης έχει αυξηθεί από PA σε $(P + \Delta P)A$.

Το αέριο που βρίσκεται στα δεξιά του στοιχείου παραμένει σε ηρεμία επειδή το ηχητικό κύμα δεν έχει φτάσει ακόμα σε αυτό.



Ώθηση και ορμή

Μοντελοποιούμε το στοιχείο του αερίου ως μη απομονωμένο σύστημα ως προς την ορμή.

Η δύναμη που ασκεί το έμβολο προσδίδει ώθηση στο στοιχείο, η οποία μεταβάλλει την ορμή του.

Η ώθηση παρέχεται από τη σταθερή δύναμη, την οποία προκαλεί η αύξηση της πίεσης στο έμβολο:

$$\vec{I} = \sum \vec{F} \Delta t = (A \Delta P \Delta t) \hat{i}$$

Μπορούμε να συσχετίσουμε τη μεταβολή της πίεσης με τη μεταβολή του όγκου χρησιμοποιώντας το μέτρο ελαστικότητας όγκου:

$$\Delta P = -B \frac{\Delta V}{V} = B \frac{V_x}{V}$$

Επομένως η ώθηση είναι

$$\vec{I} = \left(AB \frac{V_x}{V} \Delta t \right) \hat{i}$$

Ώθηση και ορμή (συνέχεια)

Η μεταβολή της ορμής του στοιχείου του αερίου μάζας m είναι

$$\Delta \vec{p} = m \Delta \vec{v} = (\rho v v_x A \Delta t) \hat{i}$$

Αν εξισώσουμε το σκέλος της ώθησης με το σκέλος της ορμής και στη συνέχεια απλοποιήσουμε, η σχέση για την ταχύτητα διάδοσης του ήχου μέσα σε ένα αέριο γίνεται

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

όπου

- B είναι το μέτρο ελαστικότητας όγκου του υλικού.
- ρ είναι η πυκνότητα του υλικού.

Ταχύτητα των ηχητικών κυμάτων, γενικά

Η ταχύτητα διάδοσης των ηχητικών κυμάτων σε ένα μέσο εξαρτάται από τη συμπιεστότητα και την πυκνότητα του μέσου.

Συχνά, μπορούμε να εκφράσουμε τη συμπιεστότητα συναρτήσει του μέτρου ελαστικότητας όγκου του υλικού.

Η ταχύτητα *όλων των μηχανικών κυμάτων* δίνεται από τη γενική σχέση:

$$v = \sqrt{\frac{\text{ελαστική ιδιότητα}}{\text{αδρανειακή ιδιότητα}}}$$

Η ταχύτητα του ήχου σε μια ράβδο συμπαγούς υλικού εξαρτάται από το μέτρο ελαστικότητας του Young και από την πυκνότητα του υλικού.

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad \bullet \text{ Ταχύτητα του ήχου (γενικά)}$$

$B \rightarrow$ Μέτρο ελαστικότητας (Nt/m^2)

$\rho \rightarrow$ Πυκνότητα (Kg/m^3)

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad \bullet \text{ Για ιδανικά αέρια}$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1.4 \text{ (για ιδανικά αέρια)}$$

$R \rightarrow$ παγκόσμια σταθερά των αερίων, $R = 8.315 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot {}^\circ\text{K}}$

$T \rightarrow$ απόλυτη θερμοκρασία (${}^\circ\text{K}$)

$M \rightarrow$ μοριακό βάρος (για τον αέρα $M = 0.029 \frac{\text{Kg}}{\text{mol}}$)

Ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα

Η ταχύτητα του ήχου εξαρτάται επίσης από τη θερμοκρασία του μέσου.

- Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό για τα αέρια.

Για τον αέρα, η σχέση που συνδέει την ταχύτητα με τη θερμοκρασία είναι

$$v = (331 \text{ m/s}) \sqrt{1 + \frac{T_c}{273}}$$

όπου

- 331 m/s είναι η ταχύτητα του ήχου στους 0° C.
- T_c είναι η θερμοκρασία του αέρα σε βαθμούς Κελσίου.

Ταχύτητα διάδοσης του ήχου σε αέρια – Παραδείγματα τιμών

ΠΙΝΑΚΑΣ Τ3.1

Η ταχύτητα διάδοσης του ήχου σε διάφορα μέσα

Μέσο	v (m/s)	Μέσο	v (m/s)	Μέσο	v (m/s)
Αέρια		Υγρά στους 25°C		Στερεά^α	
Υδρογόνο (0°C)	1 286	Γλυκερίνη	1 904	Γυαλί Pyrex	5 640
Ήλιο (0°C)	972	Θαλασσινό νερό	1 533	Σίδηρος	5 950
Αέρας (20°C)	343	Νερό	1 493	Αργίλιο	6 420
Αέρας (0°C)	331	Υδράργυρος	1 450	Ορείχαλκος	4 700
Οξυγόνο (0°C)	317	Κηροζίνη	1 324	Χαλκός	5 010
		Μεθυλική αλκοόλη	1 143	Χρυσός	3 240
		Τετραχλωράνθρακας	926	Λουσίτης	2 680
				Μόλυβδος	1 960
				Καουτσούκ	1 600

^αΟι τιμές αφορούν τη διάδοση διαμήκων κυμάτων σε ογκώδη υλικά μέσα. Οι ταχύτητες διάδοσης των διαμήκων κυμάτων σε λεπτές ράβδους είναι μικρότερες, ενώ οι ταχύτητες των εγκάρσιων κυμάτων σε ογκώδη υλικά μέσα είναι ακόμα πιο μικρές.

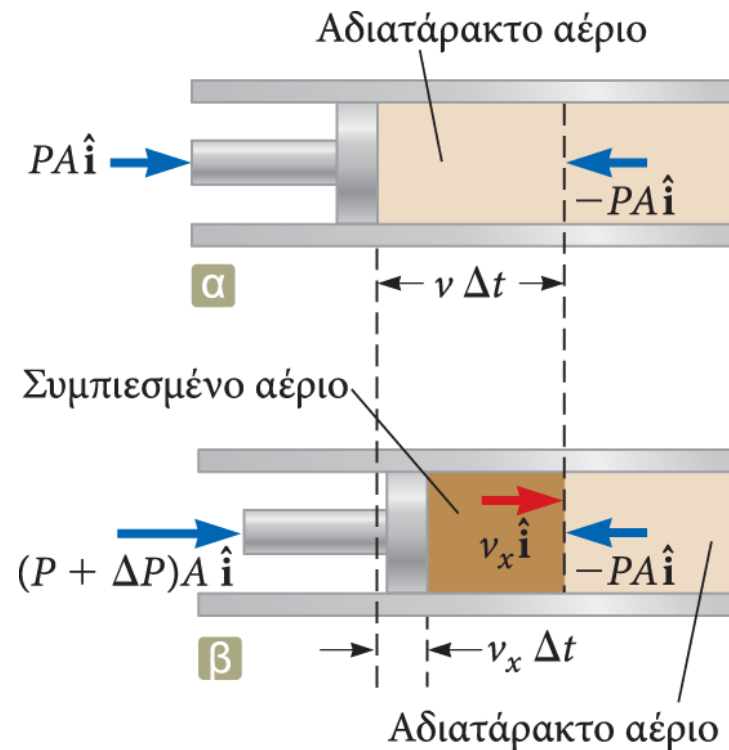
Ενέργεια των περιοδικών ηχητικών κυμάτων

Θεωρούμε ένα στοιχειώδες τμήμα αέρα μάζας Δm και μήκους Δx .

Μοντελοποιούμε το στοιχείο ως ένα σωματίδιο στο οποίο παράγει έργο το το έμβολο.

Το έμβολο μεταφέρει ενέργεια στο στοιχείο του αέρα μέσα στον σωλήνα.

Αυτή η ενέργεια απομακρύνεται από το έμβολο μέσω του ηχητικού κύματος.



Ισχύς ενός περιοδικού ηχητικού κύματος

Ο ρυθμός μεταφοράς ενέργειας είναι η ισχύς του κύματος.

$$\text{Ισχύς} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}_x$$

$$(\text{Ισχύς})_{\text{μέση}} = \frac{1}{2} \rho A v \omega^2 s_{\text{max}}^2$$

Η μέση ισχύς υπολογίζεται για μία περίοδο της ταλάντωσης.

$$\begin{aligned} \text{Power} &= [\Delta P(x, t) A] \hat{\mathbf{i}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} [s(x, t) \hat{\mathbf{i}}] \\ &= [\rho v \omega A s_{\text{max}} \sin(kx - \omega t)] \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [s_{\text{max}} \cos(kx - \omega t)] \right\} \\ &= \rho v \omega A s_{\text{max}} \sin(kx - \omega t) [\omega s_{\text{max}} \sin(kx - \omega t)] \\ &= \rho v \omega^2 A s_{\text{max}}^2 \sin^2(kx - \omega t) \end{aligned}$$

Ένταση ενός περιοδικού ηχητικού κύματος

Η ένταση I ενός κύματος ορίζεται ως ισχύς ανά μονάδα επιφάνειας.

- Είναι ο ρυθμός με τον οποίο το κύμα μεταφέρει ενέργεια διαμέσου μιας μοναδιαίας επιφάνειας A , η οποία είναι κάθετη στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος

$$I = \frac{(\text{Ισχύς})_{\text{μέση}}}{A}$$

Στο παράδειγμά μας, όπου το κύμα διαδίδεται στον αέρα, έχουμε

$$I = \frac{1}{2} \rho v (\omega s_{\max})^2$$

Άρα, η ένταση ενός περιοδικού ηχητικού κύματος είναι ανάλογη

- του τετραγώνου του πλάτους μετατόπισης
- του τετραγώνου της κυκλικής συχνότητας

Ένταση (συνέχεια)

Η ένταση I συναρτήσει του πλάτος πίεσης είναι

$$I = \frac{(\Delta P_{\max})^2}{2\rho v}$$

Ηχοστάθμη

Το εύρος των εντάσεων που μπορεί να αντιληφθεί το ανθρώπινο αυτί είναι πολύ μεγάλο.

Μας διευκολύνει να χρησιμοποιούμε λογαριθμική κλίμακα για να προσδιορίζουμε την ηχοστάθμη (ή ηχητική στάθμη) β .

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_o} \right)$$

Ηχοστάθμη (συνέχεια)

Η σταθερά I_0 ονομάζεται **ένταση αναφοράς**.

- Αντιστοιχεί στο κατώφλιο ακοής.
- $I_0 = 1.00 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2$
- Το I είναι η ένταση του ήχου την ηχοστάθμη του οποίου θέλουμε να προσδιορίσουμε.

Η ηχοστάθμη β μετριέται σε decibel (dB).

Όριο πόνου: $I = 1.00 \text{ W/m}^2$, $\beta = 120 \text{ dB}$

Κατώφλιο ακοής: Η ένταση αναφοράς $I_0 = 1.00 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2$ αντιστοιχεί σε ηχοστάθμη $\beta = 0 \text{ dB}$.

Ηχοστάθμη – Παράδειγμα

Ποια ηχοστάθμη αντιστοιχεί σε ένταση $2.0 \times 10^{-7} \text{ W/m}^2$;

$$\begin{aligned}\beta &= 10 \log (2.0 \times 10^{-7} \text{ W/m}^2 / 1.0 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2) \\ &= 10 \log 2.0 \times 10^5 \\ &= 53 \text{ dB}\end{aligned}$$

Πρακτικός κανόνας: Ο διπλασιασμός της ακουστότητας αντιστοιχεί σε αύξηση της ηχοστάθμης κατά 10 dB περίπου.

Ηχοστάθμες

ΠΙΝΑΚΑΣ Τ3.2

Ηχοστάθμες

Πηγή ήχου	β (dB)
Αεριοθούμενο σε μικρή απόσταση	150
Κομπρεσέρ, πολυβόλο	130
Σειρήνα, μουσική συναυλία	120
Μετρό, χλοοκοπτική μηχανή	100
Έντονη κυκλοφορία στον δρόμο	80
Ηλεκτρική σκούπα	70
Συζήτηση	60
Βόμβος κουνουπιού	40
Ψίθυρος	30
Θρόισμα φύλλων	10
Κατώφλιο ακοής	0

Σημειακή πηγή

Μια **σημειακή πηγή** εκπέμπει ηχητικά κύματα προς όλες τις κατευθύνσεις.

- Το αποτέλεσμα είναι ένα **σφαιρικό κύμα**.

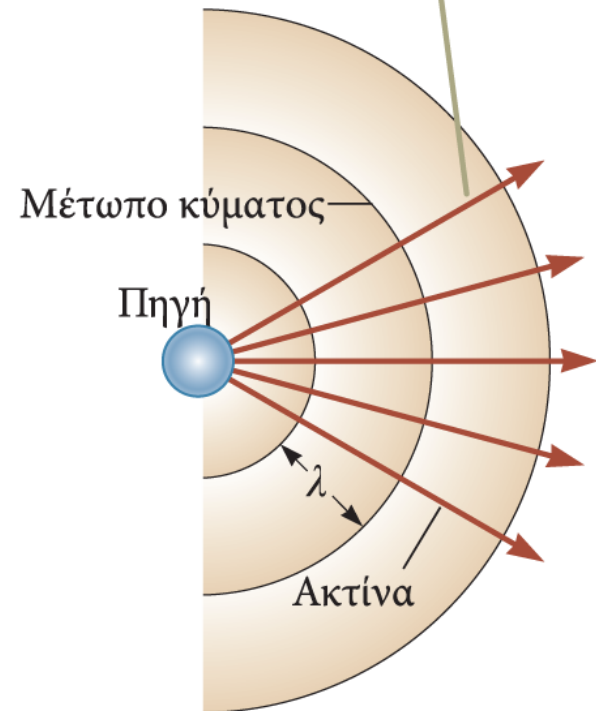
Μπορούμε να αναπαραστήσουμε τα σφαιρικά κύματα ως ομόκεντρα κυκλικά τόξα με κέντρο την πηγή.

Κάθε επιφάνεια σταθερής φάσης ονομάζεται **μέτωπο κύματος** ή **ισοφασική επιφάνεια**.

Η ακτινική απόσταση μεταξύ διαδοχικών μετώπων του κύματος, τα οποία έχουν την ίδια φάση, είναι το μήκος λ του κύματος.

Οι ακτινικές ευθείες που ξεκινούν από την πηγή και έχουν φορά προς τα έξω δείχνουν προς την κατεύθυνση διάδοσης των κυμάτων και ονομάζονται **ακτίνες**.

Οι ακτίνες έχουν διεύθυνση κάθετη στα μέτωπα των κυμάτων και φορά από τη σημειακή πηγή προς τα έξω.



Ένταση μιας σημειακής πηγής

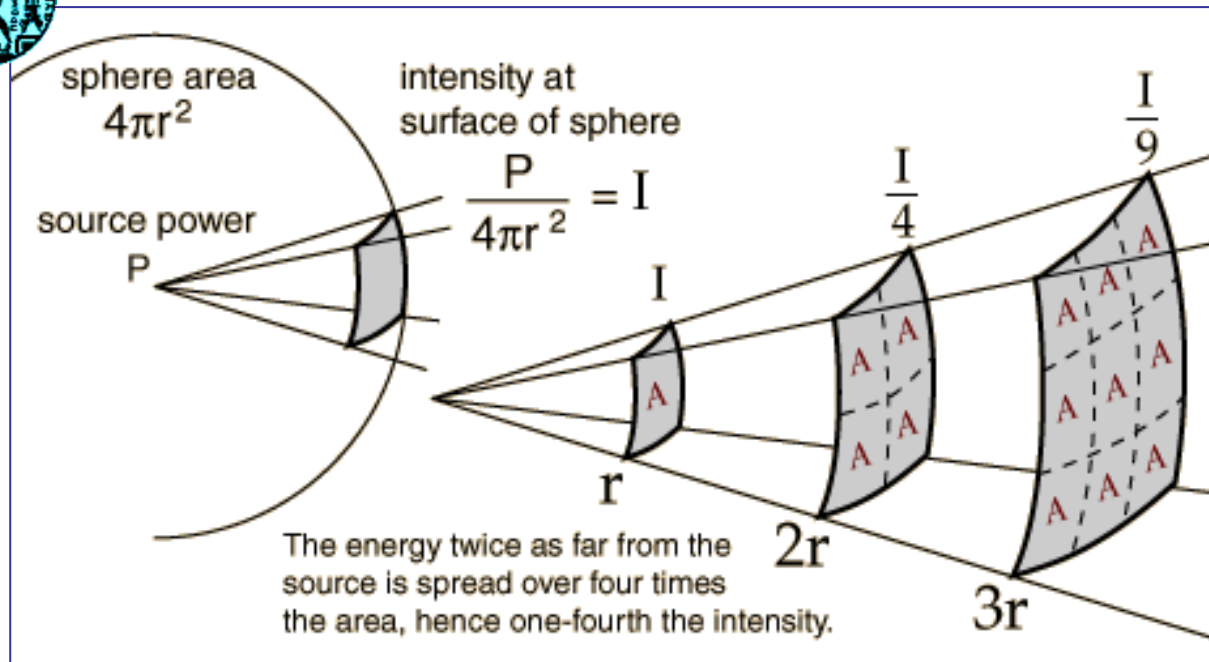
Η ισχύς κατανέμεται ομοιόμορφα σε όλη την επιφάνεια της σφαίρας.

Η ένταση του κύματος σε απόσταση r από την πηγή είναι

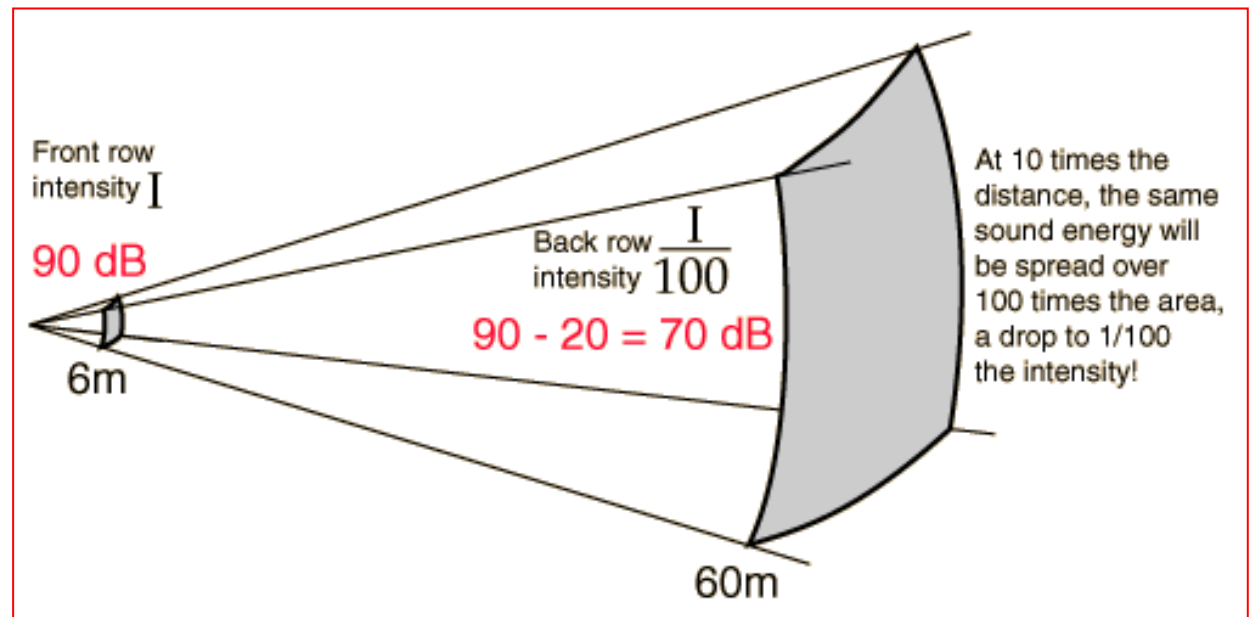
$$I = \frac{(\text{Ισχύς})_{\text{μέση}}}{A} = \frac{(\text{Ισχύς})_{\text{μέση}}}{4\pi r^2}$$

Η παραπάνω σχέση είναι ένας νόμος αντίστροφου τετραγώνου.

- Η ένταση είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης από την πηγή.

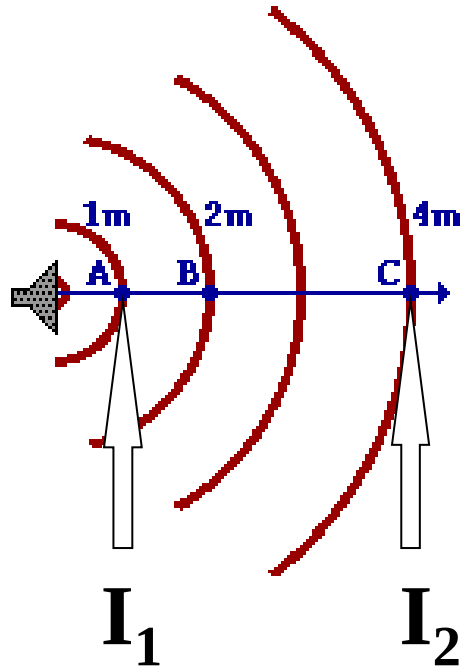


Εξασθένιση της έντασης του ήχου με την απόσταση





Μείωση της έντασης λόγω γεωμετρικής εξάπλωσης του κύματος



$$I_1 = P_1/A_1 \quad I_2 = P_1/A_2$$

$$I_2/I_1 = A_1/A_2 \quad I_2/I_1 = r_1^2/r_2^2$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \Rightarrow 10\log\left(\frac{I_2}{I_1}\right) = 20\log\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

$$\Rightarrow 10\log\left(\frac{I_2/I_0}{I_1/I_0}\right) = 20\log\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

$$\Rightarrow 10\log\left(\frac{I_2}{I_0}\right) - 10\log\left(\frac{I_1}{I_0}\right) = -20\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

$$\Rightarrow I_2(\text{dB}) = I_1(\text{dB}) - 20\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Επομένως για κάθε
δεκαπλασιασμό της
απόστασης από την
πηγή η ένταση μειώνεται
κατά 20 dB.

Μείωση έντασης λόγω απορρόφησης

$$I_{out} = I_{in} e^{-aL}$$

$a \rightarrow$ συντελεστής απρόφησης (m^{-1})

$L \rightarrow$ πάχος υλικού (m)

$$I_{out} = I_{in} e^{-aL} \Rightarrow 10 \log \left(\frac{I_{out}}{I_0} \right) = 10 \log \left(\frac{I_{in}}{I_0} e^{-aL} \right)$$

$$\Rightarrow 10 \log \left(\frac{I_{out}}{I_0} \right) = 10 \log \left(\frac{I_{in}}{I_0} \right) - (10 \log e) aL$$

$$\Rightarrow I_{out} (dB) = I_{in} (dB) - a_{dB} L$$

$$a_{dB} = (10 \log e) a \approx 4.34 a$$

Το φαινόμενο Doppler

Το **φαινόμενο Doppler** είναι η φαινόμενη μεταβολή της συχνότητας (ή του μήκους κύματος) που παρατηρούμε εξαιτίας της κίνησης της πηγής ενός κύματος ή του παρατηρητή.

- Όταν η σχετική θέση του παρατηρητή ως προς την πηγή είναι αύξουσα συνάρτηση, τότε η σχετική ταχύτητα της πηγής και του παρατηρητή είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα του κύματος, και η συχνότητα φαίνεται να αυξάνεται.
- Όταν η σχετική θέση του παρατηρητή ως προς την πηγή είναι φθίνουσα συνάρτηση, τότε η σχετική ταχύτητα της πηγής και του παρατηρητή είναι μικρότερη από την ταχύτητα του κύματος, και η συχνότητα φαίνεται να μειώνεται.

Σε όλες τις εικόνες, τα κύματα κινούνται προς τα αριστερά, ενώ η πηγή τους βρίσκεται σε μεγάλη απόσταση στα δεξιά της βάρκας (δεν φαίνεται στην εικόνα).



α



β



γ

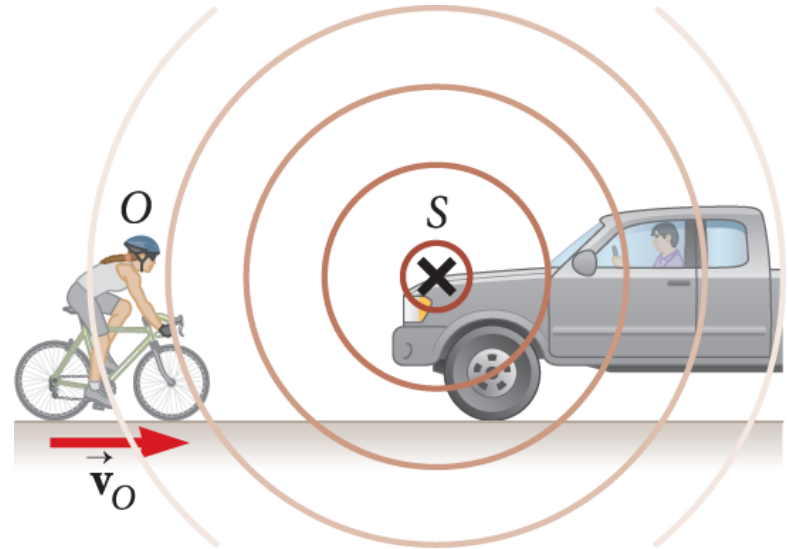
Το φαινόμενο Doppler, κινούμενος παρατηρητής

Ο παρατηρητής κινείται με ταχύτητα v_o .

Υποθέτουμε ότι η σημειακή πηγή είναι ακίνητη ως προς τον αέρα.

Για ευκολία, αναπαριστούμε τα κύματα ως κύκλους, οι οποίοι είναι οι τομές των σφαιρικών μετώπων των κυμάτων με το επίπεδο της σελίδας.

- Η απόσταση μεταξύ διαδοχικών μετώπων ισούται με το μήκος κύματος.



Το φαινόμενο Doppler, κινούμενος παρατηρητής (συνέχεια)

Η ταχύτητα του ήχου είναι v , η συχνότητα είναι f , και το μήκος κύματος είναι λ .

Όταν ο παρατηρητής κινείται προς την πηγή, η ταχύτητα των κυμάτων αυτών είναι $v' = v + v_o$.

- Το μήκος κύματος παραμένει αμετάβλητο.

Η συχνότητα f' του ήχου που ακούει ο παρατηρητής είναι μεγαλύτερη όταν ο παρατηρητής πλησιάζει προς την πηγή.

$$f' = \left(\frac{v + v_o}{v} \right) f$$

Η συχνότητα f' του ήχου που ακούει ο παρατηρητής είναι μικρότερη όταν ο παρατηρητής απομακρύνεται από την πηγή.

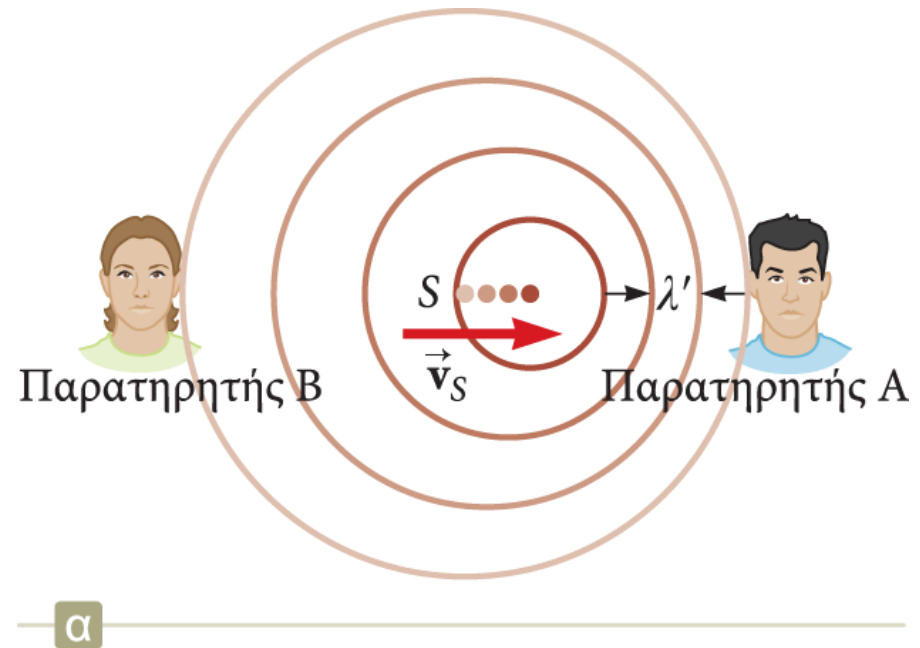
$$f' = \left(\frac{v - v_o}{v} \right) f$$

Το φαινόμενο Doppler, κινούμενη πηγή

Ας υποθέσουμε ότι η πηγή κινείται και ότι ο παρατηρητής είναι ακίνητος.

Όταν η πηγή πλησιάζει τον παρατηρητή, το μήκος κύματος που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι μικρότερο.

Όταν η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή, το μήκος κύματος που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι μεγαλύτερο.



Το φαινόμενο Doppler, κινούμενη πηγή (συνέχεια)

Όταν η πηγή πλησιάζει τον παρατηρητή, η φαινόμενη συχνότητα αυξάνεται.

$$f' = \left(\frac{v}{v - v_s} \right) f$$

Όταν η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή, η φαινόμενη συχνότητα μειώνεται.

$$f' = \left(\frac{v}{v + v_s} \right) f$$

Το φαινόμενο Doppler, γενικά

Μπορούμε να συνδυάσουμε τις κινήσεις του παρατηρητή και της πηγής

$$f' = \left(\frac{v + v_o}{v - v_s} \right) f$$

Τα πρόσημα εξαρτώνται από την κατεύθυνση της ταχύτητας.

- Το πρόσημο είναι θετικό όταν ο παρατηρητής *πλησιάζει* την πηγή ή όταν η πηγή *πλησιάζει* τον παρατηρητή.
- Το πρόσημο είναι αρνητικό όταν ο παρατηρητής *απομακρύνεται* από την πηγή ή όταν η πηγή *απομακρύνεται* από τον παρατηρητή.

Το φαινόμενο Doppler (τελική διαφάνεια)

Χρήσιμος κανόνας για τα πρόσημα

- Η λέξη «πλησιάζει» υποδηλώνει αύξηση της παρατηρούμενης συχνότητας.
- Η λέξη «απομακρύνεται» υποδηλώνει μείωση της παρατηρούμενης συχνότητας.

Το φαινόμενο Doppler είναι ένα φαινόμενο που παρατηρείται σε όλα τα κύματα.

Το φαινόμενο Doppler δεν εξαρτάται από την απόσταση.

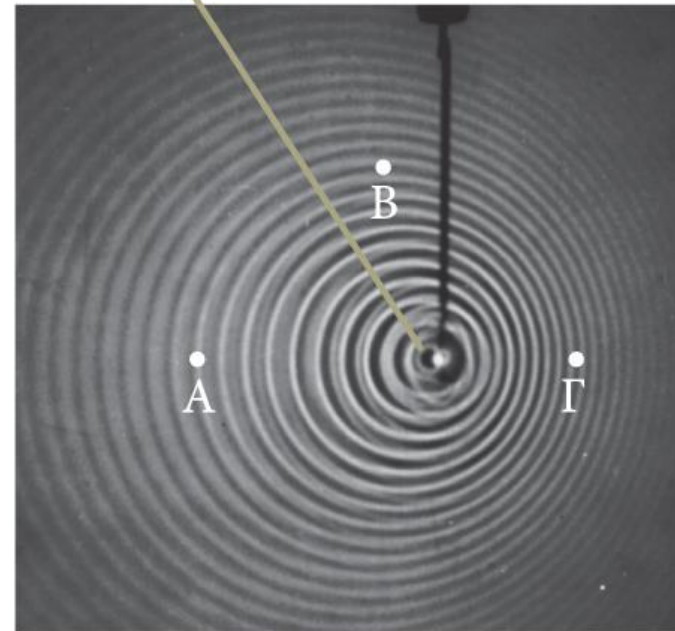
Το φαινόμενο Doppler, υδάτινα κύματα

Μια σημειακή πηγή κινείται προς τα δεξιά.

Η απόσταση μεταξύ των μετώπων του κύματος είναι μικρότερη στη δεξιά πλευρά.

Η απόσταση μεταξύ των μετώπων του κύματος είναι μεγαλύτερη στην αριστερή πλευρά.

Μια σημειακή πηγή κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα μέτρου v_s .



β

Το φαινόμενο Doppler – Παράδειγμα με υποβρύχια

Το υποβρύχιο Α (πηγή) κινείται με ταχύτητα μέτρου 8.00 m/s εκπέμποντας ένα κύμα σόναρ με συχνότητα 1400 Hz .

Η ταχύτητα του ήχου στο νερό είναι 1533 m/s .

Το υποβρύχιο Β (παρατηρητής) κινείται με ταχύτητα μέτρου 9.00 m/s .

Ποια είναι η φαινόμενη συχνότητα του ήχου που ακούει ο παρατηρητής, καθώς τα υποβρύχια πλησιάζουν μεταξύ τους; Ποια είναι η συχνότητα του ήχου που ακούει στη συνέχεια, καθώς τα υποβρύχια απομακρύνονται το ένα από το άλλο;

Το φαινόμενο Doppler – Παράδειγμα με υποβρύχια (συνέχεια)

Τα υποβρύχια πλησιάζουν μεταξύ τους:

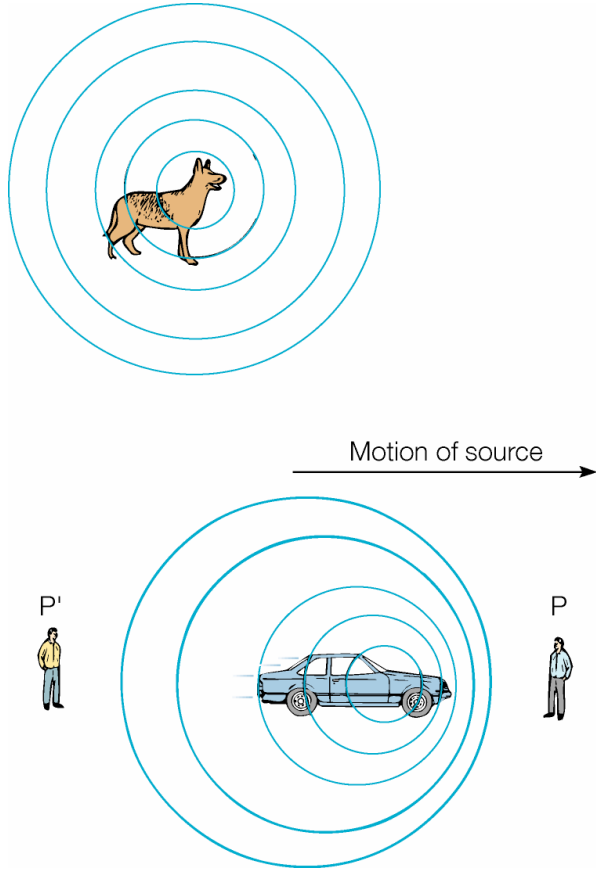
$$f' = \left(\frac{v + v_o}{v - v_s} \right) f = \left(\frac{1533 \text{ m/s} + (+9.00 \text{ m/s})}{1533 \text{ m/s} - (+8.00 \text{ m/s})} \right) (1400 \text{ Hz})$$
$$= 1416 \text{ Hz}$$

Τα υποβρύχια απομακρύνονται το ένα από το άλλο:

$$f' = \left(\frac{v + v_o}{v - v_s} \right) f = \left(\frac{1533 \text{ m/s} + (-9.00 \text{ m/s})}{1533 \text{ m/s} - (-8.00 \text{ m/s})} \right) (1400 \text{ Hz})$$
$$= 1385 \text{ Hz}$$



• Ήχοι από κινούμενες πηγές



- Φαινόμενο Doppler
- Η μορφή του κύματος αλλάζει καθώς κινείται η πηγή ή ο παρατηρητής
- Πλησιάζοντας – μετατοπίζεται προς υψηλότερες συχνότητες
- Απομακρύνοντας – μετατοπίζεται προς χαμηλότερες συχνότητες

$$\Delta f = \frac{\Delta v}{u_s} f_0 \quad (\text{Ισχύει για } \Delta v \ll u_s)$$

$\Delta v \rightarrow$ σχετική ταχύτητα πηγής - παρατηρητή

$u_s \rightarrow$ ταχύτητα του ήχου στο μέσο διάδοσης

Κρουστικά κύματα και αριθμός Mach

Η ταχύτητα της πηγής μπορεί να ξεπεράσει την ταχύτητα του κύματος.

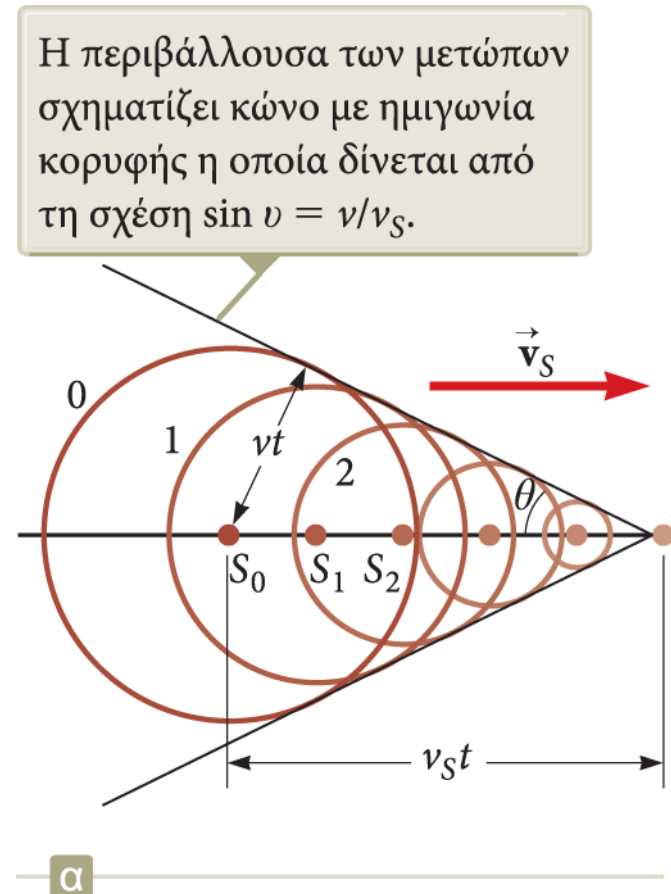
Η περιβάλλουσα αυτών των μετώπων είναι ένας κώνος, με ημιγωνία κορυφής που δίνεται από τη σχέση $\sin \theta = v/v_s$.

- Ονομάζεται *γωνία Mach*.

Ο λόγος v/v_s ονομάζεται *αριθμός Mach*.

Η γωνία Mach συνδέεται με τον αριθμό Mach μέσω της σχέσης

$$\sin \theta = \frac{v_s t}{vt} = \frac{v_s}{v}$$



Κρουστικά κύματα (τελική διαφάνεια)

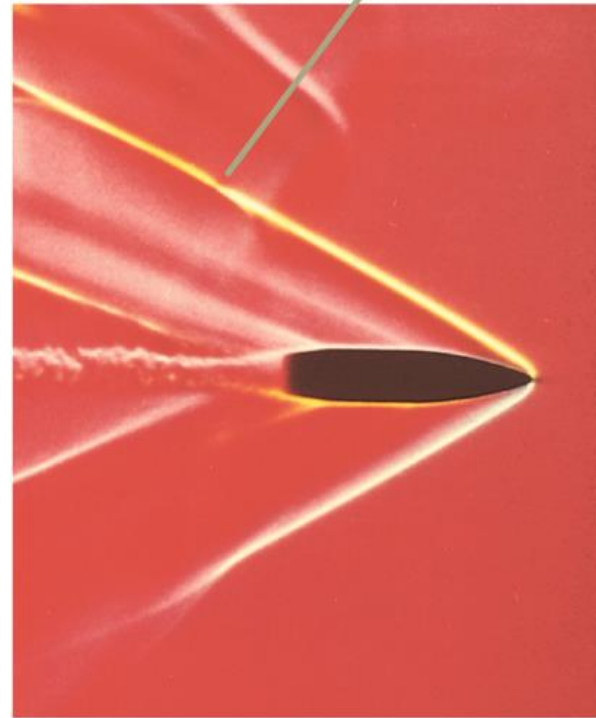
Το κωνικό μέτωπο κύματος που παράγεται όταν $v_s > v$ είναι γνωστό ως κρουστικό κύμα.

- Η παραπάνω ταχύτητα είναι υπερηχητική.

Το κρουστικό κύμα μεταφέρει μεγάλη ποσότητα ενέργειας. Η ενέργεια αυτή είναι συγκεντρωμένη στην επιφάνεια του κώνου.

Επίσης, παρατηρούνται αντίστοιχα μεγάλες μεταβολές της πίεσης.

Παρατηρήστε το κρουστικό κύμα κοντά στη σφαίρα.



β



🌸 Θόρυβος

Τι είναι ο θόρυβος?? Ένας ακανόνιστος ήχος που περιέχει πολλές διαφορετικές συχνότητες. Δεν έχει χαρακτηριστική περίοδο και η κυματομορφή δεν επαναλαμβάνεται στον χρόνο..

Οι επιδράσεις του θορύβου στον οργανισμό μπορούν να ταξινομηθούν:

- 🧠 σε επιδράσεις στο αισθητήριο όργανο της ακοής
- ❤️ στις «μη ακουστικές επιδράσεις» που αφορούν κυρίως το νευρικό σύστημα και τις ψυχικές λειτουργίες, το κυκλοφορικό, το γαστροεντερικό, το ενδοκρινικό και άλλα συστήματα του ανθρώπινου οργανισμού

$$\text{Ένταση} = \frac{\text{Ενέργεια}}{\text{Χρόνος} * \text{Επιφάνεια}} = \frac{\text{Ισχύς}}{\text{Επιφάνεια}}$$

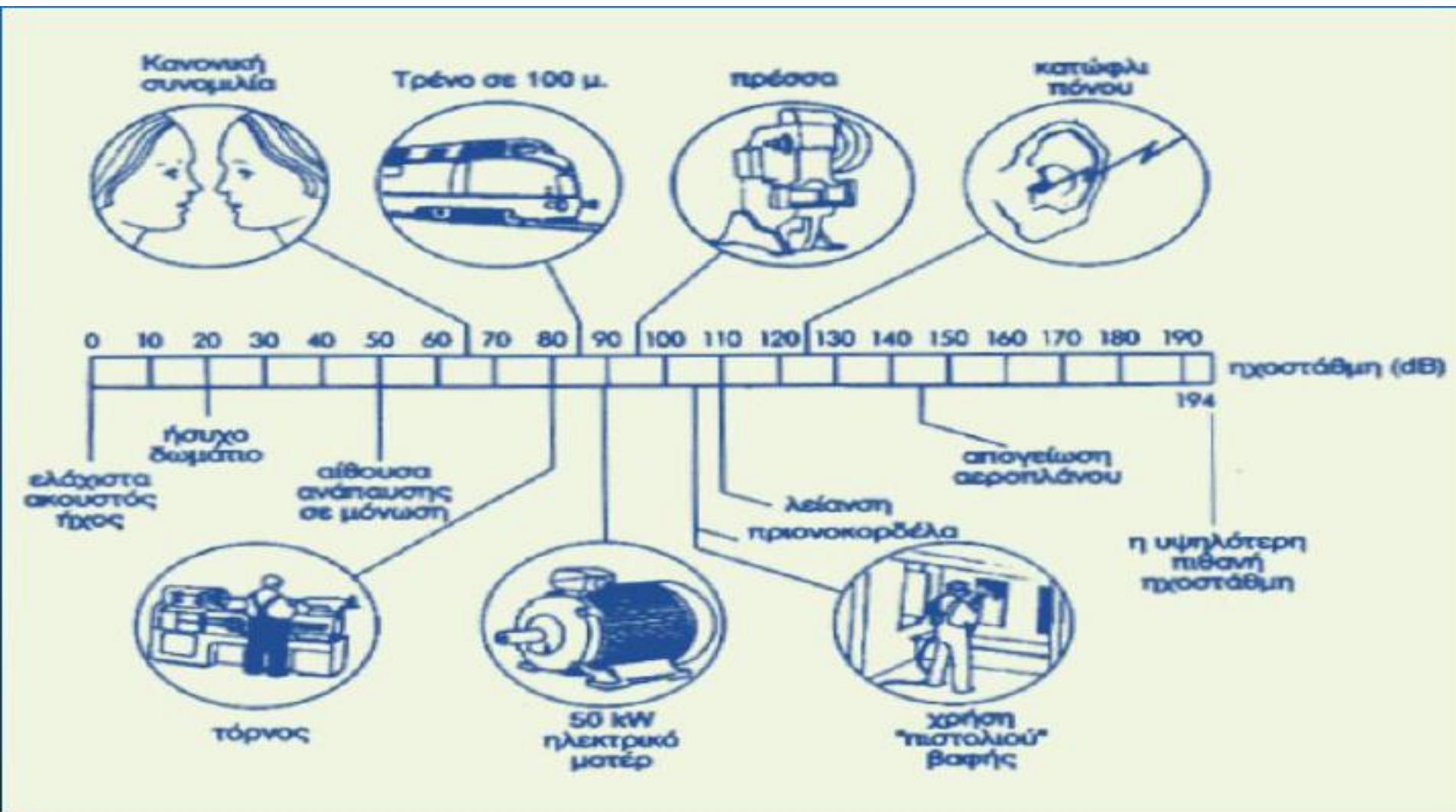
$$N_{\text{dB}} = 10 \log (I/I_0)$$

$$I/I_0 = 10^{0.1 N \text{ dB}}$$

$$I_0 = 1.0 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2$$



Καθημερινές εμπειρίες θορύβων και οι αντίστοιχες εντάσεις σε μονάδες dB



Χαρακτηριστικά του ήχου

- Αντικειμενικά χαρακτηριστικά
 - Συχνότητα
 - Ένταση
- Υποκειμενικά χαρακτηριστικά
 - Ακουστικότητα
 - Ύψος
 - Χροιά



Υποκειμενικά χαρακτηριστικά του ήχου

Ύψος: Ένα υποκειμενικό χαρακτηριστικό είναι το ύψος το οποίο συνδέεται άμεσα με τη **συχνότητα του ήχου**. Η σχέση αυτή διακρίνει τους ήχους σε δύο μορφές, πρώτον σε **οξείς** με μεγάλη συχνότητα, όπως τους ήχους ενός βιολιού και κατά δεύτερον σε **βαρείς** με μικρή συχνότητα, όπως τους ήχους που παράγει το μπάσο τύμπανο. Και στις δύο περιπτώσεις **η συχνότητα εξαρτάται από το πάχος και το μήκος της χορδής**, με αποτέλεσμα όσο πιο μεγάλη σε μήκος και διάμετρο είναι η χορδή, τόσο μικρότερη συχνότητα παράγεται, ενώ όσο πιο πολύ μειώνεται το πάχος και το μήκος περισσότερο αυξάνεται η συχνότητα.

Ακουστότητα: Η ακουστότητα αποτελεί ένα από τα πιο υποκειμενικά γνωρίσματα του ήχου τα οποία κάθε ακροατής αντιλαμβάνεται με διαφορετικό τρόπο. Ήχος με ίδια ένταση θα έχει μικρότερη ακουστότητα για ένα άτομο με προβληματική ακοή. Με επακόλουθο η ακουστότητα να έχει σχέση με την **ένταση του ήχου**. Σε σχέση με την ακουστότητα οι ήχοι διακρίνονται σε **ασθενείς με ισχυρούς**, ενώ μονάδα μέτρησης της είναι το **Phon**, δηλαδή ήχος μόλις ακούγεται έχει ακουστότητα 1 Phon ενώ με ακουστότητα 130 Phon προκαλεί πόνο στο αυτί.

Χροιά: Ως τρίτο βασικό υποκειμενικό γνώρισμα είναι η χροιά, χάρη στην οποία ο ήχος ξεχωρίζει ακόμη και αν τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά του είναι τα ίδια. Η χροιά αναφέρεται στους σύνθετους ήχους και εξαρτάται από τους απλούς ήχους που αποτελούν το σύνθετο. Κάθε περιοδικός ήχος μπορεί να αναλυθεί σε ένα άθροισμα συνημιτονικών συναρτήσεων με διάφορα πλάτη και φάσεις και με συχνότητες ακέραια πολλαπλάσιες μιας θεμελιώδους συχνότητας. Οι συχνότητες αυτές αποκαλούνται **αρμονικές** και το πλήθος και το σχετικό τους πλάτος είναι σε μεγάλο βαθμό υπεύθυνα για το υποκειμενικό αίσθημα της χροιάς ενός ήχου. Σε αρκετές περιπτώσεις η αρμονική συχνότητα και το μεγαλύτερο πλάτος καθορίζει και το ύψος του ήχου.



🧠 Η ευαισθησία των ωτών – ακουστότητα (1)

Ακουστότητα ονομάζεται το υποκειμενικό αίσθημα που προκαλεί ένας ήχος σε σχέση με το φυσικό μέγεθος που λέγεται **ένταση**. Η ακουστότητα του ήχου εξαρτάται επίσης από τη **συχνότητά** του.

Το πόσο «έντονα» αντιλαμβανόμαστε έναν ήχο δεδομένης συχνότητας, η ακουστότητα όπως λέγεται, συνδέεται με την ένταση του ηχητικού κύματος σύμφωνα με το **νόμο των Weber – Fechner**.

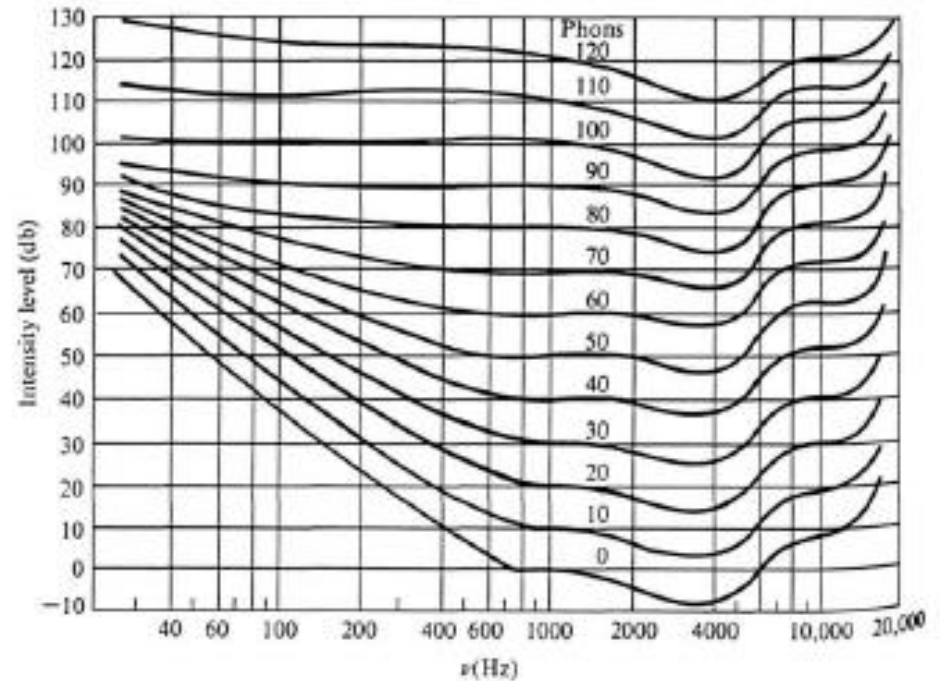
Πρόκειται για έναν **ψυχοφυσικό νόμο** που συνδέει γενικά οποιαδήποτε υποκειμενική αντίληψη με την αντίστοιχη ένταση του ερεθίσματος που την προκαλεί.

$$I(\text{dB}) = 10 \log_{10} \left[\frac{I}{I_0} \right] \quad \text{Intensity in decibels}$$

•The threshold of hearing

$$I_0 = 1.0 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2;$$

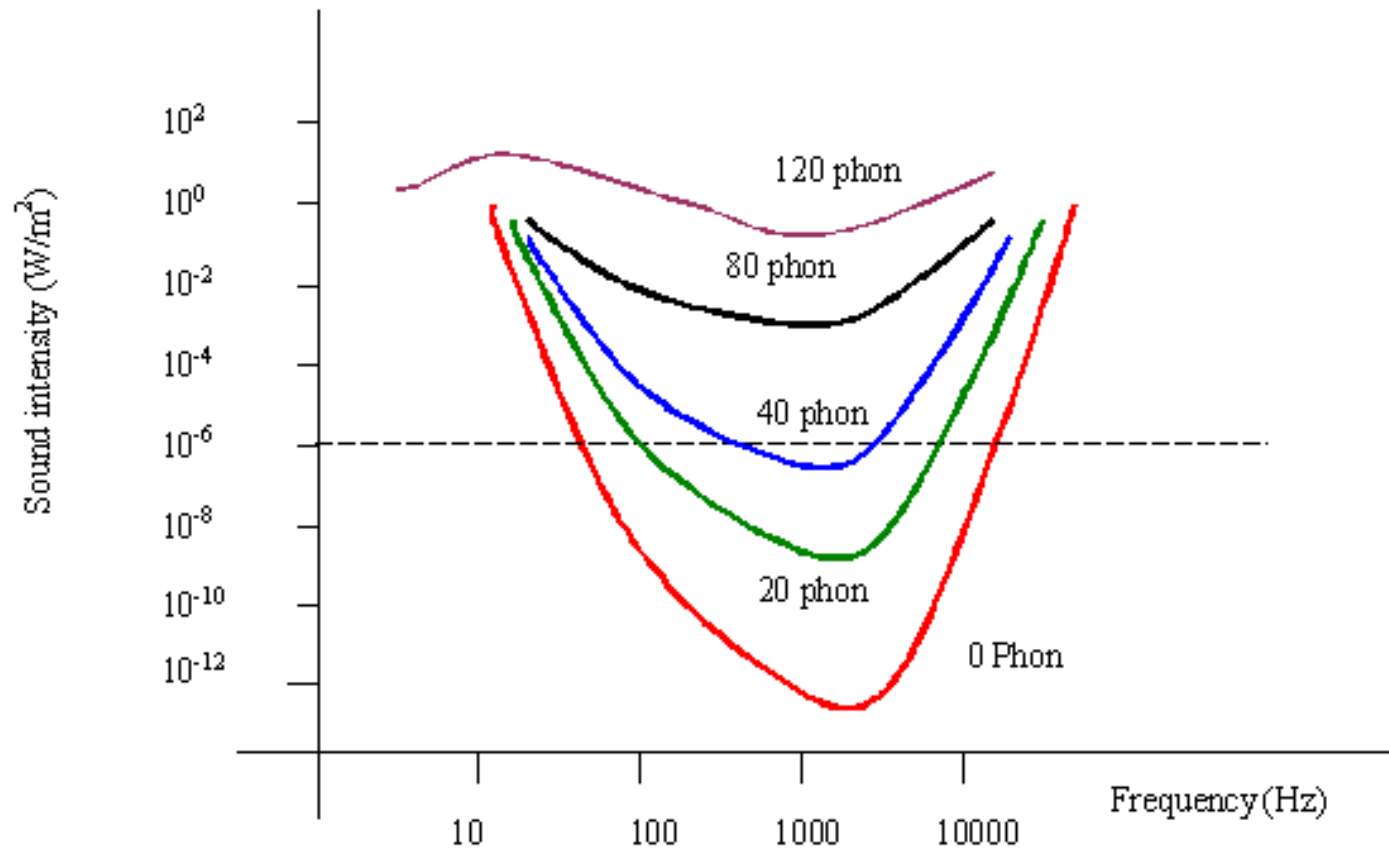
$$1 [\text{phon}] \equiv 1 [\text{db}] \quad \text{at } f = 1000 [\text{Hz}]$$



The solid lines indicate the isophones, curves of constant loudness as a function of intensity and frequency. All sounds along the isophone appear equally loud to the listener. The lowest isophone represents the hearing threshold.



🧠 Η ευαισθησία των ωτών – ακουστότητα (2)



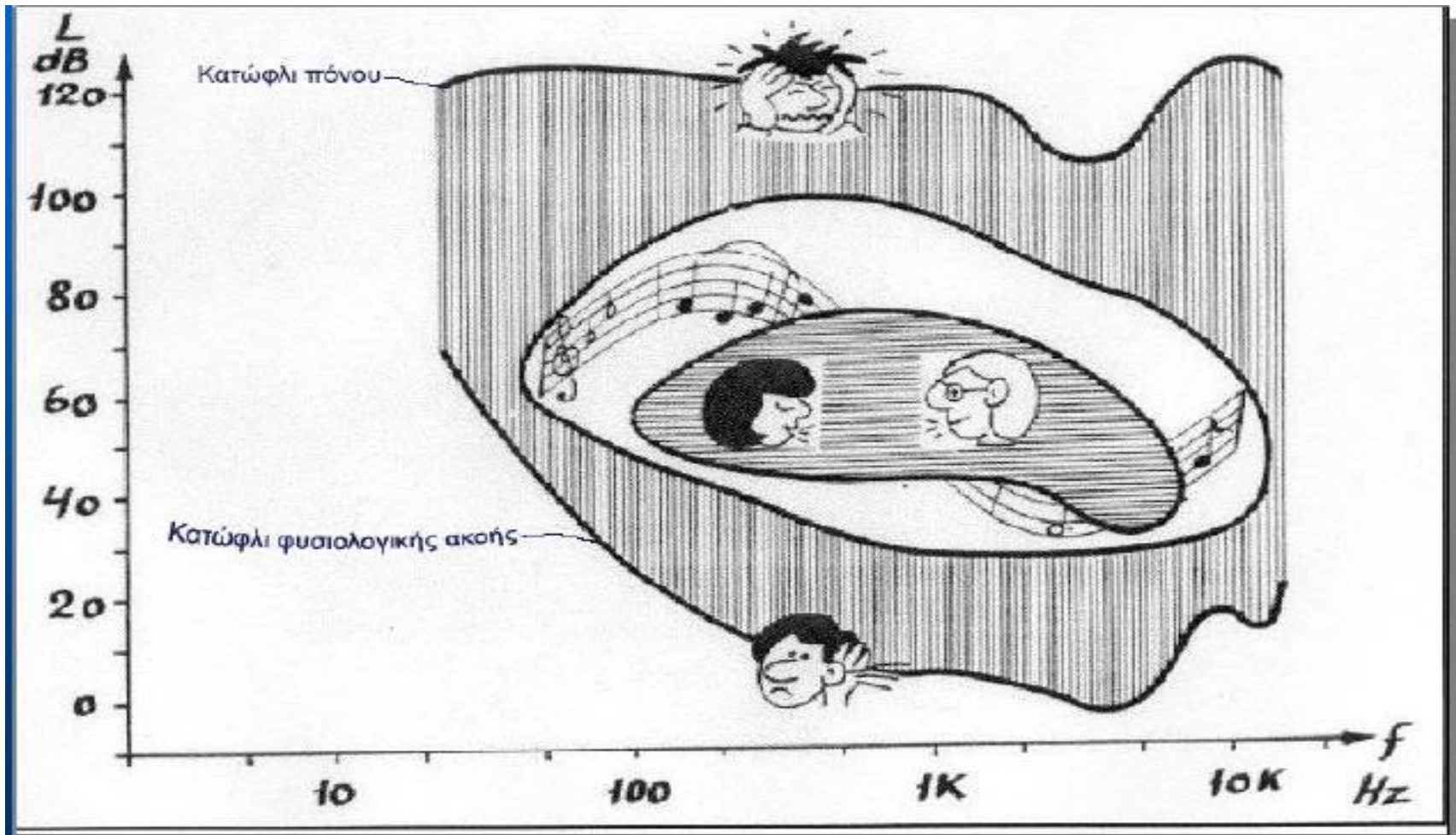
Intensity Response (Loudness)

Η ακουστότητα ενός ήχου εξαρτάται όχι μόνο από την ένταση, αλλά και από τα χαρακτηριστικά μεταφοράς της ηχητικής ενέργειας στο αυτί. Η γραφική παράσταση δείχνει πώς το αυτί αποκρίνεται σε ήχους ίσης ακουστότητας, αλλά διαφορετικών συχνοτήτων.

Το σημείο-κλειδί είναι ότι η αντίληψη για τις μεταβολές στην ακουστότητα δεν αντιστοιχεί άμεσα στην μεταβολή της έντασης, αλλά υπάρχει συσχέτιση και με τη συχνότητα. **Μικρές μεταβολές στην ένταση μπορούν να ανιχνευθούν σε 3000 Hz, αλλά όχι σε 100 Hz.** Η μέτρηση της απόκρισης στις συχνότητες στο αυτί είναι πολύ υποκειμενική.

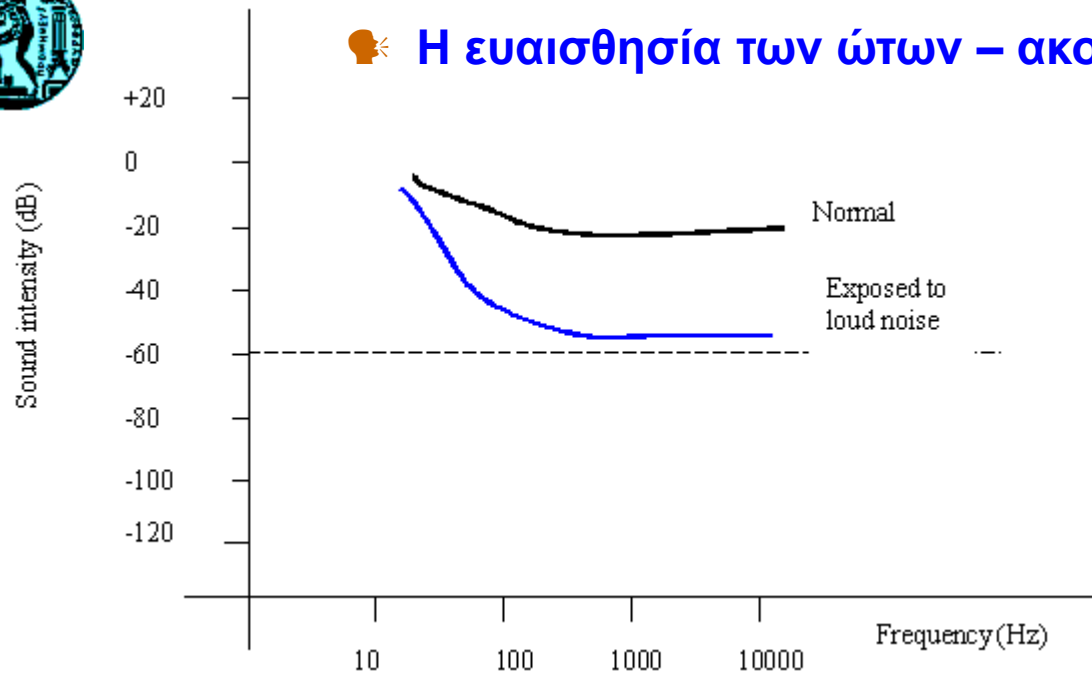


Διάγραμμα ακουστικότητας



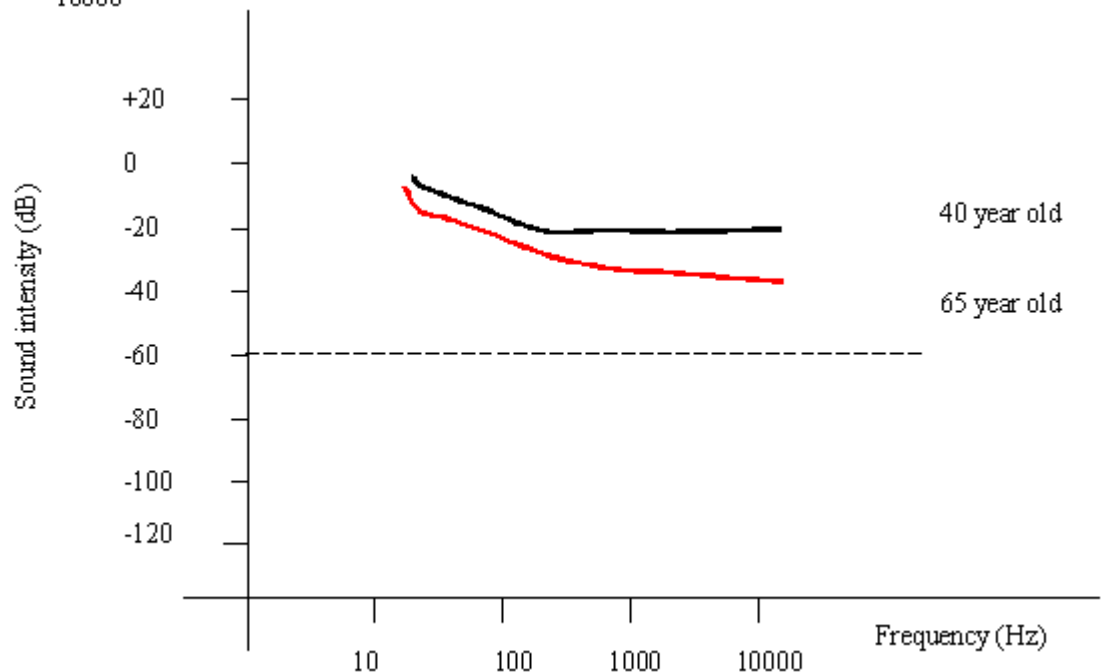


👂 Η ευαισθησία των ωτών – ακουστότητα (3)



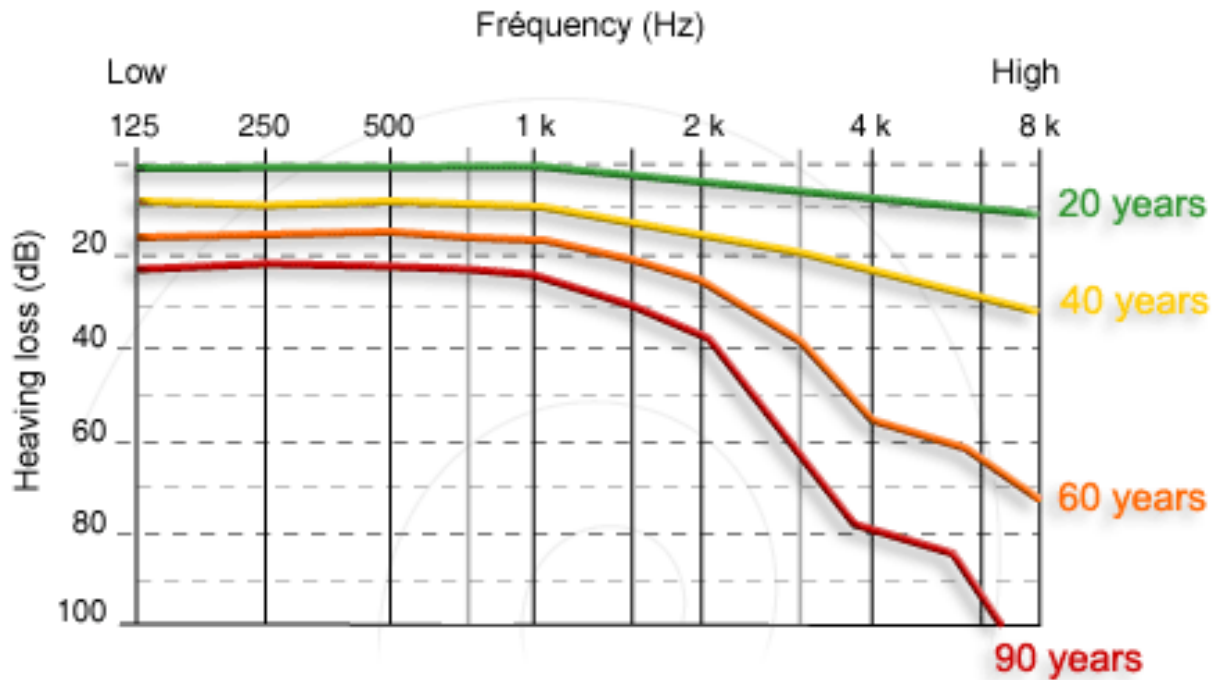
Το γράφημα δείχνει την ακουστότητα ενός φυσιολογικού ατόμου 40 χρόνων και ενός που έχει εκτεθεί σε περιβάλλον μεγάλου θορύβου.

Η ηλικία επίσης οδηγεί σε απώλεια της ακουστότητας. Το γράφημα δείχνει την απώλεια ακουστότητας ενός 65-χρονου σε σύγκριση με έναν 40-χρονο. Κανείς από τους δυο δεν έχει εκτεθεί σε παρατεταμένη περίοδο υπερβολικού θορύβου.





🔊 Η ευαισθησία των ωτών – ακουστότητα (4)



x-axis: pure tone frequency (kHz); **y-axis:** hearing loss in dB.

Age 20 (green curve): normal audiogram, with a non-significant loss in the very high frequencies (8 kHz). Age 40 (yellow): this high frequency loss is more obvious, but is not yet a handicap. Age 60 (orange): the hearing loss is becoming significant (>40dB) at 4 kHz. Age 90 (red), losses of > 40 dB are obvious in the middle frequencies (2 kHz), and hearing has significantly deteriorated.

Scientific concept: Jérôme Ruel, Jean-Luc Puel, Nuno Trigueiros Cunha Drawings: P. Minary, S. Blatrix

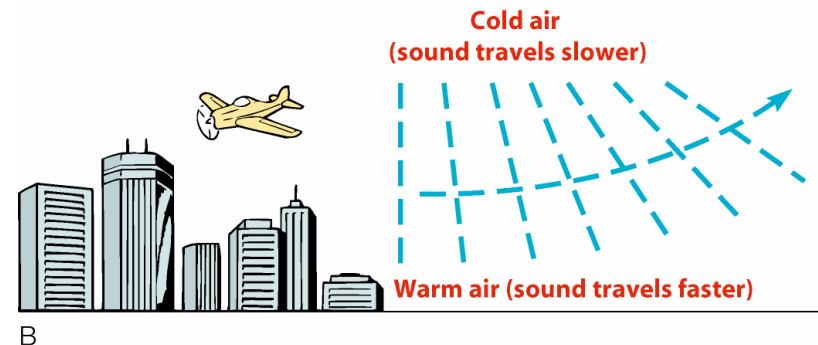
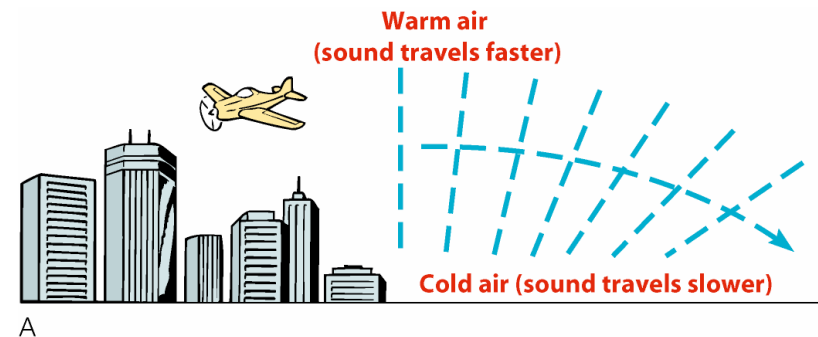


- Ο ήχος χρειάζεται μέσο για να διαδοθεί
- Η ταχύτητα διάδοσης εξαρτάται από
 - Την αδράνεια των μορίων του μέσου
 - Την ένταση αλληλεπίδρασης
 - Τη θερμοκρασία

Medium	m/s	ft/s
Air (0°C)	331	1087
Hydrogen (0°C)	1284	4213
Water (25°C)	1497	4911
Lead	1960	6430
Steel	5940	19488

Διάθλαση (Refraction)

- Παράδειγμα διάθλασης λόγω βαθμίδωσης της θερμοκρασίας του αέρα



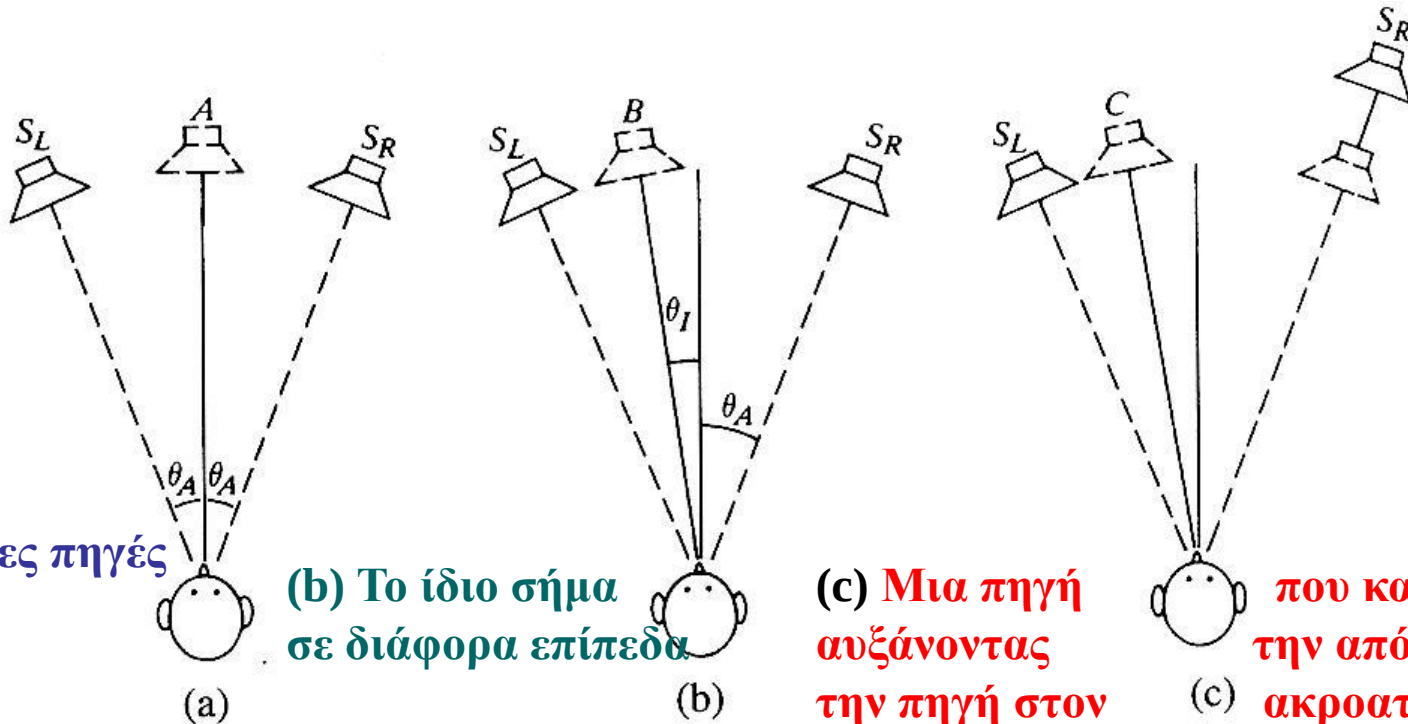


Συμβολή ακουστικών κυμάτων

Όταν συναντώνται δύο ή περισσότερα ακουστικά κύματα, δημιουργείται μια νέα πολύπλοκη ταλάντωση που τα χαρακτηριστικά της εξαρτώνται από τα χαρακτηριστικά των κυμάτων που συναντήθηκαν.

Για κάθε σημείο στο οποίο συμβάλουν δύο ή περισσότερα κύματα, ισχύει η αρχή της επαλληλίας, σύμφωνα με την οποία η συνολική διατάραξη $P(t)$ ισοδυναμεί με το αλγεβρικό άθροισμα των διαταράξεων που προκαλεί κάθε κύμα ξεχωριστά:

$$P(t) = P_1(t) + P_2(t) + \dots P_i(t)$$



(a) Όμοιες πηγές

(b) Το ίδιο σήμα
σε διάφορα επίπεδα

(c) Μια πηγή
αυξάνοντας
την πηγή στον

που καθυστερεί
την απόσταση από
ακροατή

Υπέρθεση ημιτονοειδών κυμάτων

Υποθέτουμε ότι δύο κύματα διαδίδονται προς την ίδια κατεύθυνση σε ένα γραμμικό μέσο, και έχουν ίδια συχνότητα, μήκος, και πλάτος.

Μόνο η φάση τους είναι διαφορετική:

- $y_1 = A \sin(kx - \omega t)$
- $y_2 = A \sin(kx - \omega t + \phi)$
- $y = y_1 + y_2 = 2A \cos(\phi/2) \sin(kx - \omega t + \phi/2)$

Η συνισταμένη κυματοσυνάρτηση y είναι επίσης ημιτονοειδής.

Το συνιστάμενο κύμα έχει ίδια συχνότητα και μήκος κύματος με τα αρχικά κύματα.

Το πλάτος του συνισταμένου κύματος είναι $2A \cos(\phi/2)$.

Η φάση του συνισταμένου κύματος είναι $\phi/2$.

Ενισχυτική συμβολή ημιτονοειδών κυμάτων

Όταν $\phi = 0$, τότε $\cos(\phi/2) = 1$.

Το πλάτος του συνισταμένου κύματος είναι $2A$.

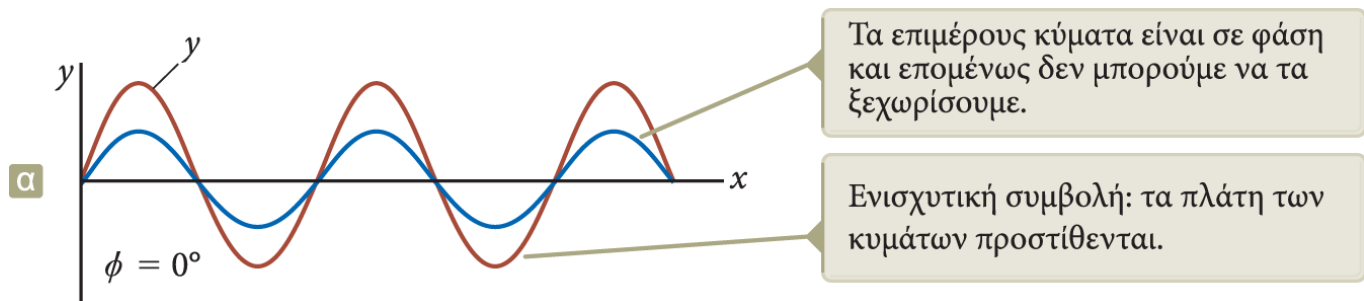
- Οι κορυφές των δύο κυμάτων αντιστοιχούν στα ίδια σημεία του χώρου.

Τα κύματα βρίσκονται παντού σε φάση.

Τα κύματα συμβάλλουν ενισχυτικά.

Γενικά, ενισχυτική συμβολή παρατηρείται όταν $\cos(\phi/2) = \pm 1$.

- Δηλαδή, όταν $\phi = 0, \pi, 2\pi, \dots \text{ rad}$.
 - Η γωνία ϕ είναι άρτιο πολλαπλάσιο του π .



Καταστρεπτική συμβολή ημιτονοειδών κυμάτων

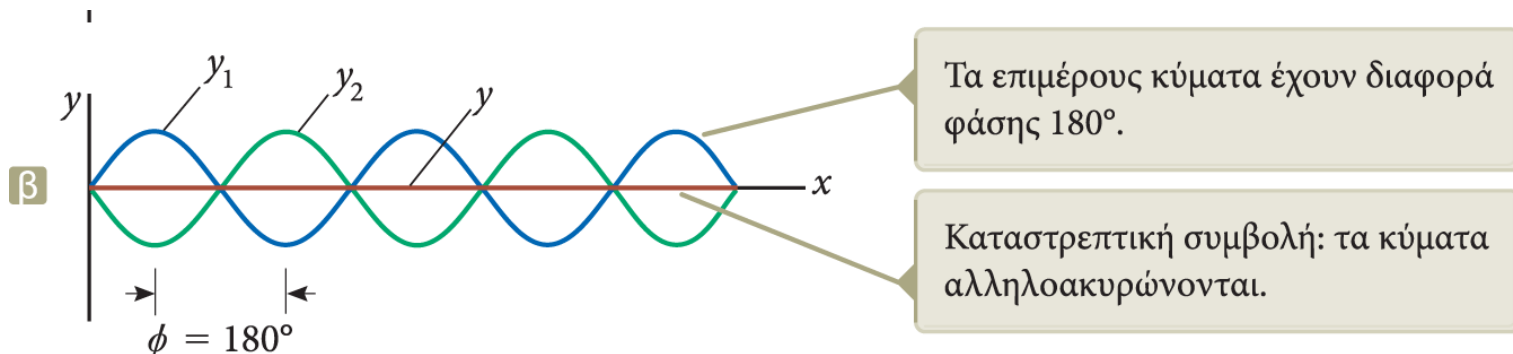
Όταν $\phi = \pi$, τότε $\cos(\phi/2) = 0$.

- Το ίδιο ισχύει όταν η γωνία ισούται με οποιοδήποτε περιττό πολλαπλάσιο του π .

Το συνιστάμενο κύμα έχει μηδενικό πλάτος.

- Δείτε την καφέ ευθεία στην εικόνα.

Τα κύματα συμβάλλουν καταστρεπτικά.

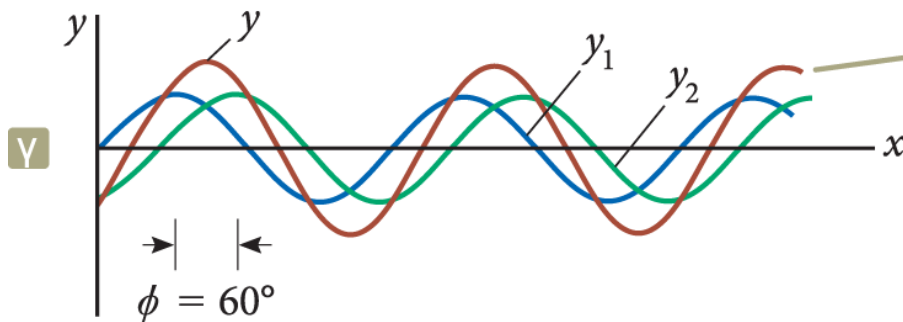


Ημιτονοειδή κύματα, γενική συμβολή

Όταν η γωνία ϕ δεν είναι μηδενική ή ισούται με κάποιο ακέραιο πολλαπλάσιο του π , το συνιστάμενο κύμα έχει πλάτος μεταξύ 0 και $2A$.

Και σε αυτή την περίπτωση, οι κυματοσυναρτήσεις αθροίζονται.

Η συμβολή δεν είναι ούτε ενισχυτική ούτε καταστρεπτική.



Η ενδιάμεση αυτή συμβολή δεν είναι ούτε ενισχυτική ούτε καταστρεπτική.

Συμβολή ημιτονοειδών κυμάτων – Σύνοψη

Ενισχυτική συμβολή παρατηρείται όταν $\phi = n\pi$, όπου το n είναι άρτιος ακέραιος (συμπεριλαμβανομένου του 0).

- Το πλάτος του συνισταμένου κύματος είναι $2A$.

Καταστρεπτική συμβολή παρατηρείται όταν $\phi = n\pi$, όπου το n είναι περιττός ακέραιος.

- Το πλάτος είναι 0.

Η γενική συμβολή παρατηρείται όταν $0 < \phi < n\pi$.

- Για το πλάτος του συνισταμένου κύματος ισχύει $0 < A_{\text{συν.}} < 2A$

Συμβολή ημιτονοειδών κυμάτων με διαφορετικό πλάτος

Ενισχυτική συμβολή παρατηρείται όταν $\phi = n\pi$, όπου το n είναι άρτιος ακέραιος (συμπεριλαμβανομένου του 0).

- Το πλάτος του συνισταμένου κύματος είναι ίσο με το άθροισμα του πλάτους των κυμάτων.

Η καταστρεπτική συμβολή παρατηρείται όταν $\phi = n\pi$, όπου το n είναι περιττός ακέραιος.

- Το πλάτος του συνισταμένου κύματος είναι μικρότερο, αλλά τα κύματα δεν αλληλοαναιρούνται πλήρως.

Συμβολή ηχητικών κυμάτων

Ο ήχος ενός ηχείου S μπορεί να φτάσει στον δέκτη R μέσω δύο διαφορετικών διαδρομών.

Η απόσταση του δέκτη από το ηχείο κατά μήκος οποιαδήποτε διαδρομής ονομάζεται **μήκος διαδρομής r** .

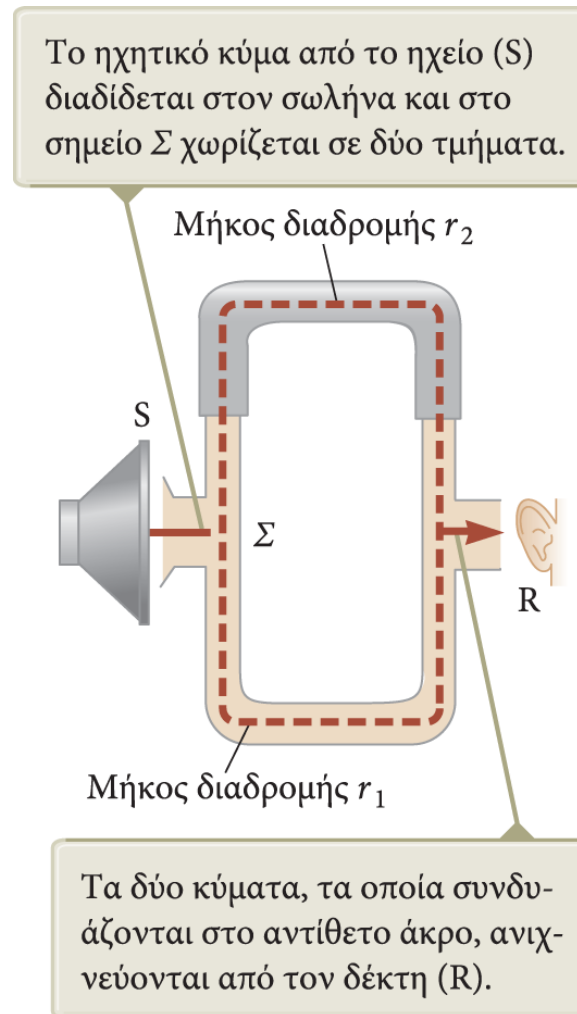
Το μήκος r_1 της κάτω διαδρομής είναι σταθερό.

Το μήκος r_2 της άνω διαδρομής μπορεί να μεταβληθεί.

Όταν $\Delta r = |r_2 - r_1| = n\lambda$, παρατηρείται ενισχυτική συμβολή.

- $n = 0, 1, \dots$

Ο δέκτης θα καταγράψει μέγιστη ένταση του ήχου.



Συμβολή ηχητικών κυμάτων (2)

Όταν $\Delta r = |r_2 - r_1| = (n\lambda)/2$ (για περιττές τιμές του n), συμβαίνει καταστρεπτική συμβολή.

Ο δέκτης δεν ανιχνεύει ήχο.

Όταν δύο κύματα από την ίδια πηγή ακολουθούν διαδρομές διαφορετικού μήκους, μπορεί να αποκτήσουν διαφορά φάσης.

Στάσιμα κύματα

Υποθέτουμε ότι δύο κύματα με ίδιο πλάτος, συχνότητα, και μήκος διαδίδονται στο ίδιο μέσο προς αντίθετες κατευθύνσεις.

Τα κύματα συνδυάζονται σύμφωνα με το *μοντέλο της συμβολής κυμάτων*.

$$y_1 = A \sin(kx - \omega t) \text{ και}$$

$$y_2 = A \sin(kx + \omega t)$$

Συμβάλλουν σύμφωνα με την αρχή της υπέρθεσης.



Στάσιμα κύματα (συνέχεια)

Το συνιστάμενο κύμα είναι $y = (2A \sin kx) \cos \omega t$.

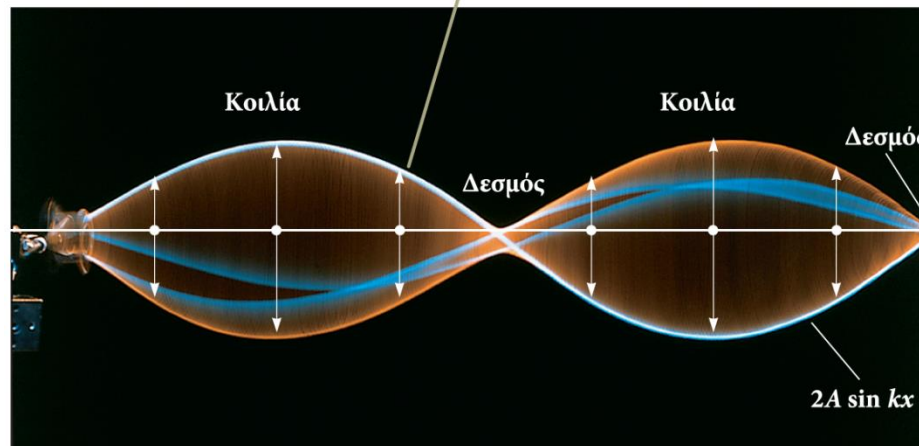
Αυτή η εξίσωση είναι η κυματοσυνάρτηση ενός στάσιμου κύματος.

- Δεν περιέχει κάποιον όρο $kx - \omega t$, οπότε δεν περιγράφει οδεύον κύμα.

Όταν παρατηρούμε ένα στάσιμο κύμα, δεν αντιλαμβανόμαστε καμία κίνηση στην κατεύθυνση διάδοσης κάποιου από τα αρχικά κύματα.

Παράδειγμα στάσιμου κύματος

Το πλάτος της κατακόρυφης ταλάντωσης οποιουδήποτε στοιχείου της χορδής εξαρτάται από την οριζόντια θέση του. Κάθε στοιχείο ταλαντώνεται μέσα στα όρια της περιβάλλουσας συνάρτησης $2A \sin kx$.



Προσέξτε το στάσιμο περίγραμμα που προκύπτει από την υπέρθεση δύο πανομοιότυπων κυμάτων που διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις.

Το πλάτος της απλής αρμονικής κίνησης κάθε στοιχείου είναι $2A \sin kx$.

- Εξαρτάται από τη θέση x του στοιχείου στο μέσο.

Κάθε στοιχείο εκτελεί ταλάντωση με κυκλική συχνότητα ω .

Σημείωση σχετικά με το πλάτος

Για να περιγράψουμε τα κύματα, χρησιμοποιούμε τρία είδη πλάτους.

- Το πλάτος των επιμέρους κυμάτων, A .
- Το πλάτος της απλής αρμονικής κίνησης των στοιχείων του μέσου διάδοσης.
 - Είναι ίσο με $2A \sin kx$.
 - Κάθε στοιχείο του στάσιμου κύματος ταλαντώνεται στο πλαίσιο της περιβάλλουσας συνάρτησης $2A \sin kx$.
- Το πλάτος του στάσιμου κύματος, $2A$

Στάσιμα κύματα, ορισμοί

Τα σημεία μηδενικού πλάτους ονομάζονται **δεσμοί** ή **κόμβοι**.

- Αντιστοιχούν σε τιμές του x που ικανοποιούν τη σχέση

$$x = \frac{n\lambda}{2} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Τα σημεία του μέσου στα οποία παρατηρείται μέγιστη μετατόπιση $2A$ ονομάζονται **κοιλίες** ή **αντιδεσμοί**.

- Αντιστοιχούν σε τιμές του x που ικανοποιούν τη σχέση

$$x = \frac{n\lambda}{4} \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

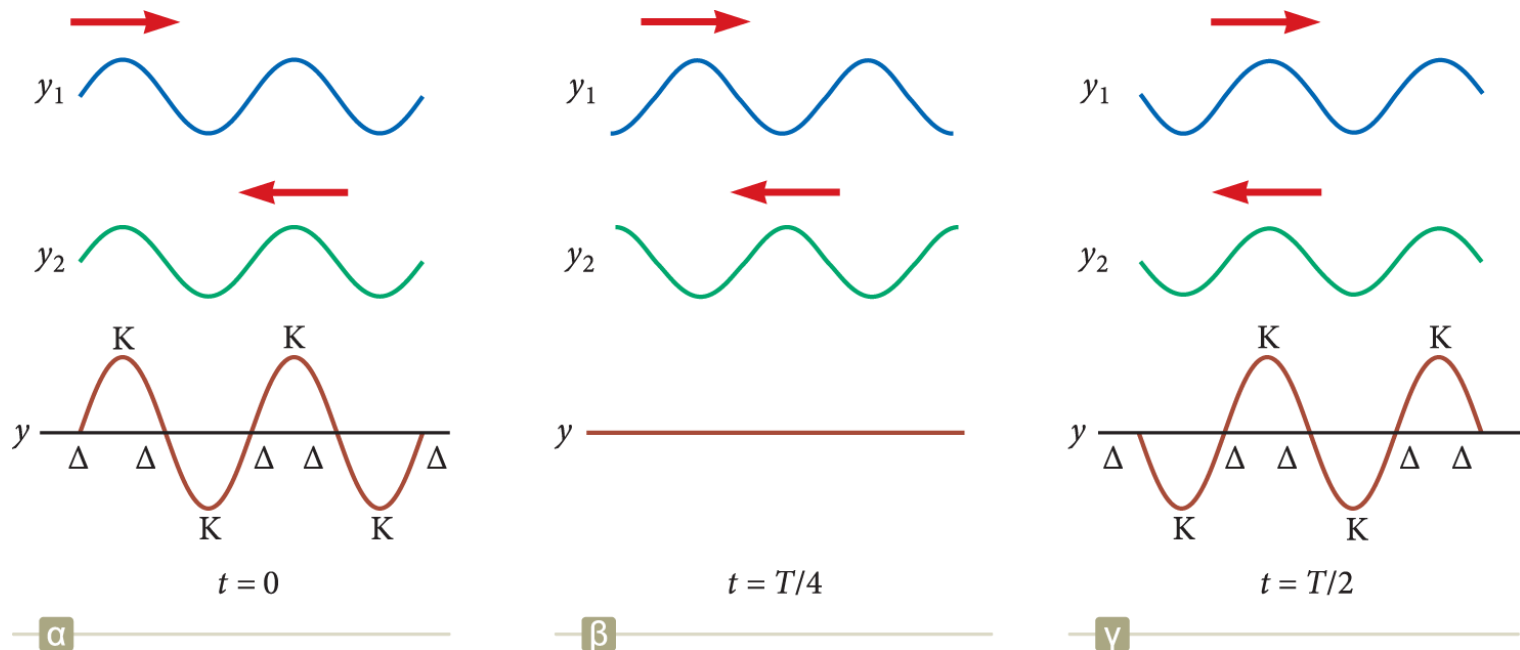
Χαρακτηριστικά των δεσμών και των κοιλιών

Η απόσταση μεταξύ διαδοχικών κοιλιών είναι ίση με $\lambda/2$.

Η απόσταση μεταξύ διαδοχικών δεσμών είναι ίση με $\lambda/2$.

Η απόσταση μεταξύ ενός δεσμού και της επόμενης κοιλίας είναι ίση με $\lambda/4$.

Δεσμοί και κοιλίες (συνέχεια)



Στα παραπάνω διαγράμματα απεικονίζονται τα στάσιμα κύματα που δημιουργούν σε διάφορες χρονικές στιγμές δύο κύματα ίδιου πλάτους, τα οποία διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις.

Σε ένα στάσιμο κύμα, τα στοιχεία του μέσου εναλλάσσονται μεταξύ των ακραίων θέσεων που φαίνονται στα διαγράμματα (α) και (γ).

Δημιουργία στάσιμων κυμάτων σε χορδές

Ας θεωρήσουμε μια χορδή (ή ένα νήμα), η οποία είναι στερεωμένη στα δύο άκρα της.

Η χορδή έχει μήκος L .

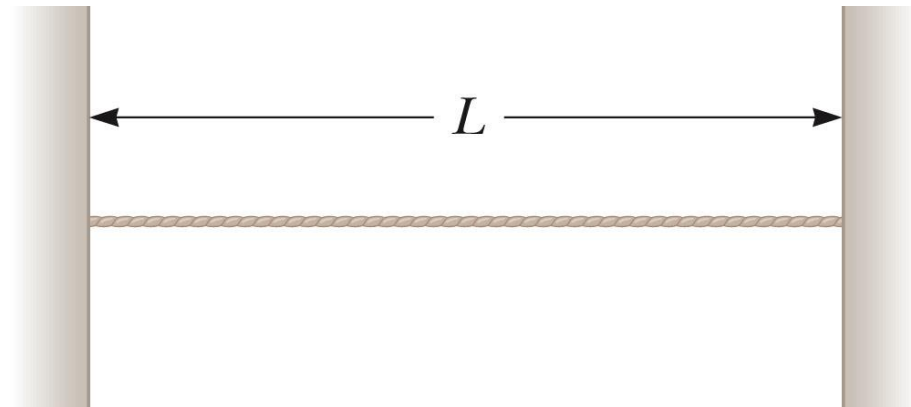
Τα κύματα διαδίδονται μέσω της χορδής και προς τις δύο κατευθύνσεις.

Επομένως, η συνεχής υπέρθεση των κυμάτων που προσπίπτουν και ανακλώνται στα άκρα δημιουργεί στάσιμα κύματα στη χορδή.

Τα κύματα που δημιουργούνται όμως υπόκεινται σε μια οριακή συνθήκη.

Τα άκρα της χορδής είναι υποχρεωτικά δεσμοί.

- Τα άκρα είναι ακίνητα, οπότε η μετατόπισή τους πρέπει να είναι μηδενική.



Δημιουργία στάσιμων κυμάτων σε χορδές (2)

Λόγω αυτής της οριακής συνθήκης, η χορδή έχει πεπερασμένο πλήθος φυσικών κυματομορφών, οι οποίες ονομάζονται **κανονικοί τρόποι ταλάντωσης** ή **ιδιομορφές**.

- Κάθε κανονικός τρόπος ταλάντωσης έχει μία χαρακτηριστική συχνότητα.
 - Η κατάσταση κατά την οποία υπάρχουν μόνο ορισμένες συχνότητες ταλάντωσης ονομάζεται **κβάντωση**.
- Μπορούμε να περιγράψουμε τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης μιας χορδής επιβάλλοντας τις οριακές συνθήκες ότι τα άκρα πρέπει να είναι δεσμοί, και ότι οι δεσμοί και οι κοιλίες πρέπει να απέχουν απόσταση ίση με το ένα τέταρτο του μήκους κύματος μεταξύ τους.

Θα ορίσουμε το μοντέλο ανάλυσης των **κυμάτων που υπόκεινται σε οριακές συνθήκες**.

Δημιουργία στάσιμων κυμάτων σε χορδές (3)

Αυτός είναι ο πρώτος κανονικός τρόπος ταλάντωσης που ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες.

Στα δύο άκρα της χορδής υπάρχουν δεσμοί.

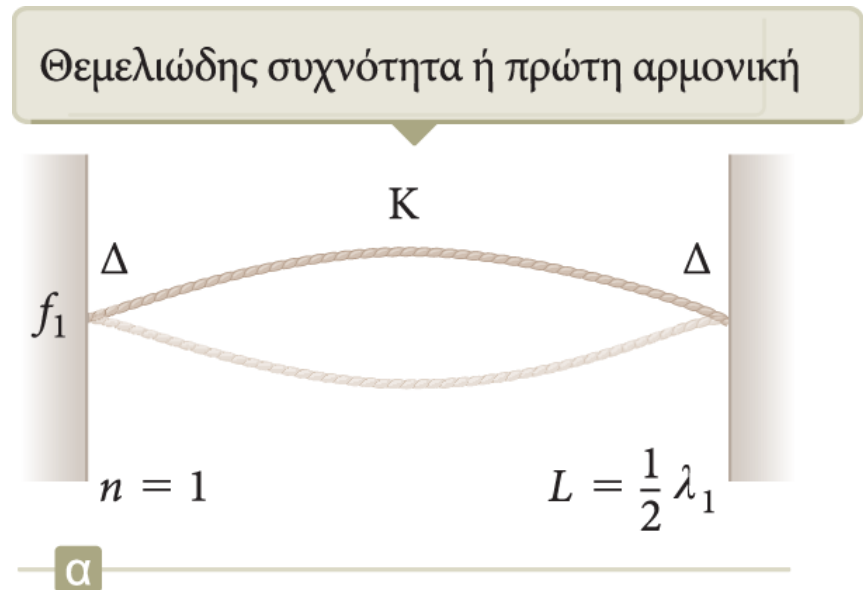
Στο μέσο της χορδής υπάρχει μία κοιλία.

Ο συγκεκριμένος κανονικός τρόπος ταλάντωσης έχει το μέγιστο μήκος κύματος:

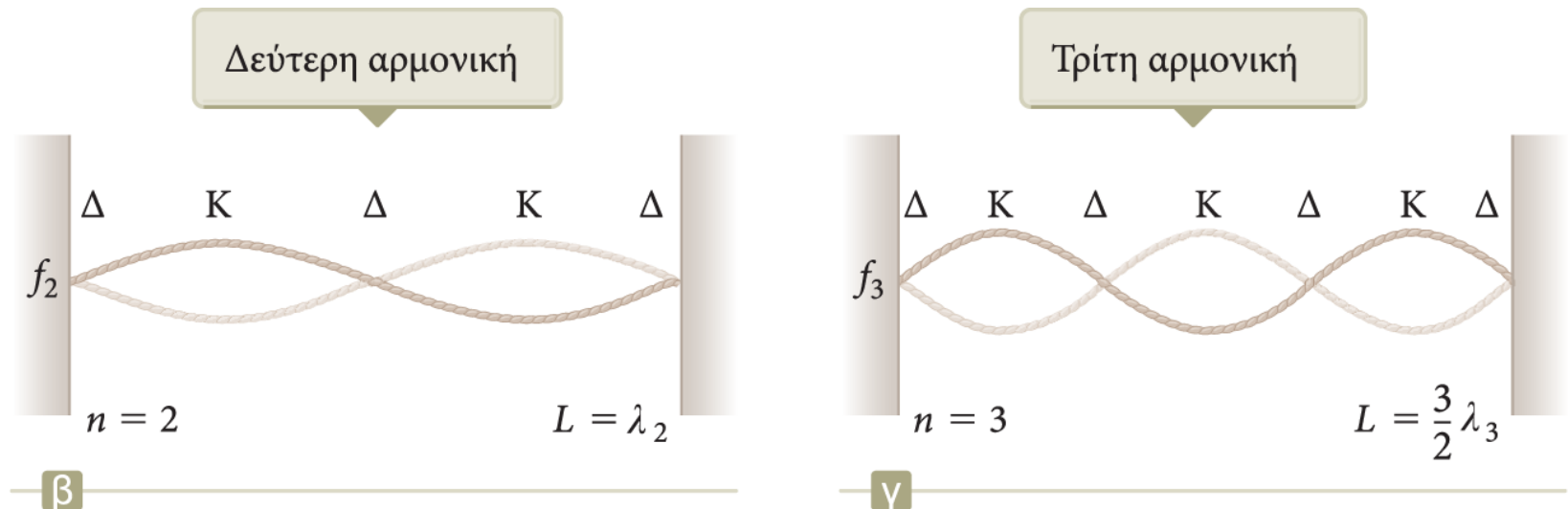
- $\frac{1}{2}\lambda_1 = L$ άρα $\lambda_1 = 2L$

Το τμήμα του στάσιμου κύματος μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών ονομάζεται βρόχος.

Στον πρώτο κανονικό τρόπο ταλάντωσης, η χορδή σχηματίζει έναν βρόχο καθώς ταλαντώνεται.



Δημιουργία στάσιμων κυμάτων σε χορδές (4)



Κάθε επόμενος κανονικός τρόπος ταλάντωσης έχει έναν επιπλέον βρόχο από τον προηγούμενο.

- Το τμήμα του στάσιμου κύματος μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών ονομάζεται *βρόχος*.

Ο δεύτερος κανονικός τρόπος ταλάντωσης (β) αντιστοιχεί στην περίπτωση $\lambda = L$.

Ο τρίτος κανονικός τρόπος ταλάντωσης (γ) αντιστοιχεί στην περίπτωση $\lambda = 2L/3$.

Δημιουργία στάσιμων κυμάτων σε χορδές (5)

Γενικά, το πλάτος στα άκρα της χορδής θα πρέπει να είναι ίσο με μηδέν

Άρα

$$\sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = m\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} L = m\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{m}$$

όπου m ακέραιος.

Άρα τα μήκη κύματος και επομένως και οι συχνότητες που μπορεί να υποστηρίξει η χορδή είναι **κβαντισμένα**

Δημιουργία στάσιμων κυμάτων σε χορδές – Σύνοψη

Το μήκος κύματος των κανονικών τρόπων ταλάντωσης μιας χορδής μήκους L με σταθερά άκρα είναι $\lambda_n = 2L/n$, όπου $n = 1, 2, 3, \dots$

- Ο δείκτης n αντιστοιχεί στον n -οστό κανονικό τρόπο ταλάντωσης.
- Αυτοί είναι οι δυνατοί κανονικοί τρόποι ταλάντωσης της χορδής.

Οι ιδιοσυχνότητες δίνονται από τη σχέση

$$f_n = n \frac{v}{2L} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

- Είναι γνωστές και ως κβαντισμένες συχνότητες.

Κύματα που διαδίδονται σε χορδές, αρμονική σειρά

Η **θεμελιώδης συχνότητα** προκύπτει για τον πρώτο κανονικό τρόπο ταλάντωσης, δηλαδή για $n = 1$.

- Είναι η χαμηλότερη συχνότητα f_1 .

Οι συχνότητες των υπόλοιπων κανονικών τρόπων ταλάντωσης είναι ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας.

- $f_n = nf_1$

Αυτές οι συχνότητες σχηματίζουν μια **αρμονική σειρά**.

Οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης ονομάζονται **αρμονικές**.

Μουσικές νότες που παράγονται σε χορδές

Μια μουσική νότα καθορίζεται από τη θεμελιώδη συχνότητά της.

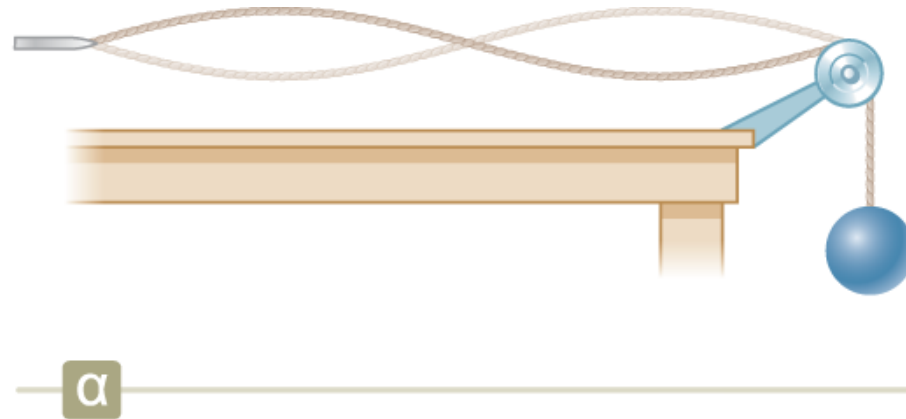
Μπορούμε να μεταβάλλουμε τη συχνότητα μιας χορδής μεταβάλλοντας είτε την τάση της είτε το μήκος της.

Αρμονικές – Παράδειγμα

Η μεσαία χορδή Ντο ενός πιάνου έχει θεμελιώδη συχνότητα 262 Hz. Ποιες είναι οι επόμενες δύο αρμονικές της χορδής;

- $f_1 = 262 \text{ Hz}$
- $f_2 = 2f_1 = 524 \text{ Hz}$
- $f_3 = 3f_1 = 786 \text{ Hz}$

Δημιουργία στάσιμου κύματος σε χορδή – Παράδειγμα



Το ένα άκρο της χορδής είναι στερεωμένο σε ένα έλασμα που ταλαντώνεται.

Το άλλο άκρο διέρχεται από μια τροχαλία. Από το άκρο του νήματος κρέμεται μια σφαίρα.

- Η αναρτημένη σφαίρα προκαλεί τάση στο νήμα.

Το νήμα ταλαντώνεται στη δεύτερη αρμονική του.

Συντονισμός

Ένα σύστημα μπορεί να ταλαντώνεται με έναν ή περισσότερους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης.

Ας υποθέσουμε ότι θέτουμε μια χορδή σε κίνηση με ένα έλασμα που ταλαντώνεται.

Αν ασκήσουμε μια περιοδική δύναμη σε ένα τέτοιο σύστημα, το πλάτος της επακόλουθης κίνησης του νήματος είναι μέγιστο όταν η συχνότητα εφαρμογής της δύναμης είναι ίση με μία από τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος.

Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **συντονισμός**.

Όταν το έλασμα διεγείρεται σε με μία από τις ιδιοσυχνότητες της χορδής, δημιουργούνται στάσιμα κύματα μεγάλου πλάτους.



Έλασμα που ταλαντώνεται

Συντονισμός (συνέχεια)

Επειδή το πλάτος της ταλάντωσης είναι μεγάλο όταν ένα σύστημα διεγείρεται σε κάποια από τις ιδιοσυχνότητές του, αυτές αναφέρονται συχνά και ως **συχνότητες συντονισμού**.

Αν το νήμα δεν ταλαντώνεται με μία από τις ιδιοσυχνότητές του, οι ταλαντώσεις έχουν μικρό πλάτος και μεταβλητό σχήμα.

Στάσιμα κύματα σε στήλες αέρα

Σε στήλες αέρα μπορούν να δημιουργηθούν στάσιμα κύματα εξαιτίας της συμβολής διαμήκων ηχητικών κυμάτων που διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις.

Η διαφορά φάσης μεταξύ του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου κύματος εξαρτάται από το αν ο σωλήνας έχει ανοιχτά ή κλειστά άκρα.

Μπορούμε να εφαρμόσουμε το μοντέλο των κυμάτων που υπόκεινται σε οριακές συνθήκες.

Στάσιμα κύματα σε στήλες αέρα, κλειστό άκρο

Το κλειστό άκρο ενός σωλήνα είναι δεσμός μετατόπισης στο στάσιμο κύμα.

- Το άκαμπτο φράγμα στο συγκεκριμένο άκρο δεν επιτρέπει τη διαμήκη κίνηση του αέρα.

Το κλειστό άκρο αντιστοιχεί σε κοιλία πίεσης.

- Πρόκειται για ένα σημείο μέγιστης μεταβολής της πίεσης.
- Το κύμα πίεσης έχει διαφορά φάσης 90° από το κύμα μετατόπισης.

Στάσιμα κύματα σε στήλες αέρα, ανοιχτό άκρο

Το ανοιχτό άκρο ενός σωλήνα είναι κοιλία μετατόπισης στο στάσιμο κύμα.

- Καθώς το πύκνωμα εξέρχεται από το ανοιχτό άκρο του σωλήνα, δεν υπάρχει πλέον ο περιορισμός του σωλήνα, οπότε ο συμπιεσμένος αέρας μπορεί να εκτονωθεί ελεύθερα στην ατμόσφαιρα.

Το ανοιχτό άκρο αντιστοιχεί σε δεσμό πίεσης.

- Πρόκειται για ένα σημείο στο οποίο η πίεση είναι σταθερή.

Στάσιμα κύματα σε σωλήνα με ανοιχτά άκρα

Τα δύο άκρα είναι κοιλίες μετατόπισης.

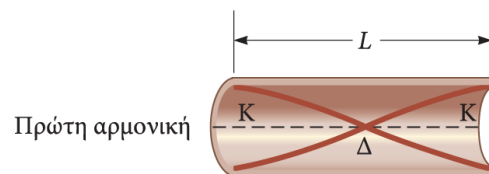
Η θεμελιώδης συχνότητα είναι $v/2L$.

- Αυτό αντιστοιχεί στην πρώτη εικόνα.

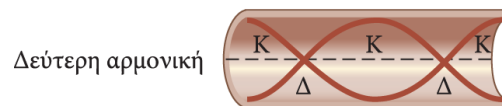
Οι συχνότητες των υψηλότερων αρμονικών δίνονται από τη σχέση $f_n = nf_1 = n(v/2L)$, όπου $n = 1, 2, 3, \dots$

Σε έναν σωλήνα με ανοιχτά άκρα, οι ιδιοσυχνότητες της ταλάντωσης συνιστούν μια αρμονική σειρά, η οποία περιλαμβάνει όλα τα ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας.

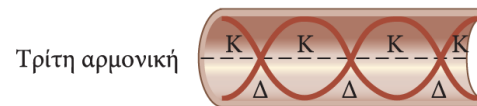
Σε έναν σωλήνα με ανοιχτά άκρα, τα άκρα είναι κοιλίες μετατόπισης και η αρμονική σειρά περιλαμβάνει όλα τα ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας.



$$\lambda_1 = 2L$$
$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L}$$



$$\lambda_2 = L$$
$$f_2 = \frac{v}{L} = 2f_1$$



$$\lambda_3 = \frac{2}{3} L$$
$$f_3 = \frac{3v}{2L} = 3f_1$$

Στάσιμα κύματα σε σωλήνα με ένα κλειστό άκρο

Το κλειστό άκρο είναι δεσμός μετατόπισης.

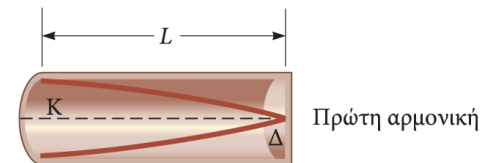
Το ανοιχτό άκρο είναι κοιλία μετατόπισης.

Το στάσιμο κύμα για τον θεμελιώδη τρόπο ταλάντωσης καλύπτει απόσταση $\frac{1}{4}\lambda$.

Οι συχνότητες των υψηλότερων αρμονικών δίνονται από τη σχέση $f_n = nf = n(v/4L)$, όπου $n = 1, 3, 5, \dots$

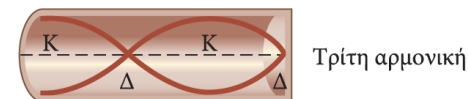
Σε έναν σωλήνα με ένα κλειστό άκρο, οι ιδιοσυχνότητες της ταλάντωσης συνιστούν μια αρμονική σειρά, η οποία περιλαμβάνει μόνο τα περιττά ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας.

Σε έναν σωλήνα με ένα κλειστό άκρο, το ανοιχτό άκρο είναι κοιλία μετατόπισης και το κλειστό άκρο είναι δεσμός. Η αρμονική σειρά περιλαμβάνει μόνο τα περιττά ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας.



$$\lambda_1 = 4L$$

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{4L}$$



$$\lambda_3 = \frac{4}{3} L$$

$$f_3 = \frac{3v}{4L} = 3f_1$$



$$\lambda_5 = \frac{4}{5} L$$

$$f_5 = \frac{5v}{4L} = 5f_1$$

Σημείωση σχετικά με τα μουσικά όργανα

Καθώς η θερμοκρασία αυξάνεται:

- Οι ήχοι που παράγουν οι στήλες αέρα γίνονται οξύτεροι.
 - Έχουν υψηλότερη συχνότητα.
 - Η αύξηση της θερμοκρασίας προκαλεί αύξηση της ταχύτητας του ήχου.
- Οι ήχοι που παράγουν οι χορδές γίνονται πιο βαθείς.
 - Έχουν χαμηλότερη συχνότητα.
 - Η αύξηση της θερμοκρασίας προκαλεί διαστολή των χορδών.
 - Καθώς οι χορδές διαστέλλονται, η τάση τους μειώνεται.

Μουσικά όργανα (συνέχεια)

Γενικά, τα μουσικά όργανα που βασίζονται σε στήλες αέρα διεγείρονται με συντονισμό.

Η στήλη αέρα δέχεται ένα ηχητικό κύμα με πολλές συχνότητες.

Ο ήχος προέρχεται:

- Στα ξύλινα πνευστά, από μια γλωττίδα που ταλαντώνεται.
- Στα χάλκινα πνευστά, από την ταλάντωση των χειλέων του εκτελεστή.
- Στο φλάουτο, από το φύσημα στο επιστόμιο του οργάνου.

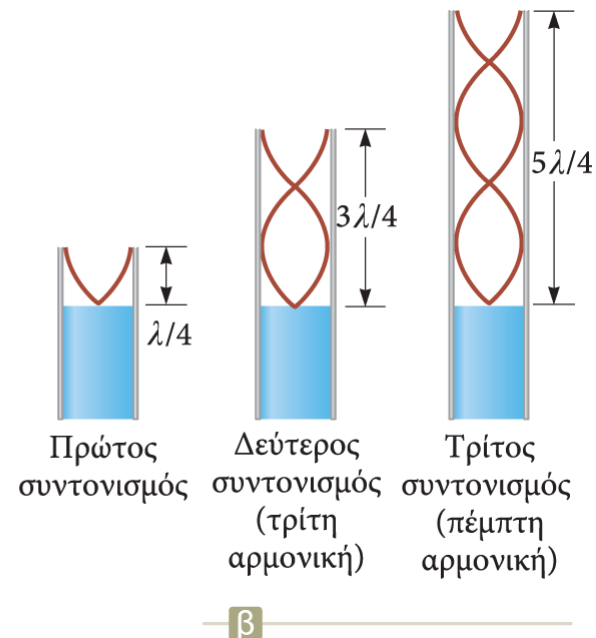
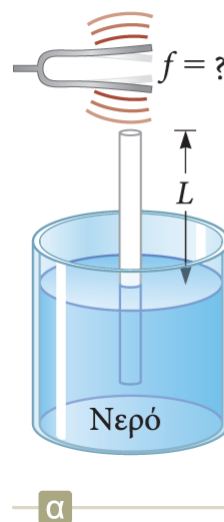
Συντονισμός σε στήλες αέρα – Παράδειγμα

Τοποθετούμε ένα διαπασών κοντά στην κορυφή του σωλήνα.

Όταν το L αντιστοιχεί σε κάποια από τις συχνότητες συντονισμού του σωλήνα, ο ήχος είναι δυνατότερος.

Το νερό συμπεριφέρεται όπως το κλειστό άκρο ενός σωλήνα.

Μπορούμε να υπολογίσουμε τα μήκη κύματος από τις τιμές του μήκους του σωλήνα για τις οποίες παρατηρείται συντονισμός.



Στάσιμα κύματα σε ράβδους

Μια ράβδος είναι στερεωμένη στο μέσον της.

Τρίβεται στο ένα άκρο της κατά τη διαμήκη διεύθυνση.

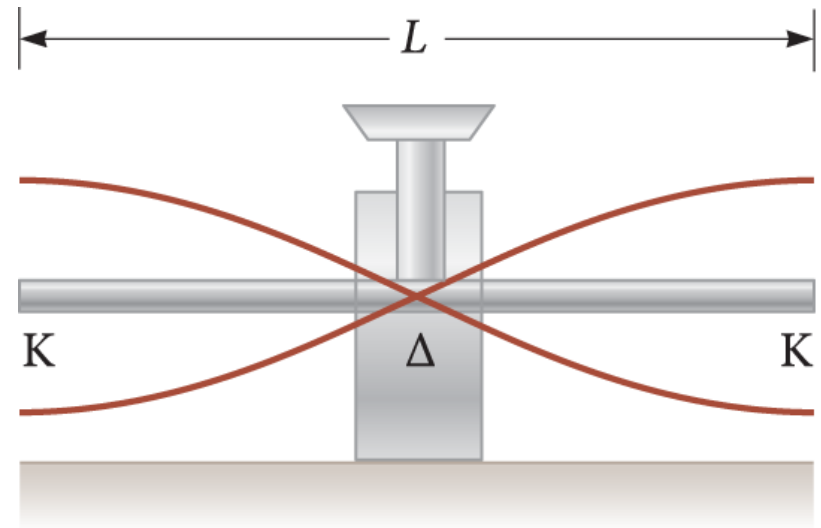
Η ράβδος ταλαντώνεται.

Οι ταλαντώσεις των στοιχείων της ράβδου είναι διαμήκειες.

Το μέσο της ράβδου είναι δεσμός μετατόπισης επειδή είναι στερεωμένο.

Τα άκρα της ράβδου είναι κοιλίες μετατόπισης επειδή ταλαντώνονται ελεύθερα.

Ο πρώτος κανονικός τρόπος ταλάντωσης (φαίνεται στην εικόνα) έχει μήκος κύματος $2L$ και συχνότητα $f = v/2L$.



$$\lambda_1 = 2L$$

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L}$$

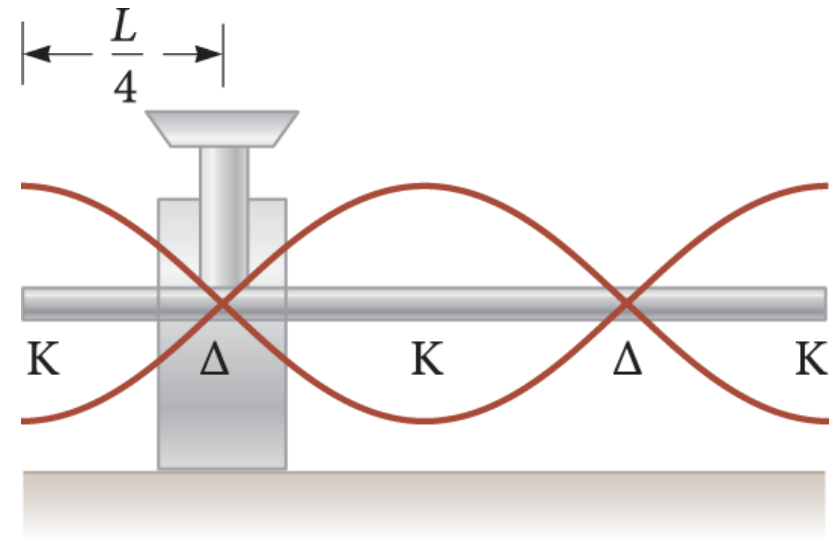
α

Στάσιμα κύματα σε ράβδους (συνέχεια)

Στερεώνοντας τη ράβδο σε διαφορετικά σημεία, ενδέχεται να πάρουμε άλλους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης κατά τη διέγερση της ράβδου.

Εδώ, η ράβδος έχει στερεωθεί σε απόσταση $L/4$ από το ένα άκρο της.

Έτσι παράγεται ο δεύτερος κανονικός τρόπος ταλάντωσης της.

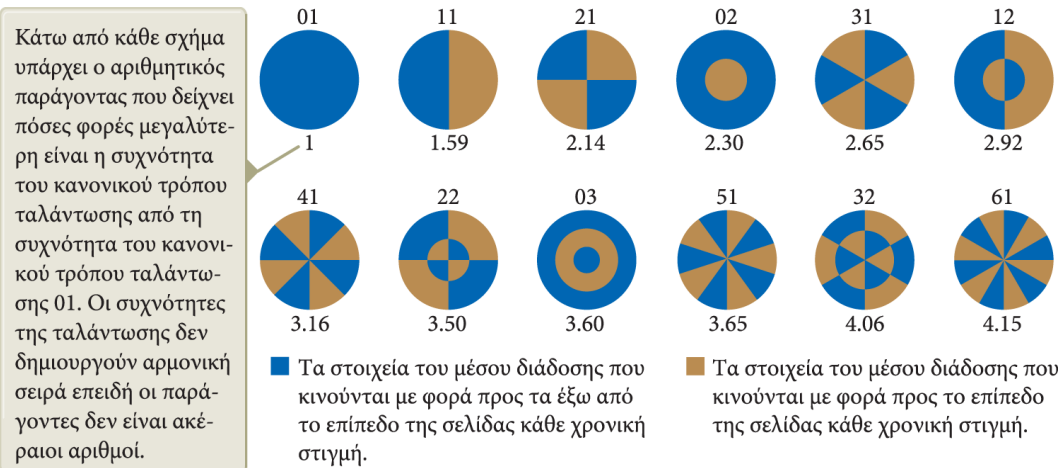


$$\lambda_2 = L$$

$$f_2 = \frac{v}{L} = 2f_1$$

β

Στάσιμα κύματα σε μεμβράνες



Σε μια εύκαμπτη μεμβράνη η οποία είναι τεντωμένη πάνω από μια κυκλική στεφάνη μπορούν να διαδοθούν ταλαντώσεις σε δύο διαστάσεις.

Ο παραγόμενος ήχος δεν αποτελείται από αρμονικές επειδή τα στάσιμα κύματα έχουν συχνότητες που δεν είναι ακέραια πολλαπλάσια μιας βασικής συχνότητας.

- Ο παραγόμενος ήχος μπορεί να περιγραφεί πιο σωστά ως κρότος ή θόρυβος παρά ως μουσική.

Ο πρώτος κανονικός τρόπος ταλάντωσης, ο οποίος έχει συχνότητα f_1 , περιέχει μόνο μία καμπύλη δεσμού.

Χωρική και χρονική συμβολή

Χωρική συμβολή συμβαίνει όταν το πλάτος της ταλάντωσης των στοιχείων του μέσου μεταβάλλεται ως προς τη θέση κάθε στοιχείου.

- Τέτοια φαινόμενα συμβολής μελετήσαμε μέχρι τώρα.

Χρονική συμβολή συμβαίνει όταν τα κύματα άλλοτε βρίσκονται σε φάση και άλλοτε εκτός φάσης.

- Προκύπτει από την υπέρθεση δύο κυμάτων με λίγο διαφορετικές συχνότητες.
- Υπάρχει χρονική εναλλαγή μεταξύ ενισχυτικής και καταστρεπτικής συμβολής.

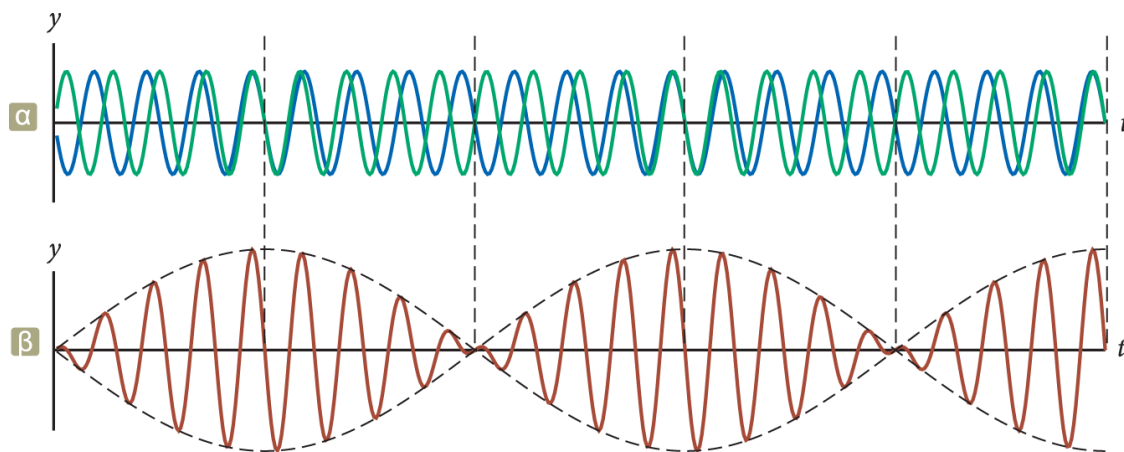
Διακροτήματα και συχνότητα διακροτημάτων

Το **διακρότημα** είναι η περιοδική μεταβολή του πλάτους σε ένα δεδομένο σημείο λόγω της υπέρθεσης δύο κυμάτων με λίγο διαφορετικές συχνότητες.

Το πλήθος των μεγίστων του πλάτους που ακούμε ανά δευτερόλεπτο είναι η **συχνότητα διακροτημάτων**.

Ισούται με τη διαφορά των συχνοτήτων μεταξύ των δύο πηγών.

Η μέγιστη συχνότητα που μπορεί να αντιληφθεί το ανθρώπινο αυτί είναι περίπου 20 διακροτήματα το δευτερόλεπτο (beats/sec).



Διακροτήματα, εξισώσεις

Το πλάτος του συνισταμένου κύματος μεταβάλλεται ως προς τον χρόνο σύμφωνα με τη σχέση

$$y_{\text{συν.}} = 2A \cos 2\pi \left(\frac{f_1 - f_2}{2} \right) t$$

- Άρα, και η ένταση μεταβάλλεται ως προς τον χρόνο.

Η συχνότητα των διακροτημάτων είναι $f_{\text{διακ.}} = |f_1 - f_2|$.

Μη ημιτονοειδή κύματα

Τα σχήματα των κυμάτων που παράγει ένα μουσικό όργανο είναι το αποτέλεσμα της υπέρθεσης των διαφόρων αρμονικών.

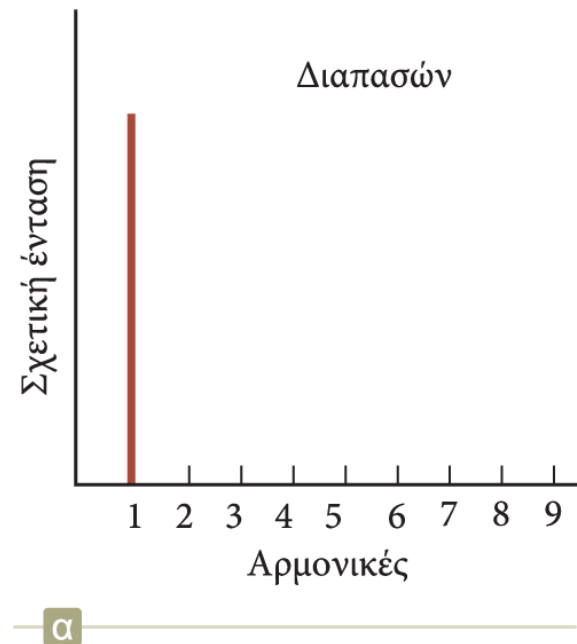
Η ανθρώπινη αντιληπτική απόκριση που μας επιτρέπει να κατατάσσουμε τους ήχους σε μια κλίμακα υψηλού-χαμηλού (πρίμου-μπάσου) ονομάζεται **ΤΟΝΙΚΟ Ύψος** (ή **οξύτητα**).

- Τονικό ύψος και συχνότητα
 - Η συχνότητα είναι η φυσική μέτρηση του αριθμού των ταλαντώσεων ανά δευτερόλεπτο.
 - Το τονικό ύψος είναι μια ψυχολογική αντίδραση σε έναν ήχο.
 - Η συχνότητα είναι το ερέθισμα και το τονικό ύψος είναι η απόκριση σε αυτό το ερέθισμα.

Η ανθρώπινη αντιληπτική απόκριση που συνδέεται με διάφορους συνδυασμούς αρμονικών είναι η **ποιότητα** (ή **χροιά**) του ήχου.

Ποιότητα του ήχου – Διαπασών

Όταν χτυπάμε ένα διαπασών, αυτό παράγει μόνο τη θεμελιώδη συχνότητα.

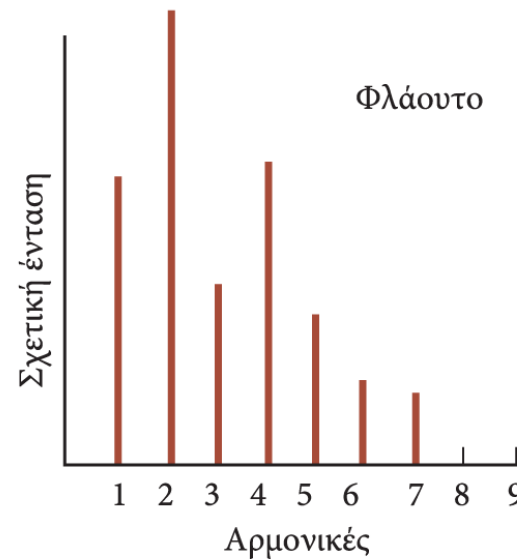
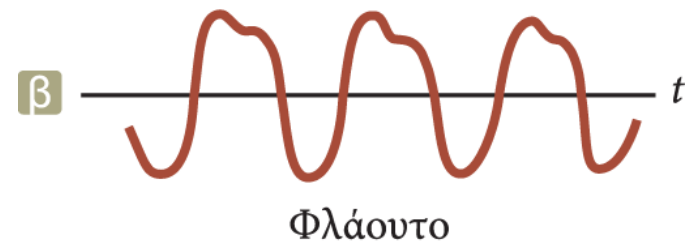


Ποιότητα του ήχου – Φλάουτο

Η ίδια νότα σε ένα φλάουτο ακούγεται διαφορετικά.

Η δεύτερη αρμονική έχει πολύ μεγάλη ένταση.

Η τέταρτη αρμονική έχει σχεδόν την ίδια ένταση με την πρώτη.

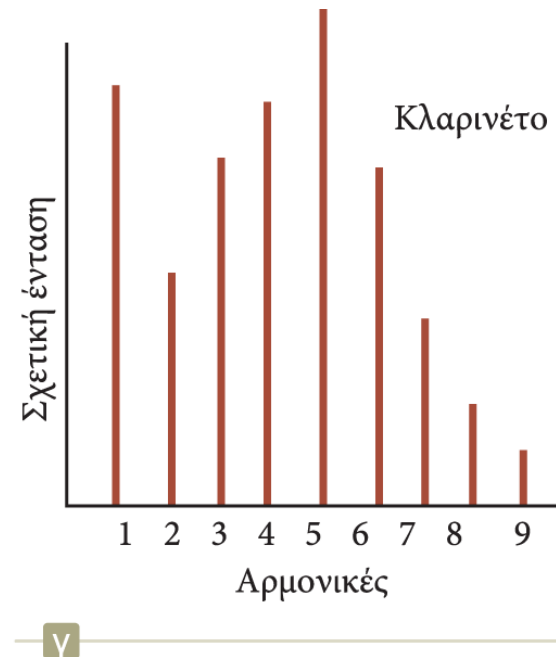


β

Ποιότητα του ήχου – Κλαρινέτο

Η πέμπτη αρμονική έχει πολύ μεγάλη ένταση.

Η πρώτη και η τέταρτη αρμονική είναι παρόμοιες, ενώ και η τρίτη δεν έχει μεγάλη διαφορά από αυτές.



Ανάλυση μη ημιτονοειδών κυμάτων

Αν το κύμα είναι περιοδικό, μπορούμε να το αναπαραστήσουμε όσο πιστά θέλουμε συνδυάζοντας έναν αρκετά μεγάλο αριθμό ημιτονοειδών κυμάτων που δημιουργούν μια αρμονική σειρά.

Μπορούμε να αναπαραστήσουμε οποιαδήποτε περιοδική συνάρτηση ως μια σειρά ημιτονοειδών και συνημιτονοειδών όρων.

- Αυτό βασίζεται στη μαθηματική τεχνική που μας παρέχει το **θεώρημα του Fourier**.

Το αντίστοιχο άθροισμα των όρων που αναπαριστά το περιοδικό κύμα ονομάζεται **σειρά Fourier**.

Αν έχουμε μια συνάρτηση y που μεταβάλλεται περιοδικά ως προς τον χρόνο, τότε σύμφωνα με το θεώρημα του Fourier μπορούμε να γράψουμε τη συνάρτηση ως:

$$y(t) = \sum_n (A_n \sin 2\pi f_n t + B_n \cos 2\pi f_n t)$$

- $f_1 = 1/T$ και $f_n = n f_1$
- Οι συντελεστές A_n και B_n είναι τα πλάτη των κυμάτων.

Δημιουργία ενός τετραγωνικού κύματος με σύνθεση Fourier

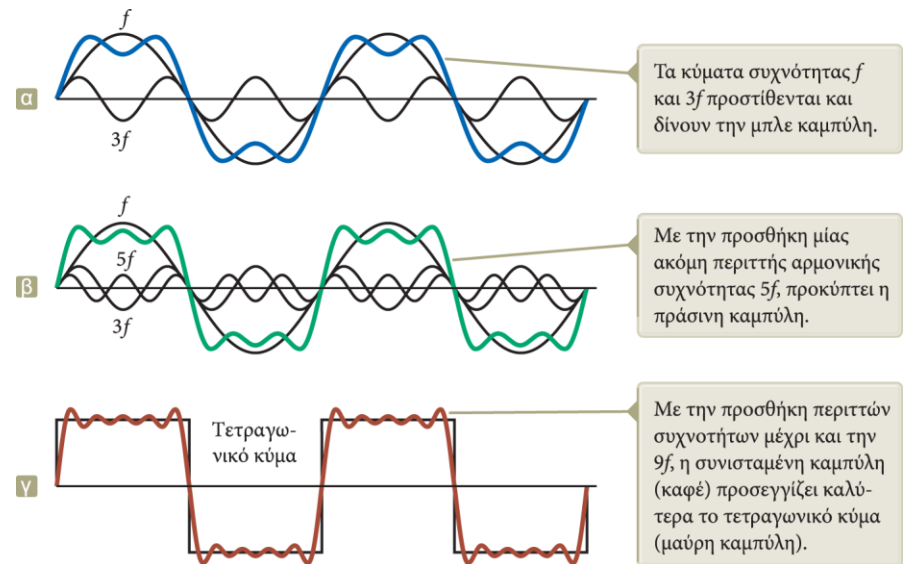
Στη **σύνθεση Fourier**, προσθέτουμε διάφορες αρμονικές για να δημιουργήσουμε ένα συνιστάμενο κύμα συγκεκριμένου σχήματος.

Για να δημιουργήσουμε ένα τετραγωνικό κύμα με τη σύνθεση Fourier, προσθέτουμε όλα τα περιττά πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας f .

Στο (α), προσθέτουμε αρμονικές με συχνότητες f και $3f$.

Στο (β), προσθέτουμε την αρμονική με συχνότητα $5f$.

Στο (γ), με την προσθήκη αρμονικών με περιττές συχνότητες μέχρι και την $9f$, το κύμα προσεγγίζει το τετραγωνικό κύμα.



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ – ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Νόμοι λογαρίθμων

-
- $y=10^x \Leftrightarrow x=\log y$
 - $y=e^x \Leftrightarrow x=\ln y, e=2.718$
 - $10=e^{2.303}$
 - $\ln 10=2.303$
 - $\log(xy)=\log x+\log y$
 - $\log \frac{x}{y}=\log x-\log y$
 - $\log y^n=n \log y$
-

The decibel scale

$$SIL = SIL_0 + 10 \log (I/I_0)$$

$$\log 1 = 0.0$$

$$\log 6 = 0.8$$

$$\log 2 = 0.3$$

$$\log 7 = 0.85$$

$$\log 3 = 0.5$$

$$\log 8 = 0.9$$

$$\log 4 = 0.6$$

$$\log 9 = 0.95$$

$$\log 5 = 0.7$$

$$\log 10 = 1.0$$