

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

ΔΡ. ΓΕΩΡΓΙΟΣ Ν. ΤΣΙΓΑΡΙΔΑΣ

ΦΥΣΙΚΟΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

Στη Φύση είναι αδύνατο να μετρηθεί η τιμή ενός μεγέθους με απόλυτη ακρίβεια. Η αβεβαιότητα στη γνώση της τιμής ενός μεγέθους, ή αλλιώς η απόκλιση της μετρούμενης τιμής του μεγέθους από την πραγματική ονομάζεται σφάλμα της μέτρησης.

ΠΗΓΕΣ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

Τα σφάλματα μπορούν να προέλθουν είτε από ατέλειες των οργάνων είτε να οφείλονται στον ανθρώπινο παράγοντα. Για παράδειγμα όταν μετρούμε το μήκος ενός αντικειμένου με μία μετροταινία η οποία έχει ως μικρότερη υποδιαίρεση ένα χιλιοστό, δεν είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε το μήκος με ακρίβεια καλύτερη από αυτή του ενός χιλιοστού. Ακόμη όταν μετράμε π.χ. τη διάρκεια της ταλάντωσης ενός εκκρεμούς με ένα χρονόμετρο, τότε δεν είναι δυνατόν να συγχρονίσουμε με απόλυτη ακρίβεια την έναρξη και τη λήξη των ταλαντώσεων με το πάτημα των αντίστοιχων κουμπιών στο χρονόμετρο. Όλοι αυτοί οι παράγοντες, και πολλοί άλλοι, εισάγουν σφάλμα στις μετρήσεις.

ΤΥΧΑΙΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

Όταν η απόκλιση των μετρούμενων τιμών ενός μεγέθους από την πραγματική μεταβάλλεται κατά τυχαίο τρόπο με αποτέλεσμα η τιμή του μεγέθους να προκύπτει άλλοτε μεγαλύτερη και άλλοτε μικρότερη από την πραγματική, τότε έχουμε **τυχαίο σφάλμα**. Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή όταν οι μετρούμενες τιμές προκύπτουν συνεχώς μεγαλύτερες ή μικρότερες της πραγματικής, τότε μιλάμε για **συστηματικό σφάλμα**. Μία πηγή συστηματικού σφάλματος είναι η απόκλιση του μηδενός, δηλαδή η περίπτωση στην οποία το μηδέν της κλίμακας ενός οργάνου δεν συμπίπτει με το πραγματικό μηδέν. Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε μία ζυγαριά η οποία ακόμα και όταν δεν έχουμε τοποθετήσει κάποιο σώμα επάνω της δείχνει π.χ. μία τιμή 1 Kg. Είναι προφανές ότι οποιαδήποτε μέτρηση κάνουμε με τη ζυγαριά

αυτή θα έχει απόκλιση + 1 Kg, δηλαδή για να πάρουμε τη σωστή μέτρηση θα πρέπει από όλες τις τιμές να αφαιρούμε 1 Kg.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε κυρίως με τυχαία σφάλματα εφόσον τα συστηματικά μπορούν σχετικά εύκολα να εξαλειφτούν προσθέτοντας ή αφαιρώντας μία σταθερή τιμή από τις μετρήσεις που παίρνουμε κάθε φορά.

ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΟΥ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

Έστω ότι μετρούμε για παράδειγμα το μήκος ενός αντικειμένου και βρίσκουμε ότι είναι $\ell = 10\text{ cm}$ με αβεβαιότητα της τάξης του ενός χιλιοστού, δηλαδή $\delta\ell = 1\text{ mm} = 0.1\text{ cm}$.

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε ότι

$$\ell = (10.0 \pm 0.1)\text{ cm}$$

Ο παραπάνω συμβολισμός έχει την έννοια ότι το μήκος του αντικειμένου κυμαίνεται στην περιοχή

$$(10.0 - 0.1)\text{ cm} \leq \ell \leq (10.0 + 0.1)\text{ cm} \quad \text{ή} \quad 9.9\text{ cm} \leq \ell \leq 10.1\text{ cm}$$

Γενικότερα, όταν μετρούμε την τιμή ενός μεγέθους x και βρίσκουμε μία τιμή x_0 με σφάλμα δx , τότε γράφουμε

$$x = x_0 \pm \delta x$$

το οποίο έχει την έννοια ότι η τιμή του μεγέθους x κυμαίνεται στο διάστημα

$$x_0 - \delta x \leq x \leq x_0 + \delta x$$

Για παράδειγμα, εάν η περίοδος ενός εκκρεμούς είναι $T = 5.0\text{ sec}$ με σφάλμα $\delta T = 0.1\text{ sec}$ τότε γράφουμε

$$T = (5.0 \pm 0.1)\text{ sec}$$

και εννοούμε ότι

$$(5.0 - 0.1)\text{ sec} \leq T \leq (5.0 + 0.1)\text{ sec} \quad \text{ή} \quad 4.9\text{ sec} \leq T \leq 5.1\text{ sec}$$

Ο λόγος που γράφουμε $T = (5.0 \pm 0.1)\text{ sec}$ και όχι $T = (5 \pm 0.1)\text{ sec}$ είναι ότι **στην τιμή του μεγέθους κρατάμε τόσα δεκαδικά ψηφία όσα έχει και η τιμή του σφάλματος**. Δηλαδή εάν το σφάλμα βρίσκεται στο πρώτο δεκαδικό ψηφίο τότε κρατάμε ένα δεκαδικό, εάν βρίσκεται στο δεύτερο δύο, κλπ. Επομένως, εάν το σφάλμα ήταν

$\delta T = 0.01 \text{ sec}$, τότε θα γράφαμε $T = (5.00 \pm 0.01) \text{ sec}$, ενώ εάν είχαμε $\delta T = 0.001 \text{ sec}$ τότε θα γράφαμε $T = (5.000 \pm 0.001) \text{ sec}$, κλπ. Τέλος εάν το σφάλμα ήταν $\delta T = 1 \text{ sec}$ θα γράφαμε $T = (5 \pm 1) \text{ sec}$

Σε περίπτωση που η τιμή του μεγέθους έχει περισσότερα δεκαδικά ψηφία από το σφάλμα τότε στρογγυλοποιούμε στην πλησιέστερη τιμή. Για παράδειγμα, εάν έχουμε $T = 4.967 \text{ sec}$ και $\delta T = 0.01 \text{ sec}$ τότε γράφουμε $T = (4.97 \pm 0.01) \text{ sec}$. Οι κανόνες της στρογγυλοποίησης είναι οι εξής:

α) Εάν το επόμενο ψηφίο από το τελευταίο που κρατάμε είναι μεγαλύτερο του 5 τότε αυξάνουμε το τελευταίο ψηφίο κατά μία μονάδα. Για παράδειγμα, εάν έχουμε $\ell = (6.47 \pm 0.1) \text{ cm}$ τότε γράφουμε $\ell = (6.5 \pm 0.1) \text{ cm}$

β) Εάν το επόμενο ψηφίο από το τελευταίο που κρατάμε είναι μικρότερο του 5 τότε το τελευταίο ψηφίο δεν μεταβάλλεται. Για παράδειγμα, εάν έχουμε $\ell = (6.43 \pm 0.1) \text{ cm}$ τότε γράφουμε $\ell = (6.4 \pm 0.1) \text{ cm}$

γ) Τέλος, εάν το επόμενο ψηφίο από το τελευταίο που κρατάμε είναι ίσο με 5 τότε το τελευταίο ψηφίο στρογγυλοποιείται στον πλησιέστερο άρτιο αριθμό. Για παράδειγμα, εάν έχουμε $\ell = (6.45 \pm 0.1) \text{ cm}$ τότε γράφουμε $\ell = (6.4 \pm 0.1) \text{ cm}$ (εφόσον το 4 είναι άρτιος), ενώ εάν είχαμε $\ell = (6.55 \pm 0.1) \text{ cm}$, τότε θα γράφαμε $\ell = (6.6 \pm 0.1) \text{ cm}$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΨΗΦΙΑ

Τα ψηφία της τιμής του μεγέθους τα οποία είναι μεγαλύτερα ή ίσα του σφάλματος δηλαδή βρίσκονται αριστερά από το σφάλμα ονομάζονται σημαντικά ψηφία και αυτά είναι τα μόνα που θα πρέπει να χρησιμοποιούμε όταν γράφουμε την τιμή του μεγέθους.

Αντίθετα, τα ψηφία που βρίσκονται δεξιά του σφάλματος, είναι δηλαδή μικρότερα από το σφάλμα δεν είναι σημαντικά ψηφία και δεν θα πρέπει να χρησιμοποιούνται όταν γράφουμε την τιμή του μεγέθους.

Παράδειγμα

Εάν έχουμε $\ell = 2.364 \text{ cm}$ και $\delta \ell = 0.02 \text{ cm}$ τότε τα σημαντικά ψηφία είναι τα τρία πρώτα δηλαδή το 2.34 και θα πρέπει να γράψουμε $\ell = (2.36 \pm 0.02) \text{ cm}$. Αντίθετα το τελευταίο ψηφίο (το 4) δεν είναι σημαντικό και παραλείπεται.

ΣΧΕΤΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ

Ο λόγος του σφάλματος προς την τιμή του μεγέθους ονομάζεται σχετικό σφάλμα

$$\text{σχ. σφάλμα} = \left| \frac{\delta x}{x_0} \right|$$

Το σχετικό σφάλμα εκφράζει την ακρίβεια της μέτρησης, δηλαδή όσο πιο μικρό είναι το σχετικό σφάλμα τόσο πιο ακριβής είναι η μέτρηση.

Παράδειγμα

Έστω ότι έχουμε δύο μετρήσεις

$$\alpha) \ell_1 = (10.0 \pm 0.5) \text{ cm} \quad \text{σχ. σφάλμα} = \frac{0.5}{10} = \frac{5}{100} = 0.05 \text{ ή } 5\%$$

$$\beta) \ell_2 = (5.0 \pm 0.4) \text{ cm} \quad \text{σχ. σφάλμα} = \frac{0.4}{5} = \frac{8}{100} = 0.08 \text{ ή } 8\%$$

Επομένως η πρώτη μέτρηση είναι ακριβέστερη από τη δεύτερη αν και το απόλυτο σφάλμα είναι μεγαλύτερο.

ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

Α. ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

Α1. ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑ ΔΥΟ ΜΕΓΕΘΩΝ

Έστω ότι μετρούμε δύο μήκη

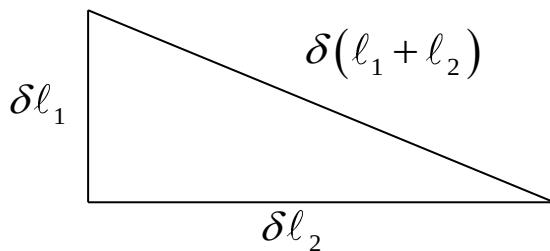
$\ell_1 = (10.0 \pm 0.5) \text{ cm}$ και $\ell_2 = (8.0 \pm 0.4) \text{ cm}$ και θέλουμε να προσδιορίσουμε το άθροισμά τους $\ell_1 + \ell_2$ καθώς και το σφάλμα του $\delta(\ell_1 + \ell_2)$.

Προφανώς έχουμε ότι $\ell_1 + \ell_2 = 10.0 \text{ cm} + 8.0 \text{ cm} = 18.0 \text{ cm}$. Αντίθετα για το σφάλμα δεν είναι σωστό να πούμε ότι $\delta(\ell_1 + \ell_2) = \delta\ell_1 + \delta\ell_2 = 0.5 \text{ cm} + 0.4 \text{ cm} = 0.9 \text{ cm}$, γιατί κατ' αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε τιμή του σφάλματος μεγαλύτερη από την πραγματική.

Η σωστή τιμή του σφάλματος είναι

$$\begin{aligned}\delta(\ell_1 + \ell_2) &= \sqrt{(\delta\ell_1)^2 + (\delta\ell_2)^2} = \sqrt{(0.5\text{cm})^2 + (0.4\text{cm})^2} \\ &= \sqrt{0.25\text{cm}^2 + 0.16\text{cm}^2} = \sqrt{0.41\text{cm}^2} \approx 0.64\text{cm} \approx 0.6\text{cm}\end{aligned}$$

Δηλαδή εάν θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές ίσες με τα σφάλματα της κάθε μέτρησης τότε το σφάλμα του αθροίσματος των δύο μεγεθών δίνεται από την υποτείνουσα του τριγώνου.



Το ίδιο ισχύει και για τη διαφορά μεταξύ δύο μεγεθών καθώς και για περισσότερα από δύο μεγέθη.

Παράδειγμα

Έστω ότι έχουμε τρία μήκη $\ell_1 = (10.0 \pm 0.5)\text{cm}$, $\ell_2 = (8.0 \pm 0.4)\text{cm}$, $\ell_3 = (5.0 \pm 0.3)\text{cm}$

και θέλουμε να υπολογίσουμε την ποσότητα $\ell_1 + \ell_2 - \ell_3$ και το σφάλμα της.

Έχουμε ότι $\ell_1 + \ell_2 - \ell_3 = 10.0\text{cm} + 8.0\text{cm} - 5.0\text{cm} = 13.0\text{cm}$

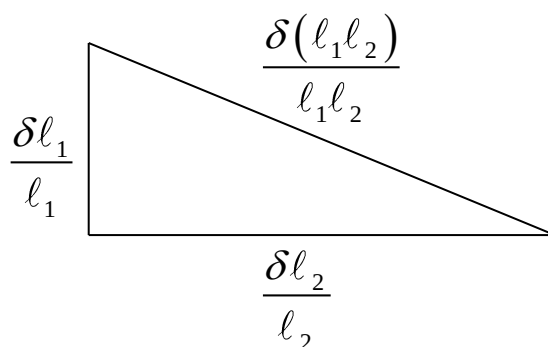
και

$$\begin{aligned}\delta(\ell_1 + \ell_2 - \ell_3) &= \sqrt{(\delta\ell_1)^2 + (\delta\ell_2)^2 + (\delta\ell_3)^2} = \sqrt{(0.5\text{cm})^2 + (0.4\text{cm})^2 + (0.3\text{cm})^2} \\ &= \sqrt{0.25\text{cm}^2 + 0.16\text{cm}^2 + 0.09\text{cm}^2} = \sqrt{0.50\text{cm}^2} = 0.71\text{cm} \approx 0.7\text{cm}\end{aligned}$$

Άρα γράφουμε ότι $\ell_1 + \ell_2 - \ell_3 = (13.0 \pm 0.7)\text{cm}$

A2. ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΥΟ ΜΕΓΕΘΩΝ

Όταν έχουμε γινόμενο δύο μεγεθών ο κανόνας του ορθογωνίου τριγώνου εφαρμόζεται στα σχετικά σφάλματα.



Παράδειγμα

Έστω ότι έχουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών

$$\ell_1 = (10.0 \pm 0.5) \text{ cm} \text{ και } \ell_2 = (6.0 \pm 0.4) \text{ cm}$$

Τότε το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι

$$E = \ell_1 \ell_2 = 10.0 \text{ cm} \times 6.0 \text{ cm} = 60 \text{ cm}^2$$

και το σφάλμα δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \frac{\delta E}{E} &= \frac{\delta(\ell_1 \ell_2)}{\ell_1 \ell_2} = \sqrt{\left(\frac{\delta \ell_1}{\ell_1}\right)^2 + \left(\frac{\delta \ell_2}{\ell_2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0.5}{10}\right)^2 + \left(\frac{0.4}{6}\right)^2} = \sqrt{0.05^2 + 0.067^2} = \sqrt{0.0025 + 0.0045} \\ &= \sqrt{0.0070} = 0.084 \Rightarrow \delta E = 0.084 \times E = 0.084 \times 60 \text{ cm}^2 = 5.04 \text{ cm}^2 \approx 5 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε τελικά ότι $E = (60 \pm 5) \text{ cm}^2$

Ο παραπάνω κανόνας ισχύει και για το γινόμενο περισσότερων των δύο μεγεθών.

Π.χ. Εάν έχουμε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με μήκη πλευρών

$$\ell_1 = (10.0 \pm 0.5) \text{ cm} , \ell_2 = (6.0 \pm 0.4) \text{ cm} \text{ και } \ell_3 = (3.0 \pm 0.3) \text{ cm}$$

Τότε έχουμε ότι $V = \ell_1 \ell_2 \ell_3 = 10.0 \text{ cm} \times 6.0 \text{ cm} \times 3.0 \text{ cm} = 180.0 \text{ cm}^3$

Το σφάλμα είναι

$$\begin{aligned} \frac{\delta V}{V} &= \frac{\delta(\ell_1 \ell_2 \ell_3)}{\ell_1 \ell_2 \ell_3} = \sqrt{\left(\frac{\delta \ell_1}{\ell_1}\right)^2 + \left(\frac{\delta \ell_2}{\ell_2}\right)^2 + \left(\frac{\delta \ell_3}{\ell_3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0.5}{10}\right)^2 + \left(\frac{0.4}{6}\right)^2 + \left(\frac{0.3}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{0.05^2 + 0.067^2 + 0.1^2} = \sqrt{0.0025 + 0.0045 + 0.01} = \sqrt{0.017} = 0.13 \\ \Rightarrow \delta V &= 0.13V = 0.13 \times 180 \text{ cm}^3 = 23.4 \text{ cm}^3 \approx 20 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Επομένως $V = (180 \pm 20) \text{ cm}^3$

A3. ΤΥΧΑΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΕΝΟΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ

Έστω ότι ξέρουμε την τιμή και το σφάλμα ενός μεγέθους x , ($x = x_0 \pm \delta x$), και θέλουμε να υπολογίσουμε το σφάλμα μίας τυχαίας συνάρτησης $f(x)$ του μεγέθους. Αποδεικνύεται ότι το σφάλμα δίνεται από τη σχέση

$$\delta(f(x)) = |f'(x_0)| \delta x$$

όπου $f'(x_0)$ η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης στο σημείο $x = x_0$

Παράδειγμα

Έστω ότι έχουμε $\ell = (5.0 \pm 0.2) \text{ cm}$ και θέλουμε να υπολογίσουμε το σφάλμα των ποσοτήτων

α) ℓ^2 , β) ℓ^3 , γ) $\frac{1}{\ell}$ και δ) $\frac{1}{\ell^2}$,

α) Έχουμε ότι $\delta \ell^2 = (\ell^2)' \delta \ell = 2\ell \delta \ell = 2 \times 5.0 \text{ cm} \times 0.2 \text{ cm} = 2 \text{ cm}^2$

β) $\delta \ell^3 = (\ell^3)' \delta \ell = 3\ell^2 \delta \ell = 3 \times (5.0 \text{ cm})^2 \times 0.2 \text{ cm} = 3 \times 25 \text{ cm}^2 \times 0.2 \text{ cm} = 15 \text{ cm}^3$

γ)

$$\delta\left(\frac{1}{\ell}\right) = \left|\left(\frac{1}{\ell}\right)'\right| \delta \ell = \left|-\frac{1}{\ell^2}\right| \delta \ell = \frac{1}{\ell^2} \delta \ell = \frac{1}{(5.0 \text{ cm})^2} 0.2 \text{ cm} = \frac{0.2 \text{ cm}}{25 \text{ cm}^2} = 0.008 \frac{1}{\text{cm}} = 0.008 \text{ cm}^{-1}$$

δ)

$$\delta\left(\frac{1}{\ell^2}\right) = \left|\left(\frac{1}{\ell^2}\right)'\right| \delta \ell = \left|-\frac{2}{\ell^3}\right| \delta \ell = \frac{2}{\ell^3} \delta \ell = \frac{2}{(5.0 \text{ cm})^3} 0.2 \text{ cm} = \frac{0.4 \text{ cm}}{125 \text{ cm}^3} = 0.0032 \frac{1}{\text{cm}^2} \approx 0.003 \text{ cm}^{-2}$$

B. ΓΕΝΙΚΗ ΣΧΕΣΗ

Στη γενικότερη περίπτωση που ένα μέγεθος z εξαρτάται από δύο άλλα μεγέθη x, y μέσω μίας συνάρτησης $z = f(x, y)$ τότε το σφάλμα στο z δίνεται από τη σχέση

$$\delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y\right)^2}$$

όπου $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$ η μερική παράγωγος της f ως προς x και y αντίστοιχα.

Σημείωση: Για τον υπολογισμό της μερικής παραγώγου ισχύουν οι ίδιοι κανόνες με την κανονική παραγωγή, με τη μόνη διαφορά ότι οι μεταβλητές ως προς τις οποίες δεν παραγωγίζουμε αντιμετωπίζονται ως σταθερές.

Παράδειγμα 1: Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους των συναρτήσεων

α) $f(x, y) = x + y$

β) $f(x, y) = x \cdot y$

γ) $f(x, y) = 2x^2 + 3y^3$

δ) $f(x, y) = x^2 y^3$

ε) $f(x, y) = \frac{x}{y}$

Λύση

α) Έχουμε $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x + y)$. Θέτουμε $y = c = \text{σταθερά}$ οπότε έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dx}(x + c) = (x + c)' = 1 + 0 = 1$$

Ομοίως $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dy}(c + y) = (c + y)' = 0 + 1 = 1$ όπου στην περίπτωση αυτή $c = x$

β) Θέτουμε $c = y$ οπότε έχουμε $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) = \frac{d}{dx}(xc) = (cx)' = c = y$

Ομοίως $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy) = \frac{d}{dy}(cy) = (cy)' = c = x$ όπου $c = x$

γ) Έχουμε ότι $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2 + 3y^3) = \frac{d}{dx}(2x^2 + 3c^3) = (2x^2 + 3c^3)' = 4x + 0 = 4x$

όπου $c = y$

Ομοίως $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2 + 3y^3) = \frac{d}{dy}(2c^2 + 3y^3) = (2c^2 + 3y^3)' = 0 + 9y^2 = 9y^2$ όπου

αυτή τη φορά $c = x$

δ) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 y^3) = \frac{d}{dx}(x^2 c^3) = (c^3 x^2)' = c^3 (x^2)' = c^3 2x = 2xy^3$ όπου $c = y$

Ομοίως $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y^3) = \frac{d}{dy}(c^2 y^3) = (c^2 y^3)' = c^2 (y^3)' = c^2 3y^2 = 3x^2 y^2$ όπου $c = x$

$$\epsilon) \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{c} \right) = \left(\frac{x}{c} \right)' = \frac{1}{c} (x)' = \frac{1}{c} = \frac{1}{y} \text{ όπου } c = y$$

$$\text{Ομοίως } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{c}{y} \right) = \left(\frac{c}{y} \right)' = c \left(\frac{1}{y} \right)' = c \left(-\frac{1}{y^2} \right) = -\frac{c}{y^2} = -\frac{x}{y^2} \text{ όπου } c = x$$

Παράδειγμα 2: Εάν έχουμε ένα σώμα μάζας $m = (100 \pm 2) \text{ gr}$ και όγκου $V = (20 \pm 1) \text{ cm}^3$ να υπολογισθεί η πυκνότητά του και το σφάλμα της

Λύση

$$\text{Έχουμε } \rho = \frac{m}{V} = \frac{100 \text{ gr}}{20 \text{ cm}^3} = 5 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$$

Εφόσον η πυκνότητα είναι συνάρτηση της μάζας και του όγκου έχουμε ότι το σφάλμα στην πυκνότητα είναι

$$\delta \rho = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial m} \delta m \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial V} \delta V \right)^2}$$

Έχουμε ότι

$$\frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{m}{V} \right) = \frac{d}{dm} \left(\frac{m}{c} \right) = \left(\frac{m}{c} \right)' = \frac{1}{c} (m)' = \frac{1}{c} = \frac{1}{V} \text{ όπου } c = V \text{ και}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{m}{V} \right) = \frac{d}{dV} \left(\frac{c}{V} \right) = \left(\frac{c}{V} \right)' = c \left(\frac{1}{V} \right)' = c \left(-\frac{1}{V^2} \right) = -\frac{c}{V^2} = -\frac{m}{V^2} \text{ όπου } c = m$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\delta\rho &= \sqrt{\left(\frac{1}{V}\delta m\right)^2 + \left(-\frac{m}{V^2}\delta V\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\delta m}{V}\right)^2 + \left(\frac{m\delta V}{V^2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2gr}{20cm^3}\right)^2 + \left[\frac{100gr \times 1cm^3}{(20cm^3)^2}\right]^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{10}\frac{gr}{cm^3}\right)^2 + \left(\frac{100}{400}\frac{gr \times cm^3}{cm^6}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{gr}{cm^3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{gr}{cm^3}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{100}\left(\frac{gr}{cm^3}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{gr}{cm^3}\right)^2} = \sqrt{0.01\left(\frac{gr}{cm^3}\right)^2 + 0.0625\left(\frac{gr}{cm^3}\right)^2} \\
&= \sqrt{0.0725\left(\frac{gr}{cm^3}\right)^2} \approx 0.27\frac{gr}{cm^3} \approx 0.3\frac{gr}{cm^3}
\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε τελικά ότι $\rho = (5.0 \pm 0.3)\frac{gr}{cm^3}$

Παρατήρηση 1: Η γενική σχέση

$$\delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y\right)^2}$$

μπορεί να επεκταθεί και για περισσότερες των δύο μεταβλητών. Για παράδειγμα, εάν ένα μέγεθος z εξαρτάται από N άλλα μεγέθη $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ τότε έχουμε

$$\delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_2\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\delta x_3\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_N}\delta x_N\right)^2}$$

Παρατήρηση 2: Οι ειδικές περιπτώσεις που αναλύθηκαν παραπάνω (άθροισμα, γινόμενο, συνάρτηση μίας μεταβλητής) μπορούν να αντιμετωπισθούν με βάση τη γενική σχέση. Για παράδειγμα το σφάλμα του αθροίσματος δύο μεγεθών είναι

$$\delta(x+y) = \sqrt{\left(\frac{\partial(x+y)}{\partial x}\delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial(x+y)}{\partial y}\delta y\right)^2} = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2} \text{ που είναι η ίδια}$$

σχέση με αυτή της παραγράφου Α1.

Κατά τον ίδιο τρόπο το σφάλμα του γινομένου δύο μεγεθών είναι

$$\begin{aligned}\delta(xy) &= \sqrt{\left(\frac{\partial(xy)}{\partial x} \delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial(xy)}{\partial y} \delta y\right)^2} = \sqrt{(y\delta x)^2 + (x\delta y)^2} = \sqrt{(xy)^2 \left[\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{y}\right)^2\right]} \\ &= |xy| \sqrt{\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{y}\right)^2} \Rightarrow \frac{\delta(xy)}{|xy|} = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{y}\right)^2}\end{aligned}$$

Που είναι η ίδια σχέση με αυτή της παραγράφου Α2.

Τέλος εάν ένα μέγεθος z εξαρτάται μόνο από ένα άλλο μέγεθος x , έχουμε δηλαδή $z = f(x)$, τότε η γενική σχέση απλοποιείται και παίρνει τη μορφή

$$\delta z = \delta(f(x)) = \sqrt{\left(\frac{df}{dx} \delta x\right)^2} = \left|\frac{df}{dx}\right| \delta x$$

που είναι ίδια με τη σχέση που αναπτύχθηκε στην παράγραφο Α3.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΕΙΡΑΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Έστω ότι μετρούμε N φορές το ίδιο μέγεθος x και παίρνουμε μία σειρά τιμών

x_1

x_2

x_3

.

.

.

x_N

Τότε η πιο αξιόπιστη τιμή του μεγέθους είναι η μέση τιμή

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{\sum_i x_i}{N}$$

Για να υπολογίσουμε το σφάλμα της μέσης τιμής θα πρέπει να πρώτα να υπολογίσουμε τη διασπορά σ , η οποία εκφράζει τη διασπορά των μετρήσεων, δηλαδή τη μέση απόκλιση των μετρήσεων από τη μέση τιμή. Η διασπορά δίνεται από τη σχέση

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N - 1}} = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}$$

Το σφάλμα της μέσης τιμής υπολογίζεται ως

$$\delta\bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{N(N - 1)}}$$

Παρατήρηση: Η διασπορά σ δεν μεταβάλλεται με την αύξηση του πλήθους των μετρήσεων, ενώ αντίθετα το σφάλμα της μέσης τιμής μειώνεται ανάλογα με το $1/\sqrt{N}$. Επομένως, όσο περισσότερες μετρήσεις παίρνουμε τόσο με μεγαλύτερη ακρίβεια υπολογίζουμε την τιμή του μεγέθους.

Παράδειγμα

Έστω ότι μετρούμε 5 φορές την περίοδο ενός εκκρεμούς και παίρνουμε τις ακόλουθες τιμές

$$T_1 = 5.0 \text{ sec}$$

$$T_2 = 4.8 \text{ sec}$$

$$T_3 = 5.1 \text{ sec}$$

$$T_4 = 4.9 \text{ sec}$$

$$T_5 = 5.2 \text{ sec}$$

Η μέση τιμή της περιόδου είναι

$$\bar{T} = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5}{5} = \frac{5.0 + 4.8 + 5.1 + 4.9 + 5.2}{5} \text{ sec} = \frac{25}{5} \text{ sec} = 5 \text{ sec}$$

Η τυπική απόκλιση είναι

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\frac{(T_1 - \bar{T})^2 + (T_2 - \bar{T})^2 + (T_3 - \bar{T})^2 + (T_4 - \bar{T})^2 + (T_5 - \bar{T})^2}{5 - 1}} \\ &= \sqrt{\frac{(5.0 - 5)^2 + (4.8 - 5)^2 + (5.1 - 5)^2 + (4.9 - 5)^2 + (5.2 - 5)^2}{4}} \text{ sec}^2 \\ &= \sqrt{\frac{0^2 + 0.2^2 + 0.1^2 + 0.1^2 + 0.2^2}{4}} \text{ sec} = \sqrt{\frac{0 + 0.04 + 0.01 + 0.01 + 0.04}{4}} \text{ sec} \\ &= \sqrt{\frac{0.10}{4}} \text{ sec} = \sqrt{0.025} \text{ sec} \approx 0.16 \text{ sec} \end{aligned}$$

Τέλος, το σφάλμα της μέσης τιμής είναι

$$\delta \bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{0.16}{\sqrt{5}} \text{ sec} = \frac{0.16}{2.24} \text{ sec} \approx 0.07 \text{ sec}$$

Επομένως έχουμε ότι η περίοδος του εκκρεμούς είναι $\bar{T} = (5.00 \pm 0.07) \text{ sec}$

Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων

Έστω ότι έχουμε μία σειρά μετρήσεων δύο μεγεθών x, y τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με μία γραμμική σχέση της μορφής $y = ax + b$. Για να προσδιορίσουμε τους συντελεστές a, b ακολουθούμε την εξής διαδικασία.

Εάν δεν υπήρχαν πειραματικά σφάλματα τότε τα σημεία θα βρίσκονταν όλα σε μία ευθεία και θα είχαμε $y_i = ax_i + b \Rightarrow y_i - ax_i - b = 0$ για καθένα από αυτά. Εφόσον όμως υπάρχουν σφάλματα τα σημεία αποκλίνουν από την ευθεία και έχουμε $y_i - ax_i - b = R_i \neq 0$. Για να βρούμε ποια ευθεία προσεγγίζει καλύτερα τα πειραματικά σημεία θα πρέπει να υπολογίσουμε τους συντελεστές a, b έτσι ώστε το άθροισμα των αποκλίσεων $\sum_i R_i^2$ να γίνεται ελάχιστο. Θα πρέπει δηλαδή να προσδιορίσουμε τους συντελεστές a, b έτσι ώστε η συνάρτηση $f(a, b) = \sum_i (y_i - ax_i - b)^2$ να γίνεται ελάχιστη.

Αναγκαία συνθήκη για να συμβεί αυτό είναι

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a} = 0 &\Rightarrow \sum_i -2x_i(y_i - ax_i - b) = 0 \Rightarrow \sum_i (x_i y_i - ax_i^2 - bx_i) = 0 \\ &\Rightarrow \sum_i x_i y_i - a \sum_i x_i^2 - b \sum_i x_i = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial b} = 0 &\Rightarrow \sum_i -2(y_i - ax_i - b) = 0 \Rightarrow \sum_i (y_i - ax_i - b) = 0 \\ &\Rightarrow \sum_i y_i - a \sum_i x_i - \sum_i b = 0 \Rightarrow \sum_i y_i - a \sum_i x_i - Nb = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Όπου N ο αριθμός των πειραματικών σημείων. Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1), (2) έχουμε τελικά

$$a = \frac{N \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{N \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i \right)^2}, \quad b = \frac{\sum_i y_i \sum_i x_i^2 - \sum_i x_i \sum_i x_i y_i}{N \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i \right)^2} \quad (3)$$

Οι εξισώσεις (3) είναι ευαίσθητες σε αριθμητικά σφάλματα. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε την μεταβλητή $t_i = x_i - \bar{x}$, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή του x $\left(\bar{x} = \frac{\sum_i x_i}{N} \right)$

και οι εξισώσεις παίρνουν την μορφή

$$a = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_i t_i y_i}{\sum_i t_i^2}, \quad b = \frac{\sum_i y_i - a \sum_i x_i}{N} \quad (3)$$

Παράδειγμα: Έστω ότι έχουμε τη σειρά μετρήσεων

	x	y	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})y$
	1	4	-2	4	-8
	2	7	-1	1	-7
	3	10	0	0	0
	4	13	1	1	13
	5	16	2	4	32
Σ	15	50	0	10	30

$$\bar{x} = \frac{15}{5} = 3$$

$$a = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} = \frac{30}{10} = 3,$$

$$b = \frac{\sum_i y_i - a \sum_i x_i}{N} = \frac{50 - 3 \times 15}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

$$y = 3x + 1$$

Γραφικός υπολογισμός των συντελεστών της ευθείας

