

ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟ ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΣΤΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΤΗΣ ΓΗΣ

Η βαρυτική δύναμη που ασκείται σε σώμα μάζας m που βρίσκεται σε απόσταση r από το κέντρο της Γης, στο εσωτερικό της Γης ($r < R_{\Gamma}$), είναι

$$\mathbf{F} = -G \frac{M' m}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

όπου G η σταθερά της παγκόσμιας έλξης, R_{Γ} η ακτίνα της Γης, $\hat{\mathbf{r}}$ το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα με φορά προς τα έξω και M' το μέρος της μάζας της Γης που περικλείεται σε σφαίρα ακτίνας r , το οποίο δίνεται από τη σχέση

$$M' = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{\Gamma}$$

όπου έχουμε υποθέσει ότι η πυκνότητα της Γης ρ_{Γ} είναι σταθερή. Άρα, στο εσωτερικό της Γης, η βαρυτική δύναμη είναι

$$\mathbf{F} = -\left(\frac{4}{3} \pi G \rho_{\Gamma} m r\right) \hat{\mathbf{r}}$$

Κατά την μετατόπιση του σώματος από την επιφάνεια της Γης ($r = R_{\Gamma}$) σε μία τυχαία θέση r στο εσωτερικό της Γης, η δύναμη αυτή παράγει έργο

$$\begin{aligned} W(R_{\Gamma} \rightarrow r) &= \int_{R_{\Gamma}}^r \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{R_{\Gamma}}^r \frac{4}{3} \pi G \rho_{\Gamma} m r' dr' = - \frac{4}{3} \pi G \rho_{\Gamma} m \left(\frac{r^2}{2} - \frac{R_{\Gamma}^2}{2} \right) \\ &= G \frac{4}{3} \pi R_{\Gamma}^3 \rho_{\Gamma} m \left(\frac{1}{2R_{\Gamma}} - \frac{r^2}{2R_{\Gamma}^3} \right) = GM_{\Gamma} m \left(\frac{1}{2R_{\Gamma}} - \frac{r^2}{2R_{\Gamma}^3} \right) \end{aligned}$$

Προφανώς το παραπάνω έργο ισούται με την πτώση της δυναμικής ενέργειας από την επιφάνεια της Γης, έως ένα σημείο στο εσωτερικό που απέχει απόσταση r από το κέντρο της. Άρα, η δυναμική ενέργεια στο εσωτερικό της Γης, σε απόσταση r από το κέντρο της, είναι

$$\begin{aligned} U(r) &= U(R_{\Gamma}) - W(R_{\Gamma} \rightarrow r) = -\frac{GM_{\Gamma} m}{R_{\Gamma}} - GM_{\Gamma} m \left(\frac{1}{2R_{\Gamma}} - \frac{r^2}{2R_{\Gamma}^3} \right) \\ &= -\frac{3}{2} \frac{GM_{\Gamma} m}{R_{\Gamma}} + \frac{1}{2} \frac{GM_{\Gamma} m}{R_{\Gamma}^3} r^2 \end{aligned}$$

Προφανώς, η δυναμική ενέργεια στο κέντρο της Γης είναι

$$U(r=0) = -\frac{3}{2} \frac{GM_{\Gamma} m}{R_{\Gamma}}$$