



# Σχεδιασμός Υπογείων Έργων

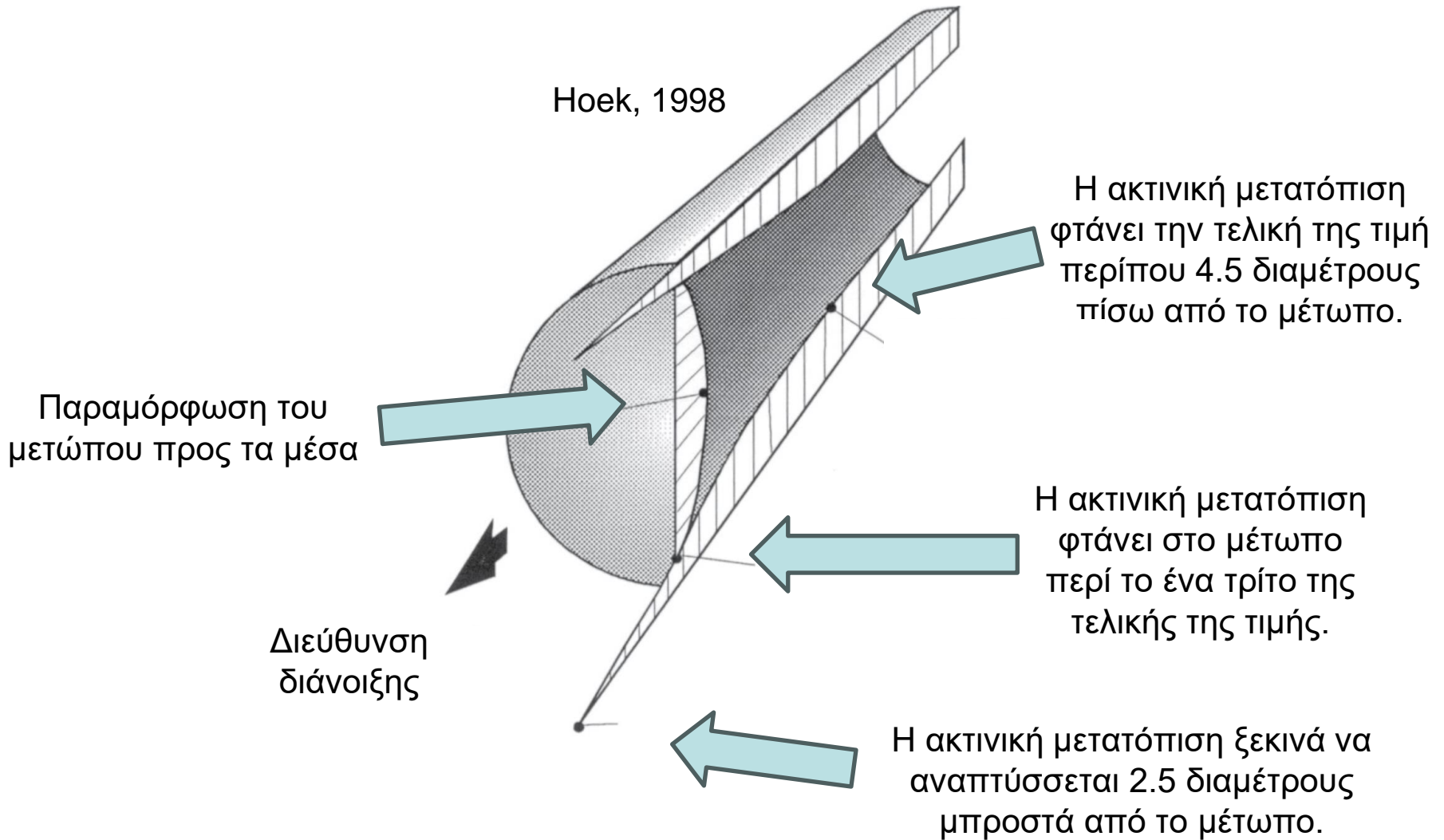
Αντώνης Ζερβός

Διαφάνειες βασισμένες σε διδακτικό υλικό του Καθηγ. Β. Παπαδόπουλου

**ΣΗΡΑΓΓΕΣ: ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ**

# Παραμορφώσεις κατά τη διάνοιξη

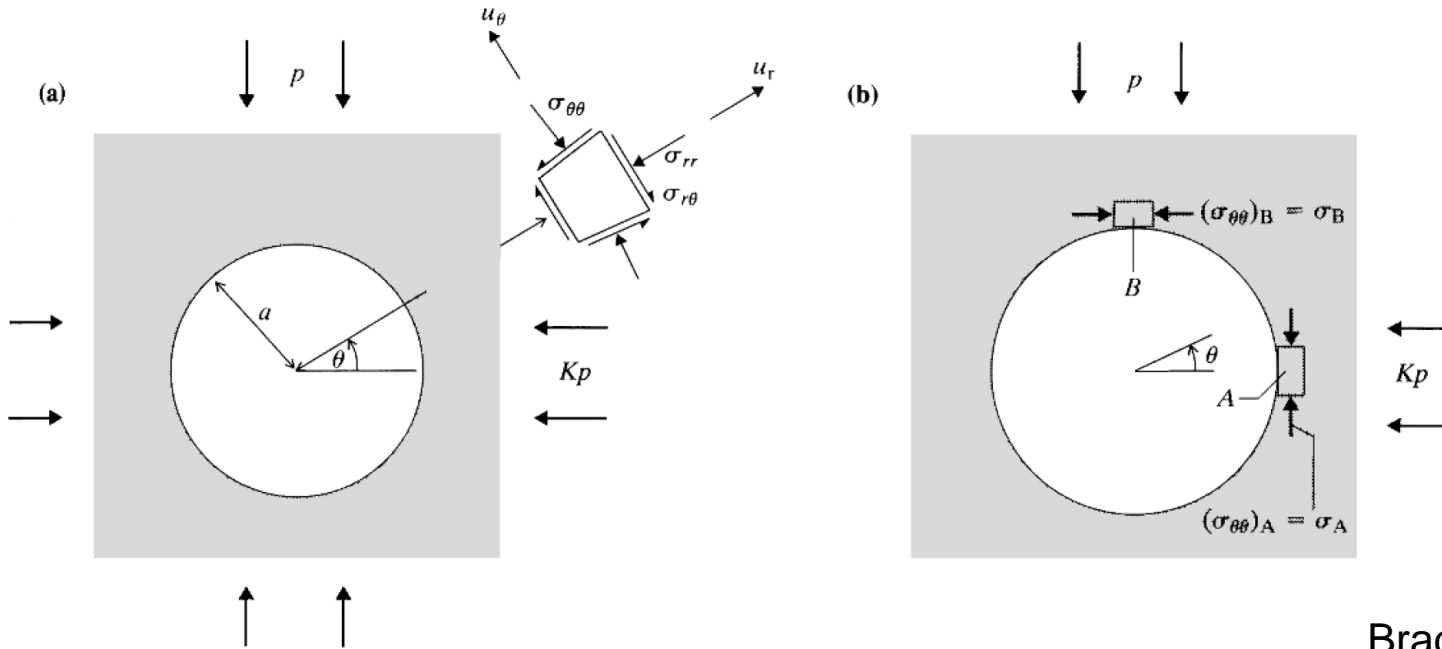
Hoek, 1998



# Γιατί γραμμική ελαστικότητα;

- Το πεδίο τάσεων προκύπτει λύνοντας τις εξισώσεις ισορροπίας.
  - Μικρή/καθόλου εξάρτηση από ελαστικές σταθερές.
  - Λύσεις «περίπου» σωστές και για ανελαστικά υλικά.
- Υπάρχουν λύσεις για διαφορετικές γεωμετρίες και φορτίσεις.
  - Π.χ. Elastic solutions for soil and rock mechanics, των Poulos και Davis.
- Χρήση της αρχής της επαλληλίας για πιο σύνθετα προβλήματα.

# Σήραγγα κυκλικής διατομής



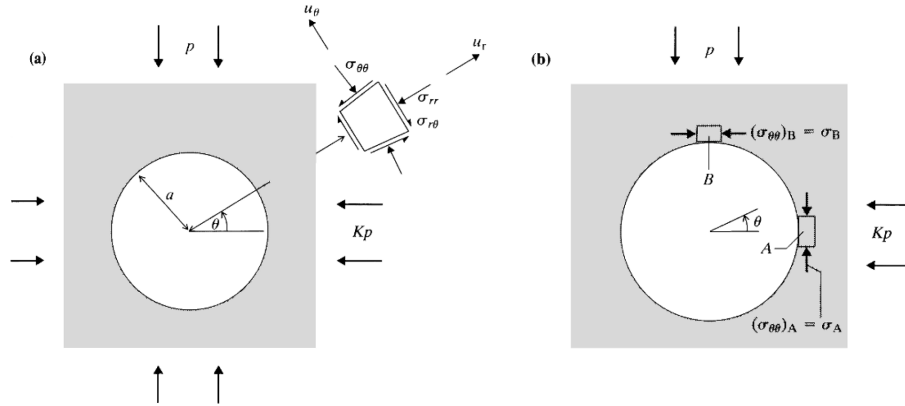
Brady and Brown, 2006

$$\sigma_{rr} = \frac{p}{2} \left[ (1 + K) \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) - (1 - K) \left( 1 - 4 \frac{a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{p}{2} \left[ (1 + K) \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + (1 - K) \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right]$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{p}{2} \left[ (1 - K) \left( 1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta \right]$$

Kirsch, 1898  
(Brady and Brown, 2006)



Brady and Brown, 2006

$$\sigma_{rr} = \frac{p}{2} \left[ (1 + K) \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) - (1 - K) \left( 1 - 4 \frac{a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{p}{2} \left[ (1 + K) \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + (1 - K) \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right]$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{p}{2} \left[ (1 - K) \left( 1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta \right]$$

Kirsch, 1898  
(Brady and Brown, 2006)

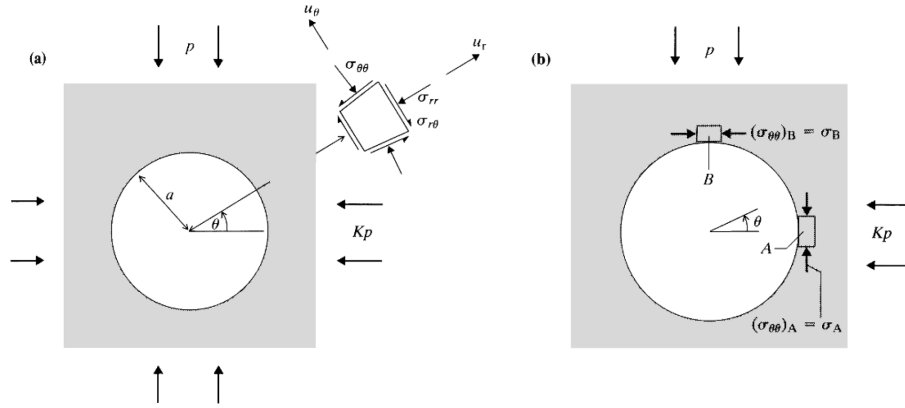
- $\Gamma \text{ia } r \rightarrow a:$ 

$$\sigma_{\theta\theta} = p[(1 + K) + 2(1 - K) \cos 2\theta]$$

$$\sigma_{rr} = 0$$

$$\sigma_{r\theta} = 0$$
- $\Gamma \text{ia } r \rightarrow \infty:$ 

$$\sigma_{rr} = Kp, \quad \sigma_{\theta\theta} = p, \quad \sigma_{r\theta} = 0$$



Brady and Brown, 2006

$$\sigma_{rr} = \frac{p}{2} \left[ (1 + K) \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) - (1 - K) \left( 1 - 4 \frac{a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{p}{2} \left[ (1 + K) \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + (1 - K) \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right]$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{p}{2} \left[ (1 - K) \left( 1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta \right]$$

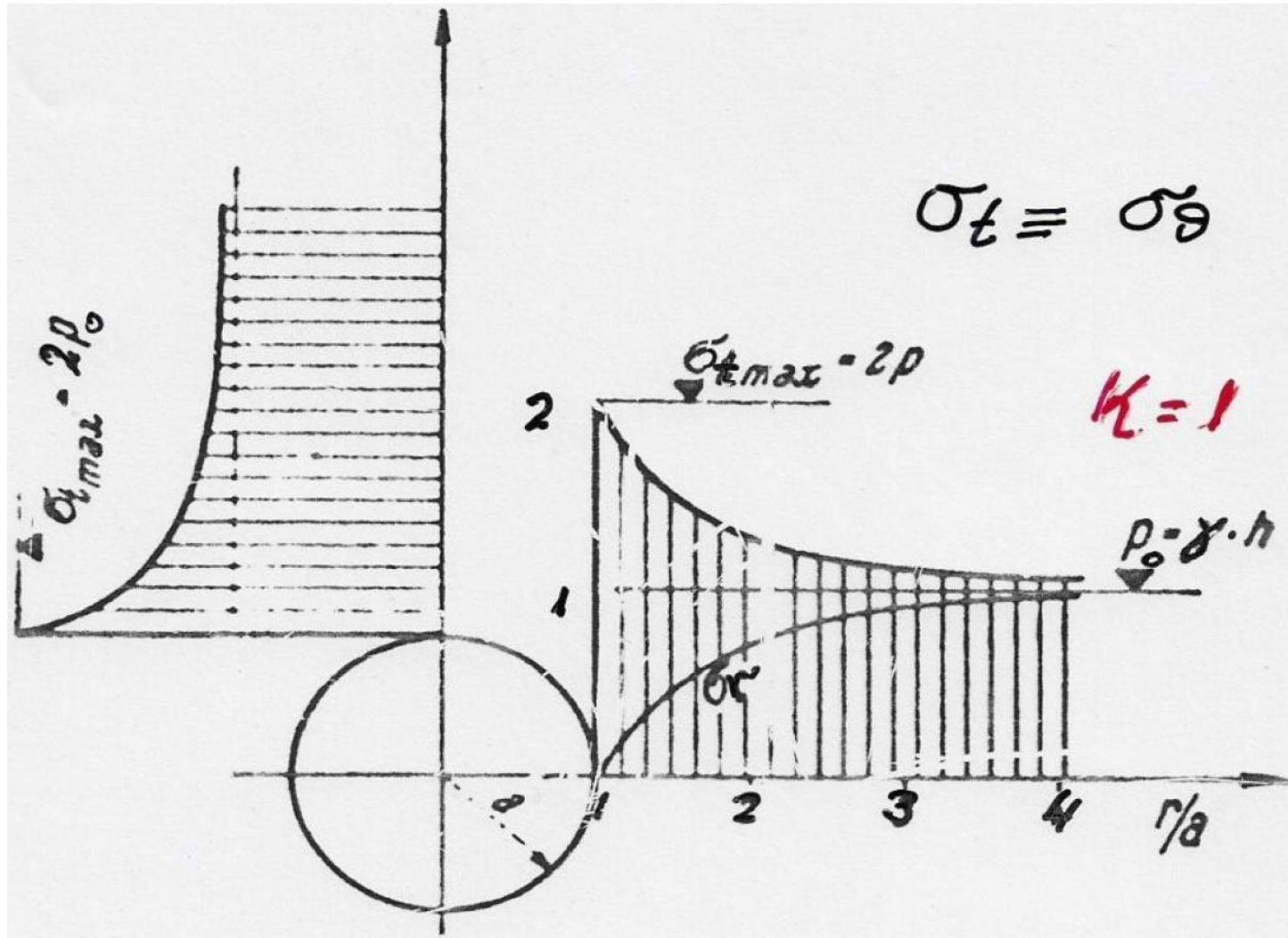
Kirsch, 1898  
(Brady and Brown, 2006)

Μετατοπίσεις: (σημ.:  $G = E / [2(1 + \nu)]$ )

$$u_r = -\frac{pa^2}{4Gr} \left[ (1 + K) - (1 - K) \left\{ 4(1 - \nu) - \frac{a^2}{r^2} \right\} \cos 2\theta \right]$$

$$u_\theta = -\frac{pa^2}{4Gr} \left[ (1 - K) \left\{ 2(1 - 2\nu) + \frac{a^2}{r^2} \right\} \sin 2\theta \right]$$

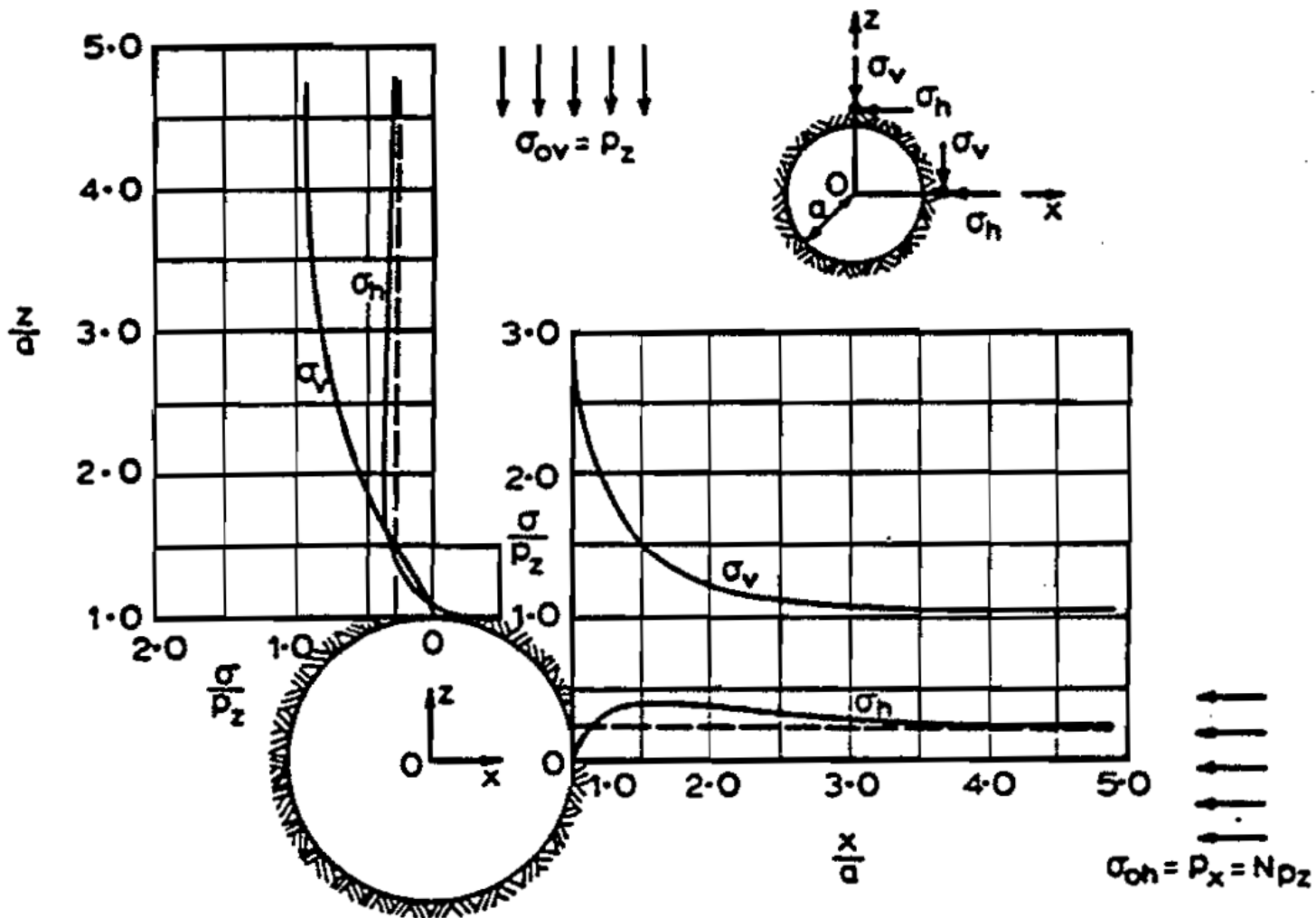
# Ενδεικτικές κατανομές τάσεων



(Από σημειώσεις Β. Παπαδόπουλου)

$\kappa = 1.0$

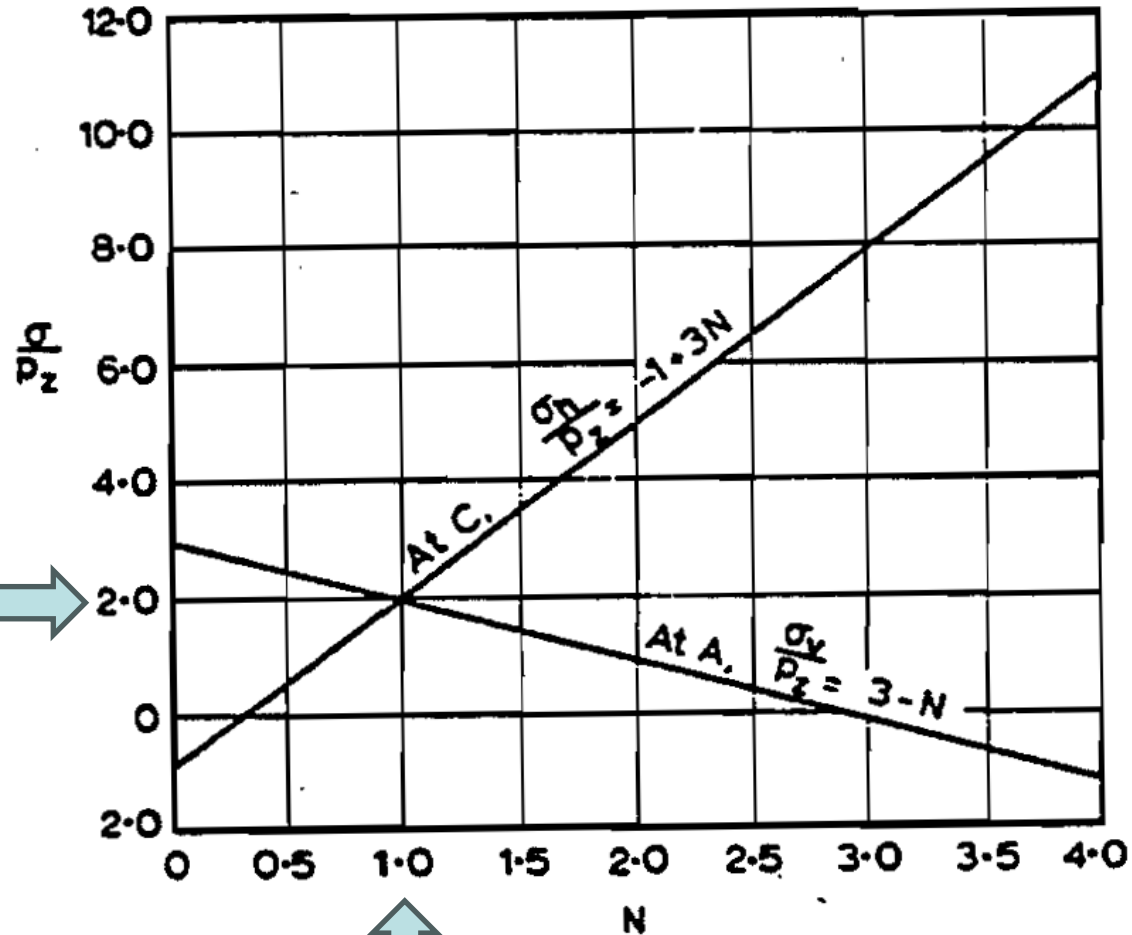
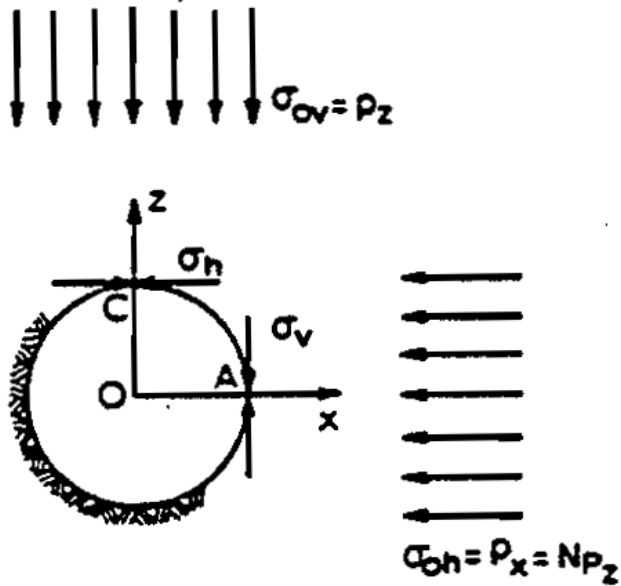




Terzaghi and Richart, 1952  
(Poulos and Davis, 1974)

$K=0.25$

# Ακραίες εφαπτομενικές τάσεις



# ΑΚΤΙΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ

$$u_r = -\frac{pa^2}{4Gr} \left[ (1 + K) - (1 - K) \left\{ 4(1 - \nu) - \frac{a^2}{r^2} \right\} \cos 2\theta \right]$$

- Στην άντυγα ( $r=a$ ):

$$u_r = -\frac{pa}{4G} [(1 + K) - (1 - K) \cdot 4(1 - \nu) \cdot \cos 2\theta]$$

- Στην άντυγα για  $K=1$ :  $u_r = -\frac{pa}{2G}$

- Στην άντυγα για  $K=0$ :

$$u_r = -\frac{pa}{4G} [1 - 4(1 - \nu) \cdot \cos 2\theta]$$

# Μέτρο ελαστικότητας βραχόμαζας

Κατά Hoek and Diederichs (2005):

$$E_{rm}(MPa) = 100000 \left( \frac{1-D/2}{1+e^{(75+25D-GSI)/11}} \right)$$

(απλουστευμένη)

$$E_{rm} = E_i \left( 0.02 + \frac{1-D/2}{1+e^{(60+15D-GSI)/11}} \right)$$

$$E_i = (MR)\sigma_{c,i}$$

MR: σταθερά παραμορφωσιμότητας (modulus ratio)

# ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΟΥ MR

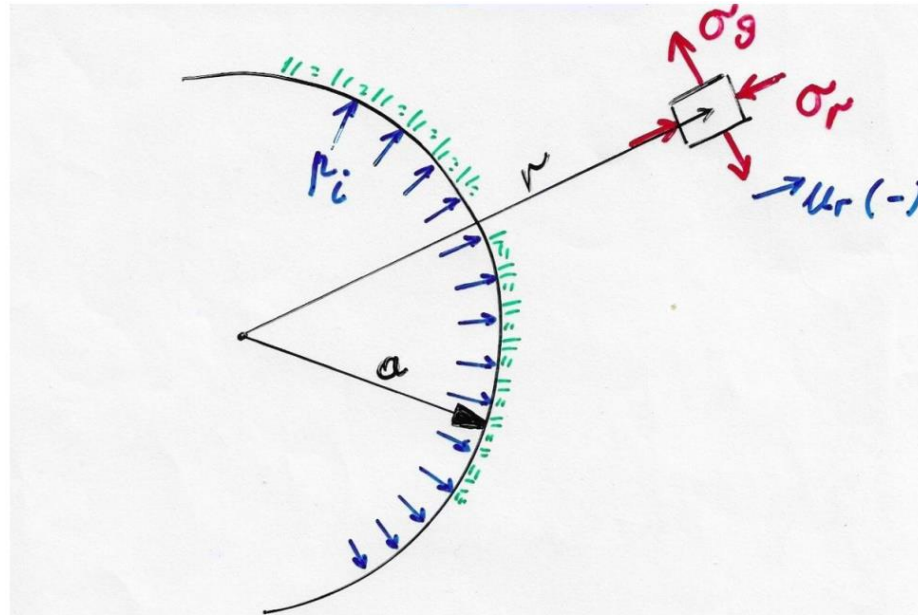
Rock type	Class	Group	Texture			
			Coarse	Medium	Fine	Very fine
Sedimentary	Clastic		Conglomerates 300–400 Breccias 230–350	Sandstones 200–350	Siltstones 350–400 Greywackes 350	Claystones 200–300 Shales 150–250 <sup>a</sup> Marls 150–200
	Non-clastic	Carbonates	Crystalline limestones 400–600	Sparitic limestones 600–800	Micritic Limestones 800–1000	Dolomites 350–500
		Evaporites		Gypsum (350) <sup>b</sup>	Anhydrite (350) <sup>b</sup>	
		Organic				Chalk 1000+
Metamorphic	Non-foliated		Marble 700–1000	Hornfels 400–700 Metasandstone 200–300	Quartzites 300–450	
	Slightly foliated		Migmatite 350–400	Amphibolites 400–500	Gneiss 300–750 <sup>a</sup>	
	Foliated <sup>a</sup>			Schists 250–1100 <sup>a</sup>	Phyllites/Mica Schist 300–800 <sup>a</sup>	Slates 400–600 <sup>a</sup>
Igneous	Plutonic	Light	Granite <sup>c</sup> 300–550 Granodiorite <sup>c</sup> 400–450	Diorite <sup>c</sup> 300–350		
		Dark	Gabbro 400–500 Norite 350–400	Dolerite 300–400		
	Hypabyssal			Porphyries (400) <sup>b</sup>	Diabase 300–350	Peridotite 250–300
	Volcanic	Lava		Rhyolite 300–500 Andesite 300–500	Dacite 350–450 Basalt 250–450	
		Pyroclastic	Agglomerate 400–600	Volcanic breccia (500) <sup>b</sup>	Tuff 200–400	

<sup>a</sup>Highly anisotropic rocks: the value of MR will be significantly different if normal strain and/or loading occurs parallel (high MR) or perpendicular (low MR) to a weakness plane. Uniaxial test loading direction should be equivalent to field application.

<sup>b</sup>No data available, estimated on the basis of geological logic.

<sup>c</sup>Felsic Granitoids: coarse grained or altered (high MR), fined grained (low MR).

# Εσωτερική πίεση $p_i$



ΠΙΕΣΕΙΣ ΜΟΝΟΝ ΛΟΓΩ ΤΗΣ  $p_i$

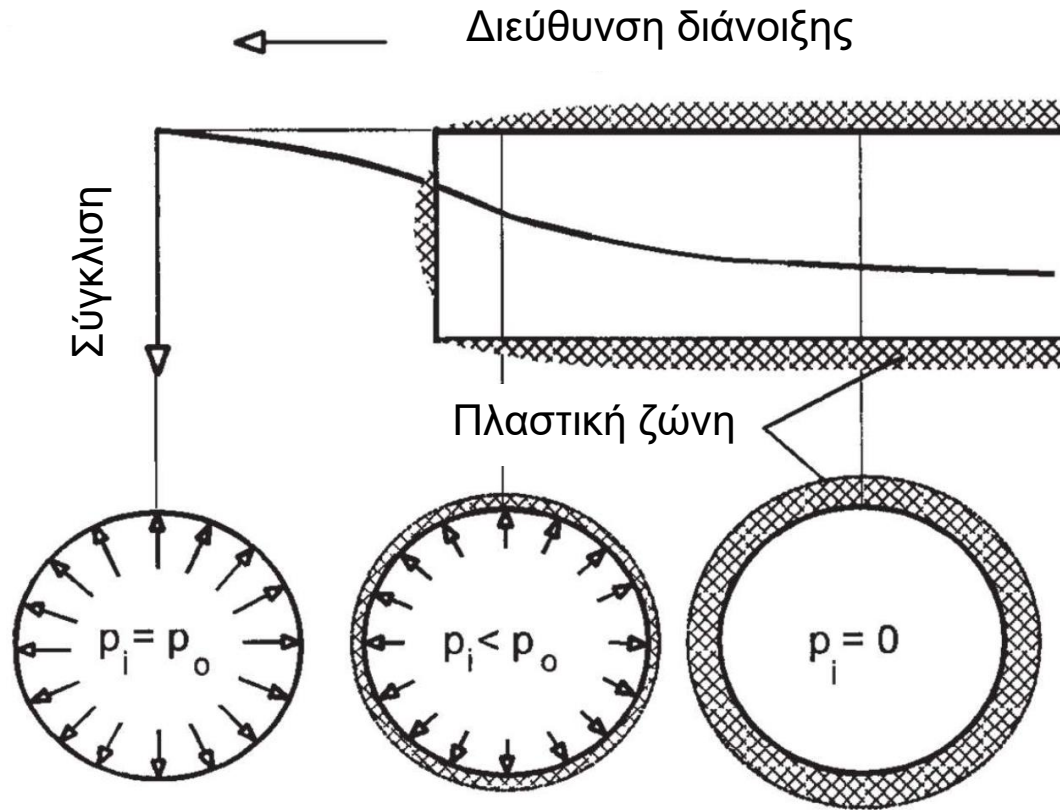
$$\sigma_r = + p_i \frac{a^2}{r^2} \quad (\text{θλιπτική})$$

$$\sigma_\theta = - p_i \frac{a^2}{r^2} \quad (\text{έφελκυστική})$$

$$(u_r = - \frac{p_i a (1+\nu)}{E})$$

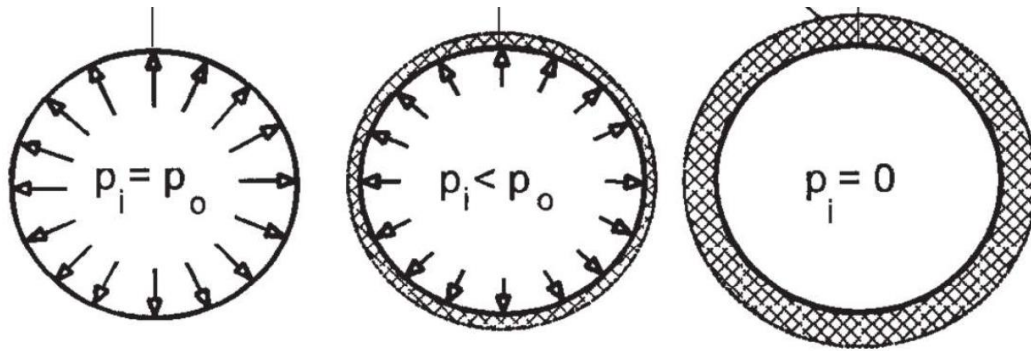
(Από σημειώσεις Β. Παπαδόπουλου)

# Προσομοίωμα ισοδύναμης πίεσης



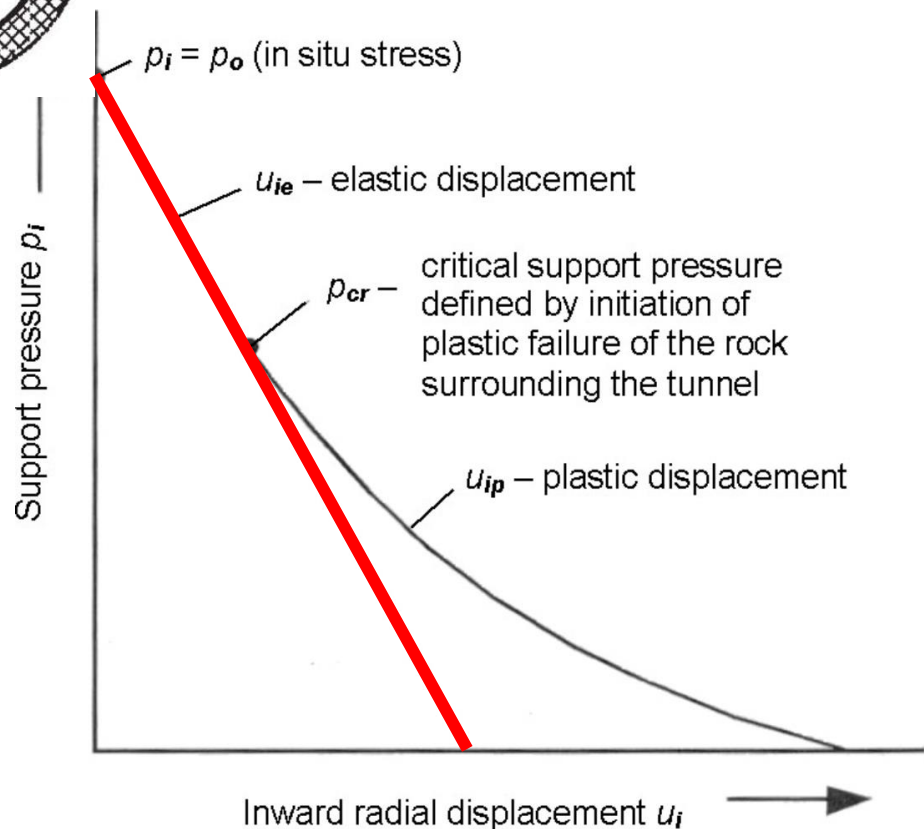
Πίεση υποστήριξης σε διαφορετικές θέσεις ως προς το μέτωπο.

# Αρχές της μεθόδου σύγκλισης-αποτόνωσης



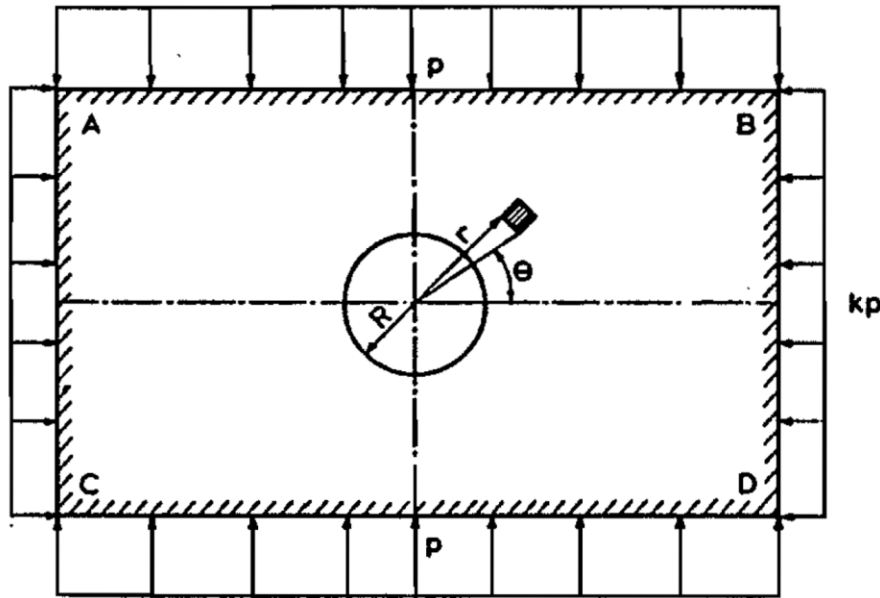
Για  $K=1$ ,  $u_r = \frac{a}{2G} (p_o - p_i)$

Καθώς το μέτωπο προωθείται,  $p_i \rightarrow 0$





# Επενδεδυμένη σήραγγα



Poulos and Davis, 1974

$$\sigma_r = \frac{1}{2}p \left\{ (1+k) \left[ 1 - a_1 \left( \frac{R}{r} \right)^2 \right] - (1-k) \left[ 1 - 3a_2 \left( \frac{R}{r} \right)^4 - 4a_3 \left( \frac{R}{r} \right)^2 \right] \cos 2\theta \right\}$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}p \left\{ (1+k) \left[ 1 + a_1 \left( \frac{R}{r} \right)^2 \right] + (1-k) \left[ 1 - 3a_2 \left( \frac{R}{r} \right)^4 \right] \cos 2\theta \right\}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{2}p(1-k) \left[ 1 + 3a_2 \left( \frac{R}{r} \right)^4 + 2a_3 \left( \frac{R}{r} \right)^2 \right] \sin 2\theta$$

# Πλήρης συνάφεια (NS) Ελεύθερη ολίσθηση (FS)

$$a_1 = \frac{(1-2\nu)(C-1)}{(1-2\nu)C+1}$$

$$a_2 = \frac{(1-2\nu)(1-C)F - \frac{1}{2}(1-2\nu)^2 C + 2}{[(3-2\nu)+(1-2\nu)C]F + (\frac{5}{2} - 8\nu + 6\nu^2)C + 6 - 8\nu}$$

$$a_3 = \frac{[1+(1-2\nu)C]F - \frac{1}{2}(1-2\nu)C - 2}{[(3-2\nu)+(1-2\nu)C]F + (\frac{5}{2} - 8\nu + 6\nu^2)C + 6 - 8\nu}$$

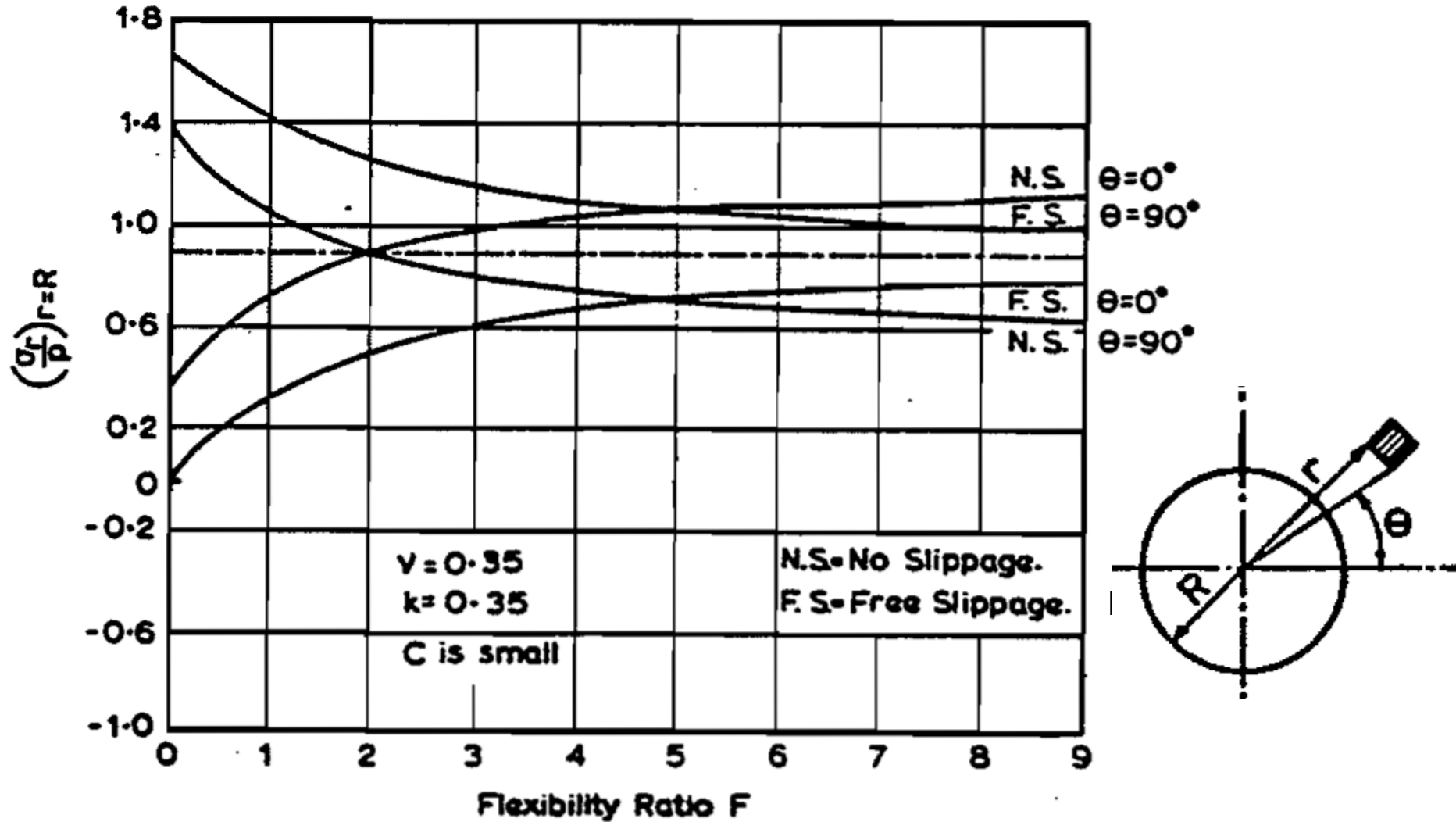
$$a_1 = \frac{(1-2\nu)(C-1)}{(1-2\nu)C+1}$$

$$a_2 = \frac{2F+1-2\nu}{2F+5-6\nu}$$

$$a_3 = \frac{2F-1}{2F+5-6\nu}$$

- $D$ : διάμετρος της σήραγγας.
- $t, E_c, \nu_c$ : πάχος και ελαστικές σταθερές επένδυσης
- Μέτρο μονοδιάστατης συμπίεσης:  $M = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$
- Λόγος συμπίεστότητας:  $C = \frac{1}{2} \frac{(1-\nu_c^2)}{(1-\nu)} \frac{M}{E_c} \left(\frac{D}{t}\right)$
- Λόγος ευκαμψίας:  $F = \frac{1}{4} \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} (1-\nu_c^2) \frac{M}{E_c} \left(\frac{D}{t}\right)^3$

# Ακτινική τάση επαφής ως συνάρτηση της ευκαμψίας



Στερεή (απαραμόρφωτη) επένδυση:  $C=F=0$

Τι γίνεται στα όρια; Για  $K = 1$  και  $r = a$ :

$$\sigma_r = p(1 - a_1)$$

$$\sigma_\theta = p(1 + a_1)$$

$$a_1 = \frac{(1 - 2\nu)(C - 1)}{(1 - 2\nu)C + 1}$$

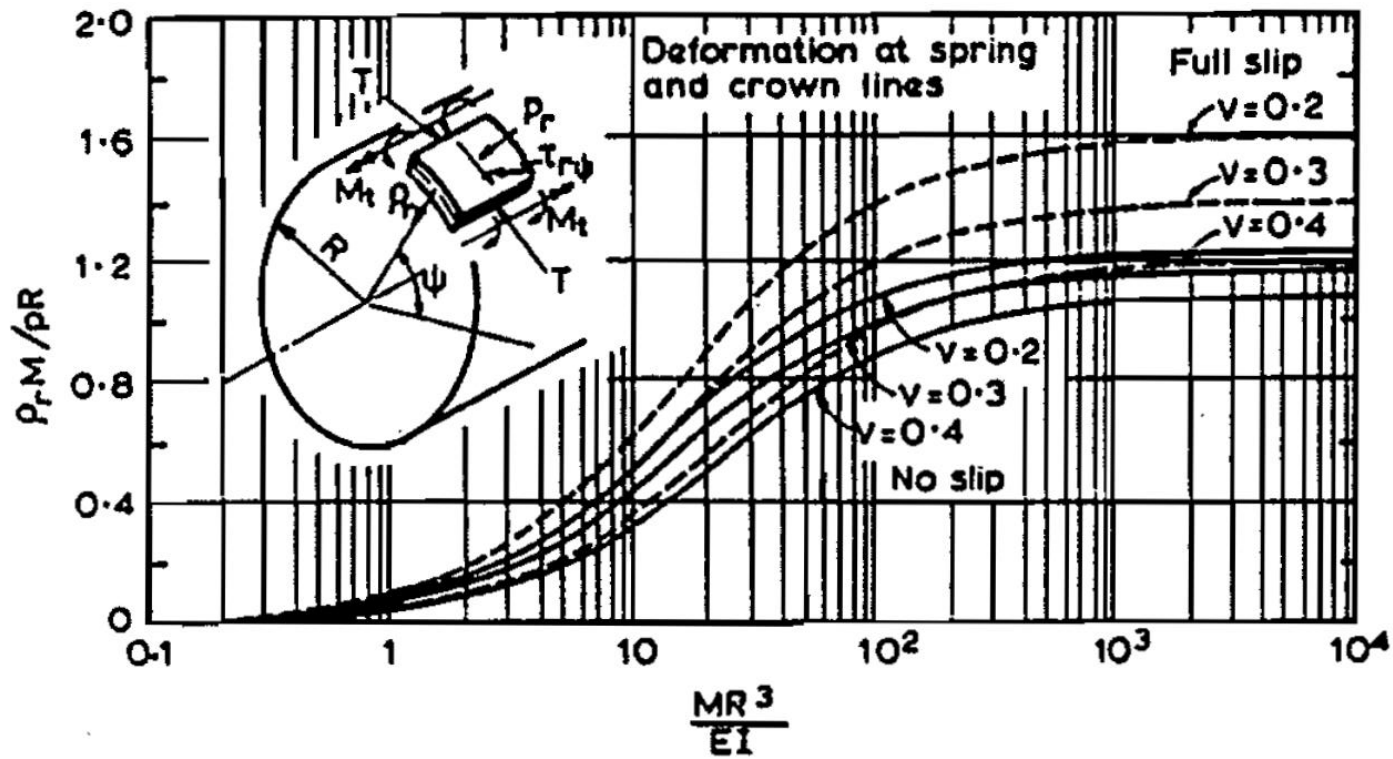
- Για στερεή (απαραμόρφωτη) επένδυση:

$$C = 0 \Rightarrow \sigma_r = 2p(1 - \nu), \sigma_\theta = 2p\nu$$

- Για (πάρα πολύ) εύκαμπτη επένδυση:

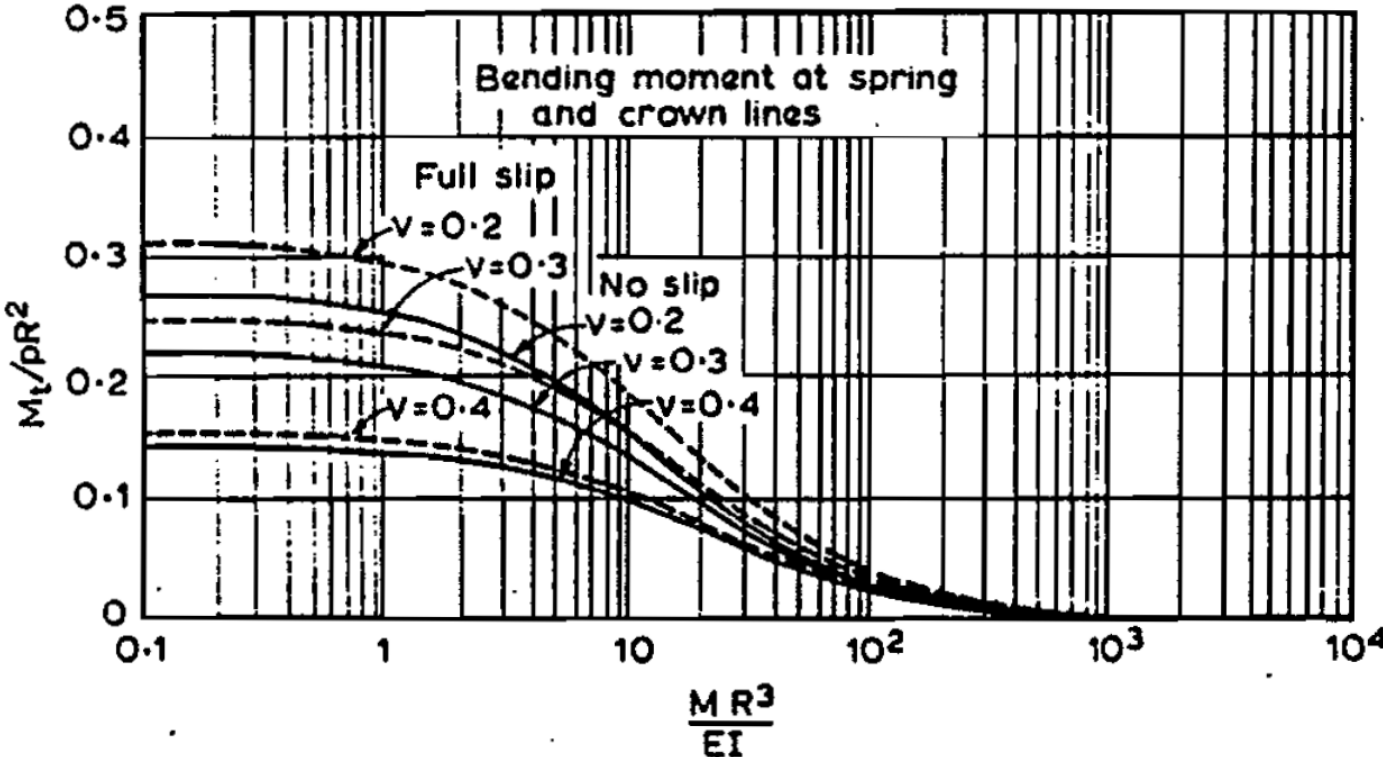
$$C \rightarrow \infty \Rightarrow \sigma_r \rightarrow 0, \sigma_\theta \rightarrow 2p$$

# Παραμόρφωση ως συνάρτηση της ευκαμψίας ( $K=0$ )



Kay and Krizek, 1970  
(Poulos and Davis, 1974)

# Ροπή κάμψης ως συνάρτηση της ευκαμψίας ( $K=0$ )



Kay and Krizek, 1970  
(Poulos and Davis, 1974)

**Άσκηση-B1:** Αποδείξτε ότι σε κυκλική, βαθιά, ανυποστήρικτη σήραγγα σε γραμμικά ελαστικό βράχο, οι ακραίες εφαπτομενικές τάσεις  $\sigma_{\theta, \min}$  και  $\sigma_{\theta, \max}$  αντιστοιχούν πάντα στα σημεία του ορίου (άντυγας) κατά την κατακόρυφη διάμετρο ( $C, C'$ ) ή την οριζόντια ( $A, A'$ ), ανάλογα με την τιμή του συντελεστή οριζόντιων ωθήσεων  $K$ .

Για ποιο διάστημα τιμών του  $K$  αντιστοιχεί στο  $C$  η  $\sigma_{\theta, \max}$  και για ποιο η  $\sigma_{\theta, \min}$ ;



**Άσκηση-B2:** Για την ανυποστήρικτη σήραγγα του Σχήματος, ακτίνας  $a=5\text{m}$ , σε γραμμικά ελαστικό βράχο, ζητούνται:

α) Οι ακτινικές παραμορφώσεις στα σημεία C και A για i)  $K = 1$ , και ii)  $K = 0$ .

β) Να χαραχθεί η θεωρητική γραμμή σύγκλισης-αποτόνωσης για την περίπτωση (i)

