Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

9ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

Άσκηση 1 (Ερωτήσεις Κατανόησης)**.** Απαντήστε στις ακόλουθες ερωτήσεις με αιτιολόγηση.

(i) Αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι δυναμοσειρά και το I είναι ανοικτό διάστημα τότε η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο I. Σωστό ή Λάθος;

(ii) Οι δυναμοσειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ και $\sum_{n=1339}^{\infty} a_n \cdot x^n$ συγκλίνουν ακριβώς για τα ίδια $x \in \mathbb{R}$. Σωστό ή Λάθος;

(iii) Αν δύο δυναμοσειρές έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης θα συγκλίνουν απαραίτητα για τα ίδια $x \in \mathbb{R}$;

(iv) Δίνεται μια δυναμοσειρά η οποία συγκλίνει για κάθε $x \in (3, 8)$ και αποκλίνει για $x = 8$. Ποιο είναι το κέντρο της δυναμοσειράς και ποια η ακτίνα σύγκλισής της;

Άσκηση 2 (Αναγνώριση δυναμοσειράς)**.** Βρείτε το κέντρο c και τους συντελεστές $a_n, n \in \mathbb{N}$ στις ακόλουθες δυναμοσειρές.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (x-1)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (7x-1)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (5x+3)^n.$$

Άσκηση 3 (Εύρεση διαστήματος σύγκλισης)**.**

(i) Για κάθε δυναμοσειρά της Άσκησης 2 βρείτε το σύνολων όλων των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η δυναμοσειρά συγκλίνει.

(ii) Επαναλάβετε το ίδιο για τις ακόλουθες δυναμοσειρές.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+5}}$$

Άσκηση 4 (Ανάπτυξη σε δυναμοσειρά)**.** Γράψτε τις ακόλουθες συναρτήσεις σε μορφή δυναμοσειράς σε κατάλληλα επιλεγμένα ανοικτά διαστήματα I:

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x} \quad x \neq -1, \qquad f_2(x) = \frac{1}{3-x} \quad x \neq 3,$$
$$f_3(x) = x \cdot \sin(x^2) \quad x \in \mathbb{R},$$
$$g_1(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad x \in \mathbb{R}, \qquad g_2(x) = \cos(x) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Στην τελευταία να γίνει χρήση της δυναμοσειράς του $\sin(x)$.

Υποδείξεις. Στις f_1 και f_2 χρησιμοποιείστε ότι $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$. Στην g_1 χρησιμοποιείστε ότι $\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2}$ και το Θεώρημα Παραγώγισης Δυναμοσειρών.

Άσκηση 5. Δείξτε με τη βοήθεια του Θεωρήματος Ολοκλήρωσης Δυναμοσειρών ότι

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n, \quad |x| < 1.$$

Υπόδειξη. Ισχύει $\ln(1+x) + c = \displaystyle\int \frac{1}{1+x}\, dx$. Αναπτύξτε το $\dfrac{1}{1+x}$ σε δυναμοσειρά και υπολογίστε τη σταθερά c.