γενικότερα αν p είναι πολυώνυμο
με $p(x) \geq 1$ για κάθε $x \geq 1$

τότε $\sqrt[n]{p(n)} \longrightarrow 1$.

π.χ. $\sqrt[n]{n^7 + n^6 + n^2} \longrightarrow 1$

3) Αν $a > 0$ τότε $\sqrt[n]{a} \longrightarrow 1$

π.χ. $\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \longrightarrow 1$

$\sqrt[n]{42} \longrightarrow 1$.

4) Ρητές συναρτήσεις $\frac{p(n)}{q(n)}$

Διαιρούμε με τον μεγιστοβάθμιο όρο αριθμητή και παρονομαστή

π.χ. $$\frac{n^3 - n^2 + 5}{6n^4 + n^3 + 1} = \frac{\frac{n^3}{n^4} - \frac{n^2}{n^4} + \frac{5}{n^4}}{\frac{6n^4}{n^4} + \frac{n^3}{n^4} + \frac{1}{n^4}}$$

$$= \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^4}}{6 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}} \longrightarrow \frac{0 - 0 + 5 \cdot 0}{6 + 0 + 0}$$

$$= \frac{0}{6} = 0$$

5) $$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq$$

Χρήση μόνο αυτών που έχουμε πει μέχρι τώρα

$$\leq \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \longrightarrow 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}} \longrightarrow \sqrt{0} = 0$$

Άρα $$0 \leq \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \longrightarrow 0$$

Συνεπώς $$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \longrightarrow 0$$

Κάνουμε δηλαδή πολλαπλασιασμό και διαίρεση με τη συζυγή παράσταση.

6) Αν $a, b > 0$ τότε

$$\sqrt[n]{a^n+b^n} \longrightarrow \max\{a, b\}$$

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι $b \geq a$.

Οπότε $\max\{a,b\} = b$

$$\sqrt[n]{a^n+b^n} \geq \sqrt[n]{b^n} = b$$

$$\sqrt[n]{a^n+b^n} \leq \sqrt[n]{b^n+b^n} = \sqrt[n]{2\cdot b^n} = b\sqrt[n]{2}$$

Άρα $b \le \sqrt[n]{a^n+b^n} \le b\sqrt[n]{2}$

$$\begin{array}{ccc} b & & b\sqrt[n]{2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ b & & b\cdot 1 = b \end{array}$$

Από το Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε

$$\sqrt[n]{a^n+b^n} \longrightarrow b$$

7) Όρια με μεταβλητό πλήθος όρων

Εδώ χρησιμοποιούμε συνήθως το Κριτήριο Παρεμβολής.

$$a_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{1^n+2^n+\dots+n^n}, \quad n \ge 1$$

$$1^n+\dots+n^n \le n^n+\dots+n^n$$

$1^n \le n^n$
$2^n \le n^n$

$$= n\cdot n^n$$

$$1^n+\dots+n^n \ge n^n$$

Άρα $n^n \le 1^n+\dots+n^n \le n\cdot n^n$

$$n \le \sqrt[n]{1^n+\dots+n^n} \le \sqrt[n]{n}\cdot n$$

$$1 \le \frac{1}{n}\sqrt[n]{1^n+\dots+n^n} \le \sqrt[n]{n}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & & \sqrt[n]{n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1 & & 1 \end{array}$$

Από το Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε
$a_n \to 1$.

Αξίωμα Μονότονης Φραγμένης Ακολουθίας

Κάθε αύξουσα άνω φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει σε έναν πραγματικό αριθμό.

- Η Αρχιμήδεια ιδιότητα αποδεικνύεται με βάση το πιο πάνω αξίωμα.
- Το πιο πάνω αξίωμα διατυπώνεται ισοδύναμα ως εξής:
  κάθε φθίνουσα κάτω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό.

Η ακολουθία $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, n \geq 1$

Αποδεικνύεται ότι:

a) η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ $\nearrow$ και

β) η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι άνω φραγμένη

Άρα η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό.

Ορίζουμε $\boxed{e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$

Αποδεικνύεται ότι $e \simeq 2,71$

$2 < e < 3$.

Παραδείγματα:

Θεωρούμε την $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$.

Τότε $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = a_{2n}$

Αφού $a_n \to e$, τότε $a_{2n} \to e$

Επίσης $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^2$

$\to e^2$

Κριτήριο μη σύγκλισης:

Δίνεται μια ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Αν υπάρχουν δύο υπακολουθίες $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ και $(a_{m_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ με:

$a_{k_n} \to \ell \in \mathbb{R}$, $a_{m_n} \to \ell' \in \mathbb{R}$

και $\ell \neq \ell'$ τότε η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

δεν συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό.

<u>Παράδειγμα:</u>

$a_n = (-1)^n \quad , \quad n \geq 1.$

Παίρνουμε τις υπακολουθίες $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

$$a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \longrightarrow 1$$

$$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \longrightarrow -1$$

Αφού $1 \neq -1$ έχουμε ότι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ δεν συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}$.

Προσοχή: $\dfrac{(-1)^n}{n} \longrightarrow 0$ γιατί

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{-\frac{1}{n}} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{n}}$$

<u>Πρόταση:</u>

Κάθε ακολουθία που συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}$ είναι φραγμένη.

2^{o} Κριτήριο μη σύγκλισης

Αν μια ακολουθία έχει μια μη φραγμένη υπακολουθία, τότε δεν συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό.

Π.χ.

$$a_n = \begin{cases} 2^n, & n = 3k \text{ για κάποιο } k \in \mathbb{N}^* \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Παίρνουμε την $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$a_{3n} = 2^{3n} = 8^n \geq n$$

Άρα η $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ δεν είναι φραγμένη.

Συνεπώς η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ δεν συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}$.

Ορολογία: Η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ λέγεται συγκλίνουσα αν συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό. Αλλιώς λέγεται αποκλίνουσα.

Σειρές:

Ορισμός: Δίνεται μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Ορίζουμε την ακολουθία $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ως εξής:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Δηλαδή $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει στο αριθμό $s \in \mathbb{R}$ αν ισχύει $S_n \to s$.

Σκεφτόμαστε το $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ σαν ένα "άπειρο άθροισμα" $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$.

Η ακολουθία $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ονομάζεται ακολουθία των <u>μερικών</u> <u>αθροισμάτων</u> της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Επίσης ταυτίζουμε μια σειρά με το όριό της (εφόσον αυτό υπάρχει) δηλαδή με το s πιο πάνω.

Με αυτή την ταύτιση έχουμε

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k} .$$

Παραδείγματα:

1) Γεωμετρική σειρά.

Δίνεται $x \in \mathbb{R}$ με $|x|<1$.

Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$.

Γνωρίζουμε ότι $\underbrace{x + x^2 + \cdots + x^n}_{S_n} = \frac{x(1-x^n)}{1-x}$

(απόδειξη με επαγωγή)

Επειδή $|x|<1$ έχουμε $x^n \to 0$

άρα $\frac{x(1-x^n)}{1-x} \to \frac{x \cdot (1-0)}{1-x} = \frac{x}{1-x}$

Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ συγκλίνει και

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} .$$

2) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ αποκλίνει.

Θεωρούμε $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = -1+1+\dots+(-1)^n$, $n \geq 1$.

$s_1 = -1$, $s_2 = -1+1 = 0$

$s_3 = -1+1-1 = -1$, $s_4 = s_3+1 = 0$

Γενικά ισχύει $s_{2n+1} = -1$

$s_{2n} = 0$

Η ακολουθία $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έχει δύο υπακολουθίες που συγκλίνουν σε διαφορετικούς πραγματικούς αριθμούς.
Επομένως δεν συγκλίνει.

Δηλαδή η $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ αποκλίνει.

Προσοχή: Στις σειρές δεν μπορούμε να κάνουμε αναδιατάξεις ή ομαδοποιήσεις.

3) Η αρμονική σειρά.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ονομάζεται αρμονική σειρά και αποκλίνει. (!)

Απόδειξη: Θέτουμε $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Αν η σειρά συνέκλινε θα υπήρχε $s \in \mathbb{R}$ με $s_n \to s$.

Άρα $s_{2n} \to s$ και

$$s_{2n} - s_n \to s - s = 0$$

Από την άλλη:

$$s_{2n} - s_n = 1 + \dots + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{2n} - \left(1 + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$\geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n-\text{όροι}}$$

$$= n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Δηλαδή $s_{2n} - s_n \geq \frac{1}{2}$ για κάθε $n \geq 1$.

Άτοπο γιατί είπαμε $s_{2n} - s_n \to 0$.

Πρόταση:

Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $a_n \to 0$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.
(π.χ. $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$)

Πρόταση:

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, όπου $p \in \mathbb{R}$,

συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$.

(Για $p = 1$ παίρνουμε την αρμονική σειρά που αποκλίνει).

Π.χ. Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

Πρόταση:

Αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

συγκλίνουν τότε και οι σειρές

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n)$, όπου $c \in \mathbb{R}$,

συγκλίνουν και ισχύει:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Ορισμός: Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

συγκλίνει απολύτως αν συγκλίνει

η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Πρόταση Αν μια σειρά συγκλίνει απολύτως τότε συγκλίνει (κανονικά). Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.

SOS Κριτήρια Σύγκλισης Σειρών SOS

1) Κριτήριο σύγκρισης

Αν $|a_n| \leq b_n$, $n \geq 1$ και αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως.

Π.χ. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sin(n^2)}{2^n}$ συγκλίνει απολύτως.

Γιατί: $\left| \frac{(-1)^n \sin n^2}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n}$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ συγκλίνει.

SOS 2) Το κριτήριο λόγου (D'Alembert)

Θεωρούμε ότι υπάρχει το όριο

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| .$$

α) Αν $\ell < 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως.

β) Αν $\ell > 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Επίσης αν $\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty$

τότε πάλι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Για $\ell = 1$ δεν έχουμε συμπέρασμα.

<u>π.χ.</u> Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ συγκλίνει

$$\left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 < 1 \right)$$