



Γραμμική Άλγεβρα

2. Ορίζουσες Τετραγωνικών Πινάκων

Κάλλια Παυλοπούλου

2022-2023

Ορίζουσα

Η ορίζουσα (determinant) είναι μία συνάρτηση

$$\det A: M_n \rightarrow \mathbb{R}$$

που σε κάθε τετραγωνικό πίνακα A διάστασης $n \times n$ αντιστοιχεί έναν πραγματικό αριθμό. Η τιμή της ορίζουσας του A συμβολίζεται με $\det A$ ή με $|A|$.

Ορίζουσα 2×2

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}$.

Η ορίζουσα του A είναι ο αριθμός :

$$\det A = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{21} \cdot \alpha_{12}$$

Ορίζουσα 3×3

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \in M_{3 \times 3}$.

Η ορίζουσα του A είναι ο αριθμός

$$\begin{aligned} \det A = & \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{33} + \alpha_{12} \cdot \alpha_{23} \cdot \alpha_{31} + \alpha_{13} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{32} \\ & - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{33} - \alpha_{11} \cdot \alpha_{23} \cdot \alpha_{32} - \alpha_{13} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{31} \end{aligned}$$

Υπολογισμός ορίζουσας 3×3 - Κανόνας του Sarrus

Ξαναγράφουμε τις δυο πρώτες στήλες δεξιά του αρχικού πίνακα και υπολογίζουμε τα έξι γινόμενα ως εξής:

Δίνεται ο πίνακας $A =$

$$\begin{array}{ccc|cc} (+) & (+) & (+) & (-) & (-) & (-) \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \end{array}$$

Παράδειγμα (εφαρμόζοντας κανόνα Sarrus):

$$\text{Δίνεται ο πίνακας } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in M_{3 \times 3}.$$

Λύση:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & - & - & - & \\ & & & 5 & 12 & 0 & \\ & & & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\ \det A = & \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & & & & \\ & & & \searrow & \searrow & \searrow & \\ & & & 0 & -3 & 0 & \\ & & & + & + & + & \end{array} = +0 + (-3) + 0 - 5 - 12 - 0 = -20$$

Ελάσσων πίνακας

Για $n > 2$, θα δώσουμε έναν αναδρομικό τύπο για την ορίζουσα με τη βοήθεια των οριζουσών κάποιων υπο-πινάκων του A διάστασης $(n - 1) \times (n - 1)$.

Οι πίνακες αυτοί, λέγονται **ελάσσονες (minor) πίνακες του A** και συμβολίζονται με A_{ij} . Ο A_{ij} είναι ο υπο-πίνακας του στοιχείου a_{ij} του A που προκύπτει από τον A αν αγνοήσουμε την i -γραμμή και την j -στήλη του A .

Παράδειγμα: Για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, ο ελάσσονας πίνακας A_{32} είναι ο

υποπίνακας διάστασης 2×2 που προκύπτει αν αγνοήσουμε την 3^η γραμμή και την 2^η στήλη του A . Πρόκειται λοιπόν για τον πίνακα $A_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

Ορίζουσα (υπολογισμός με ελάσσονες πίνακες)

Η ορίζουσα ενός πίνακα $A = [a_{ij}] \in M_n$ δίνεται από τον τύπο

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{21} \det A_{21} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1} \det A_{n1}$$

όπου A_{ij} οι ελάσσονες πίνακες του A .

Σημείωση: Στον παραπάνω τύπο η ανάπτυξη της ορίζουσας του πίνακα A έγινε ως προς τα στοιχεία της 1^{ης} στήλης. Η ορίζουσα του A μπορεί να υπολογιστεί με αντίστοιχη ανάπτυξη ως προς τα στοιχεία μίας οποιασδήποτε στήλης ή γραμμής.

Ορίζουσα (υπολογισμός με ελάσσονες πίνακες)

Η ορίζουσα ενός πίνακα $A = [a_{ij}] \in M_n$ για $n > 1$ δίνεται από τον τύπο

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}, \text{ για οποιαδήποτε γραμμή } i, 1 \leq i \leq n.$$

ή αντίστοιχα,

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}, \text{ για οποιαδήποτε στήλη } j, 1 \leq j \leq n.$$

όπου A_{ij} οι ελάσσονες πίνακες του A .

Σημείωση: Αν $n = 1$, τότε $\det A = a_{11}$.

Ο αριθμός $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ ονομάζεται **αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου a_{ij} (cofactor)**.

Παράδειγμα (υπολογίζοντας με ελάσσονες πίνακες):

Θα υπολογίσουμε την ορίζουσα του $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, του προηγούμενου παραδείγματος.

Ανάπτυγμα ως προς τα στοιχεία της 1^{ης} στήλης:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = +2 \cdot \det A_{11} - 0 \cdot \det A_{21} + 1 \cdot \det A_{31} =$$

$$= +2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-6) + 0 + (-3 - 5) = -12 - 8 = -20.$$

Μπορούμε να την υπολογίσουμε ως προς οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη, αρκεί να εφαρμόσουμε τον κανόνα της σκακιέρας για τα πρόσημα.

+	-	+
-	+	-
+	-	+

Παράδειγμα (υπολογίζοντας με ελάσσονες πίνακες):

Στην πράξη το ανάπτυγμα που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό μιας ορίζουσας είναι ως προς τη γραμμή ή τη στήλη που έχει τα περισσότερα μηδενικά στοιχεία.

$$\text{Π.χ. } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

+ - +

Α' τρόπος: Ανάπτυγμα ως προς τα στοιχεία της 3^{ης} γραμμής

$$\det B = |B| = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 3 - 2 \cdot 2) = 1$$

+ - +

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

Β' τρόπος: Ανάπτυγμα ως προς τα στοιχεία της 1^{ης} γραμμής

$$= +1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = -3 + 4 = 1$$

Ιδιότητες οριζουσών

- 1) Ανάστροφοι πίνακες έχουν την ίδια ορίζουσα $\det(A^T) = \det A$.
- 2) Η εναλλαγή δύο γραμμών (ή στηλών) επιφέρει αλλαγή στο πρόσημο της ορίζουσας $\det B = -\det A$.
- 3) Αν ο πίνακας A έχει δύο γραμμές ή στήλες ίσες ή ανάλογες (δηλ. η μία είναι το πολλαπλάσιο της άλλης), τότε $\det A = 0$.
- 4) Αν πολλαπλασιαστεί μία γραμμή ή στήλη με έναν αριθμό $\lambda \neq 0$ τότε όλη ορίζουσα πολλαπλασιάζεται επί λ , $\det B = \lambda \cdot \det A$. Κατά συνέπεια: $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det A$.
- 5) Αν ο πίνακας A έχει μία μηδενική γραμμή ή στήλη, τότε $\det A = 0$.
- 6) Μία ορίζουσα ανάγεται σε άθροισμα δυο οριζουσών αν κάθε στοιχείο μιας στήλης ή γραμμής είναι άθροισμα δύο προσθετέων.

Ιδιότητες οριζουσών (συνέχεια)

- 7) Η ορίζουσα του πίνακα δεν μεταβάλλεται αν σε μια γραμμή (ή στήλη) προσθέσω ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης $\det B = \det A$.
- 8) Αν ο πίνακας A είναι άνω τριγωνικός ή κάτω τριγωνικός, τότε η ορίζουσά του είναι ίση με το **γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του**. (Ειδικότερα η ορίζουσα του μοναδιαίου πίνακα είναι ίση με 1, δηλαδή $\det I_n = 1$.)
- 9) Το γινόμενο δύο οριζουσών είναι ίσο με την ορίζουσα του γινομένου τους, δηλαδή $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, όπου $A, B \in M_n$. Κατά συνέπεια: $\det(A^{-1}) = 1/\det A$.
- 10) Συνήθως $\det(A + B) \neq \det A + \det B$, όπου $A, B \in M_n$.

Ιδιότητες οριζουσών 6 και 7 (εφαρμογή σε ορίζουσα 3×3)

6) Μία ορίζουσα ανάγεται σε άθροισμα δυο οριζουσών αν κάθε στοιχείο μιας στήλης ή γραμμής είναι άθροισμα δύο προσθετέων.

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ b_1 + d_1 & b_2 + d_2 & b_3 + d_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

7) Η ορίζουσα του πίνακα δεν μεταβάλλεται αν σε μια γραμμή (ή στήλη) προσθέσω ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ b_1 + \lambda a_1 & b_2 + \lambda a_2 & b_3 + \lambda a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \lambda a_1 & \lambda a_2 & \lambda a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + 0 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Ιδιότητα οριζουσών 4 (εφαρμογή σε ορίζουσα 3×3)

Αν πολλαπλασιαστεί μία γραμμή με έναν αριθμό $\lambda \neq 0$ τότε όλη ορίζουσα πολλαπλασιάζεται επί λ , $\det B = \lambda \cdot \det A$.

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \lambda b_1 & \lambda b_2 & \lambda b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Κατά συνέπεια: $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det A$.

$$|\lambda A| = \begin{vmatrix} \lambda \alpha_1 & \lambda \alpha_2 & \lambda \alpha_3 \\ \lambda b_1 & \lambda b_2 & \lambda b_3 \\ \lambda c_1 & \lambda c_2 & \lambda c_3 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \lambda \cdot \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda^3 \cdot \det A$$

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα: $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

Λύση:

Θα χρησιμοποιήσουμε ιδιότητες οριζουσών με στόχο να μετατρέψουμε με κατάλληλους μετασχηματισμούς τον πίνακα σε **τριγωνικό** κι έτσι η ορίζουσά του θα υπολογιστεί εύκολα.

Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

Λύση:

$$\det C = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_2 &\rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 &\rightarrow L_3 + 2L_1 \\ L_4 &\rightarrow L_4 - 3L_1 \end{aligned}$$

Ιδιότητα 7

Ιδιότητα 8

$$\text{Άρα } \det C = 1 \cdot (+3) \cdot 6 \cdot (-1) = -18$$

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα $D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & -5 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Λύση

Θα προσπαθήσουμε να εμφανίσουμε μηδενικά με τη βοήθεια ιδιοτήτων των οριζουσών:

Ιδιότητα 7

$$\begin{aligned} L2 &\rightarrow L2 - L1 \\ L3 &\rightarrow L3 + L1 \end{aligned}$$

Ανάπτυγμα ως προς τα στοιχεία της 1^{ης} στήλης

Ιδιότητα 7

$$\begin{aligned} L2 &\rightarrow L2 - 3L1 \\ L3 &\rightarrow L3 + 3L1 \end{aligned}$$

$$\det D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & -5 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = +2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot (-4) = -24$$

Ανάπτυγμα ως προς τα στοιχεία της 1^{ης} στήλης

Ορίζουσα 2×2

Παράδειγμα 3: Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα: $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$.

Λύση:

Ιδιότητα 7

$C2 \rightarrow C2 - C1$
 $C3 \rightarrow C3 - C1$

$$\det E = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$$

Ανάπτυγμα ως προς τα στοιχεία της 1^{ης} γραμμής

Ορίζουσα 2 × 2

$$= (b-a)(c-a)(c+a) - (c-a)(b-a)(b+a) =$$

$$= (b-a)(c-a)(c+a-b-a) = \boxed{(b-a)(c-a)(c-b)}$$

Παράδειγμα 4 (ανάπτυγμα ως προς μία στήλη & ιδιότητες)

Να υπολογίσετε την ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & a & b & c \\ 2 & a & b & c \\ 7 & 15 & 5 & 10 \end{vmatrix}$$

Λύση:

Ανάπτυγμα ως προς τα στοιχεία της 1^{ης} στήλης

Ιδιότητα 3: δύο γραμμές ανάλογες

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & a & b & c \\ 2 & a & b & c \\ 7 & 15 & 5 & 10 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 15 & 5 & 10 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ a & b & c \\ 15 & 5 & 10 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0$$

Ιδιότητα 3: δύο ίσες γραμμές

Παράδειγμα 5

Αν η ορίζουσα του πίνακα A διάστασης 8×8 είναι ίση με -5 , να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα $-A$.

Λύση:

$$\det(-A) = \det(-1 \cdot A) = (-1)^8 \cdot \det A = \det A = -5$$

Ιδιότητα 4

Κάθε στήλη του A είναι πολλαπλασιασμένη με (-1) . Άρα αν βγάλω κοινό παράγοντα το (-1) από κάθε στήλη θα εμφανιστεί το (-1) οκτώ φορές! Γι'αυτό γράφουμε $(-1)^8$.