<u>Μάθημα 4º</u>

<u>Ευθεία στο χώρο τυπολόγιο</u>

Θα παρουσιάσουμε ένα χρήσιμο τυπολόγιο που θα αφορά στην ευθεία ως γεωμετρικό αντικείμενο του τρισδιάστατου χώρου.

Γωνία μεταξύ δύο ευθειών

Θεωρούμε ένα σημείο Ο του τρισδιάστατου χώρου και ένα Καρτεσιανό σύστημα αξόνων x, y και z με κέντρο το σημείο αυτό. Είδαμε ότι για μια ευθεία στο χώρο μπορούμε να προσδιορίσουμε την διανυσματική της εξίσωση εάν γνωρίζουμε δύο σημεία που ανήκουν σε αυτήν ή ένα σημείο το οποίο ανήκει σε αυτήν και ένα διάνυσμα στο οποίο είναι παράλληλο.

Έστω δύο ευθείες ε_1 και ε_2 του τρισδιάστατου χώρου με διανυσματικές εξισώσεις

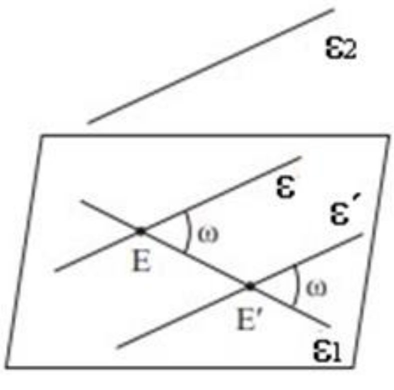
$$\bar{r}_1 : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t)) = (x_A + ta_1, y_A + tb_1, z_A + tc_1)$$
$$\bar{r}_2 : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}_2(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t)) = (x_B + ta_2, y_B + tb_2, z_B + tc_2)$$

Δηλαδή η ευθεία ε_1 περνά από το σημείο Α και είναι παράλληλη στο διάνυσμα (α_1,b_1,c_1) ενώ η ευθεία ε_2 περνά από το σημείο Β και είναι παράλληλη στο διάνυσμα (α_2,b_2,c_2).

Εάν οι ευθείες συμπίπτουν ή είναι παράλληλες τότε η γωνία μεταξύ τους είναι μηδενική. Εάν τέμνονται τότε είναι συνεπίπεδες και η γωνία μεταξύ τους ορίζεται όπως και στην περίπτωση του επιπέδου δηλαδή

$$\omega = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\langle (a_1,b_1,c_1),(a_2,b_2,c_2)\rangle}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right)$$

Μένει η περίπτωση όπου οι δύο ευθείες ε_1 και ε_2 είναι ασύμβατες. Στην περίπτωση αυτή από τυχαίο σημείο της ευθείας ε_1 φέρνουμε μια ευθεία ε η οποία είναι παράλληλη στην ε_2.



Ορίζουμε ως γωνία των δύο ασύμβατων ευθειών ε_1 και ε_2 την γωνία ω μεταξύ των ευθειών ε και ε_1.
Η γωνία ω ορίζεται με τον πιο πάνω τύπο.

Απόσταση σημείου από ευθεία

Θεωρούμε μια ευθεία ε με διανυσματική εξίσωση

$$\bar{r}:\Re \to \Re : t \to \bar{r}(t) = (x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc)$$

και ένα σημείο Α με συντεταγμένες (x_A, y_A, z_A). Η απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε ισούται με

$$d(A,\varepsilon) = \frac{\left\|(x_A - x_0, y_A - y_0, z_A - z_0)\times(a,b,c)\right\|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Κοινή κάθετος δύο ευθειών

Έστω δύο ευθείες ε_1 και ε_2 του τρισδιάστατου χώρου με διανυσματικές εξισώσεις

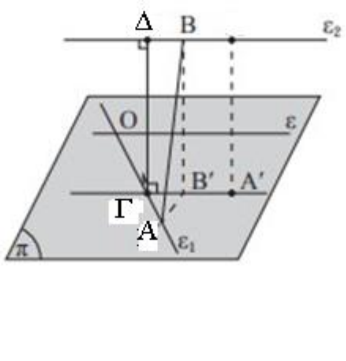
$$\bar{r}_1:\Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t)) = (x_A + ta_1, y_A + tb_1, z_A + tc_1)$$
$$\bar{r}_2:\Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}_2(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t)) = (x_B + ta_2, y_B + tb_2, z_B + tc_2)$$

Η κοινή κάθετος μεταξύ δύο ασύμβατων ευθειών ε_1 και ε_2 έχει δύο σημεία τομής με τις ευθείες αυτές. Έστω Γ το σημείο τομής με την ε_1 και Δ το σημείο τομής με την ε_2. Οι συντεταγμένες των δύο σημείων είναι

$$(x_\Gamma, y_\Gamma, z_\Gamma) = (x_A, y_A, z_A) + \\ + \frac{[(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A),(a_2,b_2,c_2),(a_1,b_1,c_1)\times(a_2,b_2,c_2)]}{\left\|(a_1,b_1,c_1)\times(a_2,b_2,c_2)\right\|^2}(a_1,b_1,c_1)$$
$$(x_\Delta, y_\Delta, z_\Delta) = (x_B, y_B, z_B) + \\ + \frac{[(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A),(a_1,b_1,c_1),(a_1,b_1,c_1)\times(a_2,b_2,c_2)]}{\left\|(a_1,b_1,c_1)\times(a_2,b_2,c_2)\right\|^2}(a_2,b_2,c_2)$$

Η εξίσωση της κοινής καθέτου των δύο ασύμβατων ευθειών είναι

$$\bar{r}_k:\Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}_k(t) = (x_\Gamma, y_\Gamma, z_\Gamma) + t(x_\Delta - x_\Gamma, y_\Delta - y_\Gamma, z_\Delta - z_\Gamma)$$



Προβολή σημείου πάνω σε ευθεία

Θεωρούμε μια ευθεία ε με διανυσματική εξίσωση

$$\bar{r}:\Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t(a,b,c)$$

και ένα σημείο Α = (x_A, y_A, z_A) που δεν ανήκει στην ευθεία ε. Θέλουμε να βρούμε την προβολή του σημείου Α πάνω στην ευθεία ε.

Έστω Β το σημείο που είναι η προβολή του σημείου Α. Τότε το διάνυσμα ΑΒ θα είναι κάθετο στην ευθεία ε δηλαδή θα ισχύει ότι

$$\langle (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A), (a,b,c) \rangle = 0 \Rightarrow a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A) + c(z_B - z_A) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ax_B + by_B + cz_B = ax_A + by_A + cz_A$$

Το σημείο Β είναι πάνω στην ευθεία ε επομένως υπάρχει τιμή t_0 της παραμέτρου t τέτοια ώστε

$$(x_B, y_B, z_B) = (x_0, y_0, z_0) + t_0(a,b,c) = \bar{r}(t_0)$$

Δηλαδή έχουμε και την σχέση

$$(x_B, y_B, z_B) = (x_0 + at_0, y_0 + bt_0, z_0 + ct_0)$$

Άρα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&ax_B + by_B + cz_B = ax_A + by_A + cz_A \Rightarrow \\
&a(x_0 + at_0) + b(y_0 + bt_0) + c(z_0 + t_0 c) = ax_A + by_A + cz_A \Rightarrow \\
&\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)t_0 = a(x_A - x_0) + b(y_A - y_0) + c(z_A - z_0) \Rightarrow \\
&\Rightarrow t_0 = \frac{a(x_A - x_0) + b(y_A - y_0) + c(z_A - z_0)}{(a^2 + b^2 + c^2)}
\end{aligned}$$

Επομένως οι συντεταγμένες του σημείου Β που είναι η ζητούμενη προβολή του σημείου Α πάνω στην ευθεία ε – έχει συντεταγμένες

$$(x_B, y_B, z_B) = (x_0, y_0, z_0) + \frac{a(x_A - x_0) + b(y_A - y_0) + c(z_A - z_0)}{(a^2 + b^2 + c^2)}(a,b,c)$$

Απόσταση μεταξύ δύο ευθειών

Έστω δύο ασύμβατες ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ του τρισδιάστατου χώρου με διανυσματικές εξισώσεις

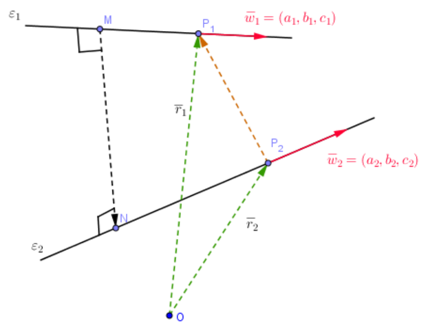
$$\bar{r}_1 : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t)) = (x_{P_1} + ta_1, y_{P_1} + tb_1, z_{P_1} + tc_1)$$
$$\bar{r}_2 : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}_2(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t)) = (x_{P_2} + ta_2, y_{P_2} + tb_2, z_{P_2} + tc_2)$$

Ορίζουμε ως απόσταση μεταξύ των δύο ευθειών το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος το οποίο ανήκει πάνω στην κοινή κάθετο των δύο ευθειών.

Το μήκος αυτό είναι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο ευθειών και ισούται με

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{\left\| \begin{vmatrix} x_{P_1} - x_{P_2} & y_{P_1} - y_{P_2} & z_{P_1} - z_{P_2} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right\|}{\|(a_1, b_1, c_1) \times (a_2, b_2, c_2)\|}$$

Θεωρούμε δύο ασύμβατες ευθείες ε_1 και ε_2 όπως στο παρακάτω σχήμα



Η απόσταση των δύο ευθειών είναι το μέτρο του διανύσματος MN. Το διάνυσμα αυτό είναι συγραμμικό με το διάνυσμα w_1 x w_2. Επειδή οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες στο φορέα του διανύσματος MN σημαίνει ότι η προβολή του διανύσματος P_2P_1 θα είναι ένα διάνυσμα το οποίο θα είναι ίσο ή αντίθετο με το διάνυσμα MN. Είναι

$$\langle \overline{P_2P_1}, \overline{w}_1 \times \overline{w}_2 \rangle = [\overline{P_2P_1}, \overline{w}_1, \overline{w}_2]$$

Αλλά ισχύει και

$$\overline{P_2P_1} = pr_{\frac{\overline{w}_1 \times \overline{w}_2}{\|\overline{w}_1 \times \overline{w}_2\|}} \overline{P_2P_1} + \overline{v}$$

Δηλαδή το διάνυσμα P_2P_1 το αναλύουμε σε δύο διανύσματα τα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους. Επομένως ισχύει ότι

$$\langle \overline{P_2P_1}, \overline{w}_1 \times \overline{w}_2 \rangle = \langle pr_{\frac{\overline{w}_1 \times \overline{w}_2}{\|\overline{w}_1 \times \overline{w}_2\|}} \overline{P_2P_1} + \overline{v}, \overline{w}_1 \times \overline{w}_2 \rangle = \langle pr_{\frac{\overline{w}_1 \times \overline{w}_2}{\|\overline{w}_1 \times \overline{w}_2\|}} \overline{P_2P_1}, \overline{w}_1 \times \overline{w}_2 \rangle + \langle \overline{v}, \overline{w}_1 \times \overline{w}_2 \rangle =$$

$$= \langle pr_{\frac{\overline{w}_1 \times \overline{w}_2}{\|\overline{w}_1 \times \overline{w}_2\|}} \overline{P_2P_1}, \overline{w}_1 \times \overline{w}_2 \rangle + 0 = \langle \langle \overline{P_2P_1}, \frac{\overline{w}_1 \times \overline{w}_2}{\|\overline{w}_1 \times \overline{w}_2\|} \rangle \frac{\overline{w}_1 \times \overline{w}_2}{\|\overline{w}_1 \times \overline{w}_2\|}, \overline{w}_1 \times \overline{w}_2 \rangle =$$

$$= \pm \langle \|\overline{MN}\| \frac{\overline{w}_1 \times \overline{w}_2}{\|\overline{w}_1 \times \overline{w}_2\|}, \overline{w}_1 \times \overline{w}_2 \rangle = \pm \|\overline{MN}\| \|\overline{w}_1 \times \overline{w}_2\|$$

Άρα

$$\left|[\overline{P_2P_1},\overline{w}_1,\overline{w}_2]\right| = \left\|\overline{MN}\right\|\left\|\overline{w}_1\times\overline{w}_2\right\| \Rightarrow \left|[\overline{r}_1-\overline{r}_2,\overline{w}_1,\overline{w}_2]\right| = \left\|\overline{w}_1\times\overline{w}_2\right\| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \frac{\left|[\overline{r}_1-\overline{r}_2,\overline{w}_1,\overline{w}_2]\right|}{\left\|\overline{w}_1\times\overline{w}_2\right\|}$$

Ειδική περίπτωση: Εάν οι ευθείες ε_1 και ε_2 ανήκουν στο επίπεδο xy και είναι παράλληλες δηλαδή έχουν αλγεβρικές εξισώσεις

$$y = a_1 + bx$$
$$y = a_2 + bx$$

τότε επιλέγουμε ένα σημείο στην δεύτερη ευθεία με συντεταγμένες $(0, \alpha_2)$ και η απόσταση του σημείου αυτού από την ευθεία ε_1 είναι η ζητούμενη απόστασή

$$d(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \frac{|a_2-a_1|}{\sqrt{1+b^2}}$$

Εάν οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες στο χώρο, τότε $(\alpha_1, b_1, c_1) = \lambda(\alpha_2, b_2, c_2)$ όπου λ πραγματικός αριθμός διάφορος του μηδενός. Εάν η ευθεία ε_1 διέρχεται από το σημείο A με Καρτεσιανές συντεταγμένες (x_A, y_A, z_A) και η ευθεία ε_2 διέρχεται από το σημείο B με Καρτεσιανές συντεταγμένες (x_B, y_B, z_B) τότε η απόσταση τους ισούται με

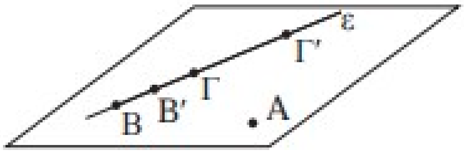
$$d(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \frac{\left\|(x_{P_2}-x_{P_1}, y_{P_2}-y_{P_1}, z_{P_2}-z_{P_1})\times(a_1,b_1,c_1)\right\|}{\sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}+c_1^{\,2}}}$$

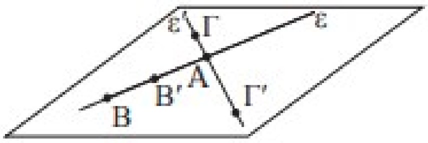
Αυτό γιατί στο προηγούμενο σχήμα έχουμε $w_1 = w_2$ και το τετράπλευρο P_1P_2MN είναι παραλληλόγραμμο με πλευρές P_1P_2 και $\left\|\overline{w}\right\|$. Άρα

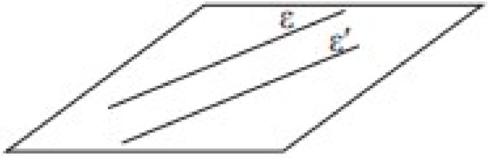
$$\left\|\overline{MN}\right\|\left\|\overline{w}_1\right\| = \left\|\overline{P_2P_1}\times\overline{w}_1\right\| \Rightarrow d(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \frac{\left\|(x_{P_2}-x_{P_1}, y_{P_2}-y_{P_1}, z_{P_2}-z_{P_1})\times(a_1,b_1,c_1)\right\|}{\sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}+c_1^{\,2}}}$$

Επίπεδα στον τρισδιάστατο χώρο

Γνωρίζουμε από την Ευκλείδεια γεωμετρία ότι ένα επίπεδο μπορεί να οριστεί με τέσσερεις τρόπους
α) από μία ευθεία και ένα σημείο που δεν ανήκει στην ευθεία
β) από δύο τεμνόμενες ευθείες
γ) από δύο παράλληλες ευθείες
δ) από τρία μη συνευθειακά σημεία







Οι τέσσερεις τρόποι αυτοί είναι ισοδύναμοι. Έστω O ένα σημείο του τρισδιάστατου χώρου και ένα Καρτεσιανό σύστημα αξόνων x, y και z με κέντρο το σημείο αυτό. Θα βρούμε μια εξίσωση του επιπέδου το οποίο ορίζουν δύο τεμνόμενες ευθείες. Έστω τρία σημεία του τρισδιάστατου χώρου τα οποία είναι τα

$$A=(x_A, y_A, z_A)$$
$$B=(x_B, y_B, z_B)$$
$$C=(x_C, y_C, z_C)$$

Από αυτά τα τρία σημεία περνά ένα επίπεδο. Ορίζουμε τα παρακάτω διανύσματα

$$\bar{a}=(a_1, a_2, a_3)=(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A)$$
$$\bar{b}=(b_1, b_2, b_3)=(x_C-x_A, y_C-y_A, z_C-z_A)$$

Ορίζουμε τις παρακάτω ευθείες

$$\bar{r}_1:\Re\to\Re^3: u\to\bar{r}_1(u)=(x_A, y_A, z_A)+u(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A)$$
$$\bar{r}_2:\Re\to\Re^3: v\to\bar{r}_1(v)=(x_A, y_A, z_A)+v(x_C-x_A, y_C-y_A, z_C-z_A)$$

Έχουμε επίσης και

$$\bar{r}_1:\Re\to\Re^3: u\to\bar{r}_1(u)=(x_A, y_A, z_A)+u\bar{a}$$
$$\bar{r}_2:\Re\to\Re^3: v\to\bar{r}_2(v)=(x_A, y_A, z_A)+v\bar{b}$$

Οι δύο παραπάνω ευθείες τέμνονται στο σημείο A γιατί εάν θέσουμε u = v = 0 τότε
$$\bar{r}_1(0)=(x_A, y_A, z_A)$$
$$\bar{r}_2(0)=(x_A, y_A, z_A)$$

Επομένως οι δύο (τεμνόμενες) παραπάνω ευθείες ορίζουν ένα επίπεδο. Κάθε διάνυσμα με συντεταγμένες (x, y, z) το οποίο έχει ως αρχή το σημείο A και είναι γραμμικώς εξαρτημένο από τα διανύσματα u και v έχει συντεταγμένες

$$(x, y, z)=u\bar{a}+v\bar{b}=u(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A)+v(x_C-x_A, y_C-y_A, z_C-z_A)\ ,\ u, v\in\Re$$

Το σύνολο όμως των διανυσμάτων αυτών με αρχή το σημείο Α είναι ένα διανυσματικό επίπεδο, επομένως η διανυσματική εξίσωση του ζητούμενου επιπέδου είναι

$$\bar{r}:\Re^2 \to \Re^3 : (u,v) \to \bar{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) =$$
$$= (x_A, y_A, z_A) + u(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) + v(x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A)$$

ή

$$\bar{r}:\Re^2 \to \Re^3 : (u,v) \to \bar{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = (x_A, y_A, z_A) + u\bar{a} + v\bar{b}$$

Θα βρούμε την εξίσωση ενός επιπέδου το οποίο περνά από τρία δοθέντα σημεία

$$A = (x_A, y_A, z_A)$$
$$B = (x_B, y_B, z_B)$$
$$C = (x_C, y_C, z_C)$$

Έστω (x, y, z) ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου που ψάχνουμε. Σχηματίζουμε τις διαφορές

$$(x - x_A, y - y_A, z - z_A) = \bar{a}$$
$$(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = \bar{b}$$
$$(x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A) = \bar{c}$$

Οι παραπάνω διαφορές μπορούν να θεωρηθούν και ως οι συντεταγμένες τριών διανυσμάτων $\bar{a}, \bar{b}$ και $\bar{c}$ τα οποία εφ' όσον ανήκουν στο επίπεδο που ψάχνουμε είναι συνεπίπεδα. Όμως από την θεωρία γνωρίζουμε ότι όταν τρία διανύσματα είναι συνεπίπεδα το μεικτό τους γινόμενο είναι ίσο με το μηδέν άρα

$$[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση για το επίπεδο που ψάχνουμε είναι αλγεβρικής μορφής. Η παραπάνω ορίζουσα μπορεί να προκύψει και από την ανάπτυξη της παρακάτω ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Άρα και η παραπάνω ορίζουσα είναι και αυτή εξίσωση του επιπέδου που ψάχναμε.

Στην συνέχεια θα δούμε πως μπορούμε να βρούμε εξίσωση ενός επιπέδου από την δομή του εσωτερικού γινομένου στον τρισδιάστατο χώρο.

Έστω ένα διάνυσμα

$$\bar{n} = (a_1, a_2, a_3)$$

το οποίο έχει ως αρχή ένα σημείο A με συντεταγμένες (x_A, y_A, z_A). Θεωρούμε και όλα τα σημεία του χώρου με συντεταγμένες (x, y, z) τέτοια ώστε

$$\langle \bar{n}, (x - x_A, y - y_A, z - z_A) \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (a_1, a_2, a_3), (x - x_A, y - y_A, z - z_A) \rangle = 0$$

Η οικογένεια των διανυσμάτων με συντεταγμένες ($x - x_A$, $y - y_A$, $z - z_A$) είναι διανύσματα τα οποία είναι κάθετα στο διάνυσμα $\bar{n}$. Άρα και οι φορείς των διανυσμάτων αυτών είναι κάθετοι στον φορέα του διανύσματος $\bar{n}$. Οι κάθετοι φορείς αυτοί τέμνονται όλοι στο σημείο A άρα ορίζουν ένα επίπεδο. Επομένως η εξίσωση του επιπέδου που ψάχνουμε είναι η

$$\langle (a_1, a_2, a_3), (x - x_A, y - y_A, z - z_A) \rangle = 0 \Leftrightarrow a_1 x + a_2 y + a_3 z + (-a_1 x_A - a_2 y_A - a_3 z_A) = 0$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση του επιπέδου που ψάχναμε είναι πάλι της μορφής Ax+By+Γz+Δ = 0

Σχόλιο: Η διανυσματική εξίσωση ενός επιπέδου πχ η

$$\bar{r} : \Re^2 \to \Re^3 : (u, v) \to \bar{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) =$$
$$= (x_A, y_A, z_A) + u(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) + v(x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A)$$

γράφεται σε παραμετρική μορφή

$$x(u, v) \equiv x = x_A + u(x_B - x_A) + v(x_C - x_A)$$
$$y(u, v) \equiv y = y_A + u(y_B - y_A) + v(y_C - y_A)$$
$$z(u, v) \equiv z = z_A + u(z_B - z_A) + v(z_C - z_A)$$

Έστω ένα επίπεδο με αλγεβρική εξίσωση Ax + By + Γz + Δ = 0 με τον συντελεστή Γ να είναι διάφορος του μηδενός. Τότε μπορούμε να εκφράσουμε την αλγεβρική εξίσωση του επιπέδου ως

$$Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{Ax + By + \Delta}{\Gamma}, \ \Gamma \neq 0$$

<u>Χρήσιμο τυπολόγιο</u>

Είδαμε ότι όταν έχουμε ως δεδομένο ένα κάθετο διάνυσμα (α_1, α_2, α_3) σε ένα επίπεδο τότε η εξίσωση του επιπέδου γράφεται σαν

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z + (-a_1 x_A - a_2 y_A - a_3 z_A) = 0$$

Αυτό σημαίνει ότι εάν η εξίσωση του επιπέδου δίδεται σαν Ax + By + Γz + Δ = 0 τότε ένα κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο έχει συντεταγμένες (Α, Β, Γ). Επομένως και κάθε διάνυσμα (A_1, B_1, Γ_1) = λ(Α, Β, Γ), (λ πραγματικός αριθμός) είναι κάθετο στο επίπεδο. *Άρα ένα διάνυσμα (α, b, c) είναι κάθετο στο επίπεδο αν ισχύει ότι*

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{\Gamma} = \lambda$$

Εάν το διάνυσμα (α, b, c) είναι κάθετο σε ένα επίπεδο με εξίσωση Ax+By+Γz+Δ=0 τότε κάθε διάνυσμα (α_1, b_1, c_1) που είναι κάθετο στο (α, b, c) είτε ανήκει στο επίπεδο είτε είναι παράλληλο στο επίπεδο.
Άρα ένα διάνυσμα (α_1, b_1, c_1) είναι παράλληλο στο δοθέν επίπεδο ή είναι πάνω στο επίπεδο εάν ισχύει ότι

$$\langle (a_1, b_1, c_1), (A, B, \Gamma) \rangle = 0 \Rightarrow a_1 A + b_1 B + c_1 \Gamma = 0$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

Δύο επίπεδα με εξισώσεις

$$A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0$$
$$A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0$$

είναι παράλληλα εάν ισχύει ότι

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \lambda \ , \ \lambda \in \Re$$

ταυτίζονται εάν ισχύει ότι

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \lambda \ , \ \lambda \in \Re$$

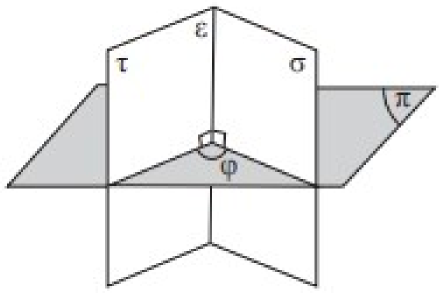
και είναι κάθετα εάν ισχύει ότι

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + \Gamma_1 \Gamma_2 = 0$$

Έστω δύο επίπεδα τ και σ με εξισώσεις

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

Έστω ότι τα δύο αυτά επίπεδα τέμνονται κατά μήκος μια ευθείας ε.



Ονομάζουμε γωνία μεταξύ των δύο επιπέδων τ και σ την γωνία που σχηματίζεται τις μεταξύ των δύο καθέτων διανυσμάτων τους

Η γωνία αυτή ισούται με

$$\phi = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}\right)$$

Γωνία μεταξύ ευθείας και ενός επιπέδου

Έστω μια ευθεία ε η οποία διέρχεται από τα σημεία Ν και Μ με διανυσματική εξίσωση

$$\bar{r} : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}(t) = (x_N, y_N, z_N) + t(x_M - x_N, y_M - y_N, z_M - z_N)$$

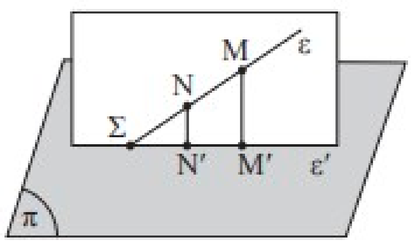
Έστω ένα επίπεδο Π με εξίσωση Αx + Βy + Γz + Δ = 0. Είδαμε ότι το διάνυσμα με συντεταγμένες (Α, Β, Γ) είναι κάθετο στο επίπεδο. Η γωνία μεταξύ της ευθείας ε και του διανύσματος (Α, Β, Γ) ισούται με

$$\omega = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\langle (A,B,\Gamma),(x_M - x_N, y_M - y_N, z_M - z_N)\rangle}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}\sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2 + (z_M - z_N)^2}}\right)$$

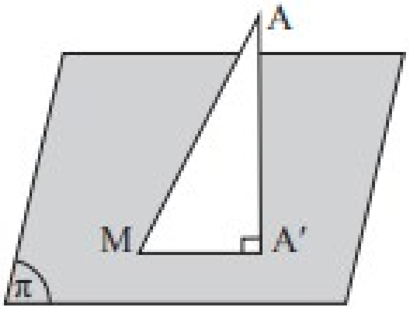
Ορίζουμε ως γωνία θ μεταξύ της ευθείας ε και του επιπέδου Π το μέγεθος

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \omega$$

Άρα εάν ω = 0 τότε η ευθεία ε είναι κάθετη στο επίπεδο Π.



Ορίζουμε ως κάθετη ή ορθή προβολή ενός σημείου Α της ευθείας ε στο επίπεδο Π το σημείο που προκύπτει ως η τομή μεταξύ του επιπέδου Π και της κάθετης ευθείας που περνά από το σημείο Α.



Μια ευθεία ε ονομάζεται παράλληλη ως προς ένα επίπεδο εάν δεν έχει κανένα κοινό σημείο με το επίπεδο.

Απόσταση σημείου από επίπεδο

Έστω ένα σημείο Α με συντεταγμένες (x_A, y_A, z_A) και ένα επίπεδο Π με εξίσωση Ax+By+Γz+Δ=0. Η απόσταση του σημείου Μ από το επίπεδο ισούται με

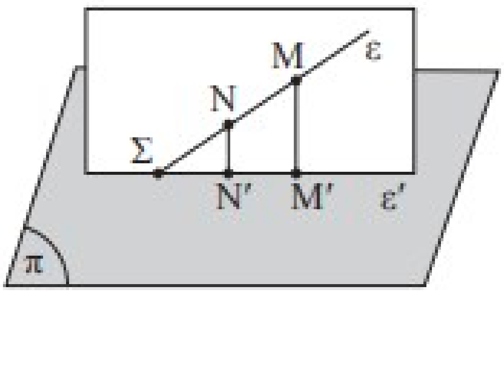
$$d(A,\Pi)=\frac{|Ax_A+By_A+\Gamma z_A+\Delta|}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}$$

Σχόλιο: Οι συντεταγμένες του σημείου Α΄ που είναι η ορθή προβολή του σημείου Α στο επίπεδο Π δίδονται από την παρακάτω σχέση

$$(x_{A'},y_{A'},z_{A'})=(x_A,y_A,z_A)+t_0\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}(A,B,\Gamma)\ ,t_0=-\frac{Ax_A+By_A+\Gamma z_A+\Delta}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}$$

Σχόλιο: Εάν θέλουμε την προβολή μιας ευθείας ε πάνω στο επίπεδο τότε επιλέγουμε δύο αυθαίρετα σημεία Μ και Ν πάνω στην ευθεία ε και βρίσκουμε τις προβολές τους Μ΄ και Ν΄ πάνω στο επίπεδο σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο. Έτσι η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι

$$\bar{r}:\Re\to\Re^3:t\to\bar{r}(t)=(x_{M'},y_{M'},z_{M'})+t(x_{M'}-x_{N'},y_{M'}-y_{N'},z_{M'}-z_{N'})$$



Απόσταση μεταξύ δύο παραλλήλων επιπέδων

Έστω δύο παράλληλα επίπεδα Π_1, Π_2 με εξισώσεις $A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=0$ και $A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2=0$. Για να βρούμε την απόσταση μεταξύ τους επιλέγουμε ένα τυχαίο σημείο Ε πάνω στο πρώτο επίπεδο. Μπορούμε να επιλέξουμε το σημείο αυτό να είναι πάνω στον άξονα z οπότε οι συντεταγμένες του θα είναι $(0, 0, -\Delta_1/\Gamma_1)$. Η απόσταση μεταξύ των δύο επιπέδων βρίσκεται εφαρμόζοντας την σχέση απόστασης σημείου από επίπεδο και ισούται με

$$d(\mathrm{E},\Pi_2)=d(\Pi_1,\Pi_2)=\frac{\left|-\Gamma_2\dfrac{\Delta_1}{\Gamma_1}+\Delta_2\right|}{\sqrt{A_2^{\,2}+B_2^{\,2}+\Gamma_2^{\,2}}}=\frac{1}{|\Gamma_1|\sqrt{A_2^{\,2}+B_2^{\,2}+\Gamma_2^{\,2}}}\left\|\begin{matrix}\Gamma_1 & \Delta_1\\ \Gamma_2 & \Delta_2\end{matrix}\right\|$$

<u>*Παραδείγματα*</u>

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν οι εξισώσεις μιας ευθείας που περνά από το σημείο (1,2,0) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\bar{a}=(2,1,3)$

Η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας σε διανυσματική μορφή είναι

$$\bar{r}:\Re\to\Re^3: t\to\bar{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))=(1,2,0)+t(2,1,3)=(1+2t,2+t,3t)$$

Σε συμμετρική μορφή η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$x(t)\equiv x=1+2t\Rightarrow t=\frac{x-1}{2}$$
$$y(t)\equiv y=2+t\Rightarrow t=y-2$$
$$z(t)\equiv z=3t\Rightarrow t=\frac{z}{3}$$

Αφού τα πρώτα μέλη είναι ίσα σημαίνει ότι θα είναι και τα δεύτερα άρα η ζητούμενη συμμετρική μορφή είναι

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{3}$$

Παράδειγμα 2

Να βρεθούν οι εξισώσεις μιας ευθείας που περνά από το σημείο (1,2,0) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\bar{a}=(2,0,3)$

Η διανυσματική εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι

$$\bar{r}:\Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (1,2,0) + t(2,0,3) = (1+2t, 2, 3t)$$

$$x(t) \equiv x = 1 + 2t \Rightarrow t = \frac{x-1}{2}$$

$$z(t) \equiv z = 3t \Rightarrow t = \frac{z}{3}$$

Η εξίσωση σε συμμετρική μορφή της παραπάνω ευθείας είναι

$$\frac{x-1}{2} = \frac{z}{3} \ , \ y = 2$$

Παράδειγμα 3

Να βρεθούν οι εξισώσεις τις ευθείας που διέρχεται από τα σημεία (-2,1,3) και (4,2,-2)

Η διανυσματική εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι

$$\begin{aligned}\bar{r}:\Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) &= (-2,1,3) + t(4-(-2), 2-1, -2-3)) = \\ &= (-2+6t, 1+t, 3-5t)\end{aligned}$$

Η συμμετρική μορφή της εξίσωσης της ζητούμενης ευθείας είναι

$$\frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-5}$$

Παράδειγμα 4

Να βρεθεί η προβολή του σημείου Α = (1, 4, 5) πάνω στην ευθεία ε με εξίσωση

$$\bar{r}:\Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}(t) = (-3,4,1) + t(1,3,2) = (-3+t, 4+3t, 1+2t)$$

Στην συνέχεια να βρεθεί η απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε και το συμμετρικό του από την ίδια ευθεία.

Έστω Β = (x_B, y_B, z_B) η προβολή του σημείου Α πάνω στην ευθεία ε. Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$(x_B, y_B, z_B) = (x_0, y_0, z_0) + \frac{a(x_A - x_0) + b(y_A - y_0) + c(z_A - z_0)}{(a^2 + b^2 + c^2)}(a, b, c)$$

Στην περίπτωσή μας (x_0, y_0, z_0) = (-3, 4, 1) και (a, b, c) = (1, 3, 2) επομένως

$$(x_B, y_B, z_B) = (-3,4,1) + \frac{1(1-(-3)) + 3(4-4) + 2(5-1)}{(1^2 + 3^2 + 2^2)}(1,3,2) =$$

$$= (-3,4,1) + \frac{12}{14}(1,3,2) = (-3,4,1) + \frac{6}{7}(1,3,2) = \left(-\frac{15}{7}, \frac{56}{7}, \frac{19}{7}\right)$$

Η απόστασή του από την ευθεία ε ισούται με

$$d(A,\varepsilon) = \frac{\left\|(x_A - x_0, y_A - y_0, z_A - z_0) \times (a,b,c)\right\|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\left\|(4,0,4) \times (1,3,2)\right\|}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{304}}{\sqrt{14}}$$

Έστω C = (x_C, y_C, z_C) το συμμετρικό σημείο του σημείου Α ως προς την ευθεία ε. Οι συντεταγμένες του βρίσκονται από τον τύπο

$$C = (2x_B - x_A, 2y_B - y_A, 2z_B - z_A) = \left(-\frac{15}{7} - 1, \frac{56}{7} - 4, \frac{19}{7} - 5\right) = \left(-\frac{22}{7}, \frac{18}{7}, -\frac{14}{7}\right)$$

Παράδειγμα 5

Δίδονται οι εξισώσεις δύο ευθειών

$$\bar{r}_1 : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}_1(t) = (1,2,3) + t(1,3,2) = (1+t, 2+3t, 3+2t)$$
$$\bar{r}_2 : \Re \to \Re^3 : s \to \bar{r}_2(s) = (1,7,4) + s(-a,b,-5) = (1-as, 7+bs, 4-5s)$$

Να βρεθούν οι τιμές των α και b έτσι ώστε οι δύο ευθείες να είναι ασύμβατες ή παράλληλες.

Για να είναι ασύμβατες πρέπει να ισχύει ότι

$$\begin{vmatrix} 1-1 & 2-7 & 3-4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -a & b & -5 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -a & b & -5 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 7a - b - 25 \neq 0 \Rightarrow 7a - b \neq 25$$

Για να είναι παράλληλες αρκεί να ισχύει ότι

$$(-a, b, -5) = \lambda(1,3,2) \Rightarrow a = -\lambda \ , \ b = 3\lambda \ , \ -5 = 2\lambda$$

Το παραπάνω σύστημα έχει λύση για λ = -5 / 2 άρα για να είναι οι δύο ευθείες παράλληλες πρέπει α = 5 / 2 και b = -15 / 2.

Παράδειγμα 6

Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που περνά από τα σημεία (1,2,0), (0,1,3) και (1,0,1)

Είναι

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x + y + 2z - 7 = 0$$

Παράδειγμα 7

Να βρεθούν οι εξισώσεις της ευθείας η οποία είναι η τομή δύο επιπέδων με εξισώσεις

$$2x + 3y - 3z - 4 = 0$$
$$x + 2y - z + 3 = 0$$

Για να βρούμε τις εξισώσεις τις παραπάνω ευθείας ξεκινάμε να βρούμε την εξίσωση που είναι η πιο εύκολη να βρεθεί. Λύνουμε τις δύο παραπάνω εξισώσεις ως προς x και y

$$2x + 3y = 3z + 4$$
$$x + 2y = z - 3$$

Είναι

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \ , \ D_x = \begin{vmatrix} 3z+4 & 3 \\ z-3 & 2 \end{vmatrix} = 3z + 17 \ , \ D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3z+4 \\ 1 & z-3 \end{vmatrix} = -z - 10$$

Επομένως η λύση είναι

$$x = \frac{D_x}{D} \Rightarrow x = 3z + 17$$
$$y = \frac{D_y}{D} \Rightarrow y = -(z + 10)$$

Θέτοντας z = t βρίσκουμε την διανυσματική μορφή της εξίσωσης της ευθείας είναι

$$\bar{r} : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (3t + 17, -(t + 10), t)$$

Η παραμετρική μορφή της εξίσωσης της ευθείας είναι

$$x(t) = 3t + 17$$
$$y(t) = -(t + 10)$$
$$z(t) = t$$

Η συμμετρική μορφή είναι

$$\frac{x-17}{3}=\frac{10-y}{1}=\frac{z}{1}$$

Παράδειγμα 8

Βρείτε τις διανυσματικές εξισώσεις των δύο ευθειών που περιγράφονται από τις παρακάτω εξισώσεις σε συμμετρική μορφή

$$\frac{x+5}{2}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-5}{4} \quad , \quad \frac{x+2}{-3}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-3}{2}$$

και στην συνέχεια εξετάστε εάν τέμνονται.

Οι διανυσματικές εξισώσεις των δύο ευθειών βρίσκονται ακολουθώντας την αντίστροφη διαδικασία δηλαδή

$$\frac{x+5}{2}=t \Rightarrow x=2t-5 \quad , \quad \frac{x+2}{-3}=s \Rightarrow x=-3s-2$$
$$\frac{y-5}{1}=t \Rightarrow y=t+5 \quad , \quad \frac{y-5}{1}=s \Rightarrow y=s+5$$
$$\frac{z-5}{4}=t \Rightarrow z=4t+5 \quad , \quad \frac{z-3}{2}=s \Rightarrow z=2s+3$$

Οι διανυσματικές εξισώσεις των δύο ευθειών είναι

$$\bar{r}_1:\Re\to\Re^3: t\to\bar{r}_1(t)=(x(t),y(t),z(t))=(2t-5,t+5,4t+5)$$
$$\bar{r}_2:\Re\to\Re^3: s\to\bar{r}_2(s)=(x(s),y(s),z(s))=(-3s-2,s+5,2s+3)$$

Για να δούμε εάν οι δύο ευθείες τέμνονται σχηματίζουμε το σύστημα

$$\begin{array}{lll} 2t-5=-3s-2 & 2t+3s=3 & s=\frac{3}{5} \\ t+5=s+5 & \Rightarrow t-s=0 & \Rightarrow t=s \\ 4t+5=2s+3 & 4t-2s=-2 & s=\frac{1}{2} \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι δεν έχουμε μοναδική λύση για το παραπάνω σύστημα άρα οι δύο ευθείες δεν τέμνονται.

Παράδειγμα 9

Βρείτε την γωνία μεταξύ των δύο ευθειών με διανυσματικές εξισώσεις

$$\bar{r}_1 : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}_1(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (6t+1, -3t-2, 6t+4)$$
$$\bar{r}_2 : \Re \to \Re^3 : s \to \bar{r}_2(s) = (x(s), y(s), z(s)) = (3s-2, 6s+3, -2s-4)$$

Οι παραπάνω διανυσματικές εξισώσεις γράφονται σαν

$$\bar{r}_1 : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}_1(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (1,-2,4) + t(6,-3,6)$$
$$\bar{r}_2 : \Re \to \Re^3 : s \to \bar{r}_2(s) = (x(s), y(s), z(s)) = (-2,3,-4) + s(3,6,-2)$$

Επομένως η πρώτη ευθεία περνά από το σημείο (1, -2, 4) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα (6, -3, 6) και η δεύτερη περνά από το σημείο (-2,3,-4) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα (3,6,-2). Επομένως η γωνία των δύο ευθειών ισούται με την γωνία των δύο διανυσμάτων δηλαδή

$$\omega = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\langle (6,-3,6),(3,6,-2)\rangle}{\sqrt{6^2+(-3)^2+6^2}\sqrt{3^2+6^2+(-2)^2}}\right) = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{-12}{9+7}\right) = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{12}{17}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \omega = 45^0{,}1$$

Παράδειγμα 10

Να βρεθεί η αλγεβρική και η διανυσματική εξίσωση του επιπέδου που περνά από τα σημεία (1,1,1), (1,2,3) και (3,3,3).

Η αλγεβρική εξίσωση του επιπέδου βρίσκεται από την ανάπτυξη της παρακάτω ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2x + 4y - 2z = 0$$

Για να βρούμε την διανυσματική εξίσωση του επιπέδου αρκεί να βρούμε δύο διανύσματα που κείνται σε αυτό. Τα διανύσματα αυτά είναι τα

$$\bar{a} = (1,2,3) - (1,1,1) = (0,1,2)$$
$$\bar{b} = (3,3,3) - (1,1,1) = (2,2,2)$$

Τα παραπάνω δύο διανύσματα έχουν κοινή αρχή το σημείο με συντεταγμένες (1,1,1). Επομένως η ζητούμενη διανυσματική εξίσωση του επιπέδου είναι

$$\bar{r}_p : \Re^2 \to \Re^3 : (u,v) \to \bar{r}_p(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = (1,1,1) + u\bar{a} + v\bar{b} =$$
$$= (1+2v, 1+u+2v, 2+2u+2v)$$

Παράδειγμα 11

Δίδεται ένα επίπεδο με αλγεβρική εξίσωση 5x + y + 2z + 7 = 0. Να βρεθεί η διανυσματική εξίσωση του επιπέδου που περνά από την αρχή των αξόνων του Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων (x, y, z) και είναι παράλληλο σε αυτό.

Γνωρίζουμε ότι το διάνυσμα με συντεταγμένες (5, 1, 2) είναι κάθετο στο επίπεδο που μας δόθηκε. Για το επίπεδο που μας ζητείται γνωρίζουμε μόνο ένα σημείο που περνά. Άρα πρέπει να βρούμε δύο διανύσματα που να ανήκουν σε αυτό για να κατασκευάσουμε την ζητούμενη διανυσματική εξίσωση. Έστω

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

δύο διανύσματα που ανήκουν στο επίπεδο που αναζητάμε. Τότε επειδή το αναζητηθέν επίπεδο είναι παράλληλο προς το αρχικό θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\langle (5,1,2), (a_1, a_2, a_3) \rangle = 0 \Rightarrow 5a_1 + a_2 + 2a_3 = 0$$
$$\langle (5,1,2), (b_1, b_2, b_3) \rangle = 0 \Rightarrow 5b_1 + b_2 + 2b_3 = 0$$

Το παραπάνω σύστημα είναι ένα σύστημα δύο εξισώσεων έξι αγνώστους επομένως δεν έχει μονότιμη λύση. Στην πρώτη σχέση θέτουμε $α_1 = 0$ και $α_2 = 2$ οπότε προκύπτει ότι $α_3 = -1$. Για την δεύτερη σχέση θέτουμε $b_1 = 2$ και $b_2 = 0$ οπότε προκύπτει ότι $b_3 = -5$. Επομένως έχουμε ότι

$$\bar{a} = (0,2,-1) \ \ , \ \ \bar{b} = (2,0,-5)$$

Τα παραπάνω δύο διανύσματα δεν είναι συγραμμικά άρα η ζητούμενη διανυσματική εξίσωση είναι

$$\bar{r}_p : \Re^2 \to \Re^3 : (u,v) \to \bar{r}_p(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = (0,0,0) + u\bar{a} + v\bar{b} =$$
$$= (2v, 2u, -u - 5v)$$

Για να βρούμε την αλγεβρική εξίσωση του επιπέδου κάνουμε τα εξής: Έστω (x, y, z) οι συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου του επιπέδου το οποίο ψάχνουμε. Τότε το διάνυσμα με συντεταγμένες (x, y, z) – (0, 0, 0) = (x, y, z) είναι ένα διάνυσμα του επιπέδου. Το αναζητηθέν επίπεδο είναι παράλληλο στο επίπεδο με αλγεβρική εξίσωση 5x + y + 2z + 7 = 0 επομένως ένα κάθετο διάνυσμα είναι το (5, 1, 2). Η αλγεβρική του εξίσωση προκύπτει από τον μηδενισμό του παρακάτω εσωτερικού γινομένου

$$\langle (5,1,2), (x, y, z) \rangle = 0 \Rightarrow 5x + y + 2z = 0$$

Παράδειγμα 12

Δίδονται δύο επίπεδα με αλγεβρικές εξισώσεις

-2x + 4y – 2z = 0
5x + y + 2z + 7 = 0

Να βρεθεί εάν τα δύο επίπεδα τέμνονται και να υπολογιστεί η γωνία μεταξύ τους.

Για να βρούμε εάν τέμνονται αρκεί να βρούμε τα σημεία του χώρου με συντεταγμένες (x_s , y_s , z_s) τα οποία είναι λύσεις του παραπάνω συστήματος. Επειδή οι άγνωστοι είναι τρεις ενώ οι εξισώσεις είναι μόνο δύο η λύση του παραπάνω συστήματος δεν είναι μονότιμη. Οι άπειρες λύσεις θα βρεθούν θέτοντας ως ελεύθερο άγνωστο την μεταβλητή z. Είναι

$$-2x + 4y = 2z$$
$$5x + y = -2z - 7$$

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -22 \ , \ D_x = \begin{vmatrix} 2z & 4 \\ -2z-7 & 1 \end{vmatrix} = 10z + 28 \ , \ D_y = \begin{vmatrix} -2 & 2z \\ 5 & -2z-7 \end{vmatrix} = -14z + 14$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι

$$(x_s, y_s, z_s) = \left(-\frac{10z + 28}{22}, \frac{14z - 14}{22}, z \right), \ z \in \Re$$

Θέτοντας z = t κατασκευάζουμε την παρακάτω διανυσματική συνάρτηση

$$\bar{r} : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = \left(-\frac{10t + 28}{22}, \frac{14t - 14}{22}, t \right) =$$
$$= \left(-\frac{28}{22}, -\frac{14}{22}, 0 \right) + t\left(-\frac{10}{22}, \frac{14}{22}, 1 \right)$$

Από την μορφή της παραπάνω διανυσματικής συνάρτησης παρατηρούμε ότι η τομή των δύο επιπέδων είναι μια ευθεία που περνά από το σημείο (-28/22 , -14/22 , 0) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα (-10/22 , 14/22 , 1).

Η γωνία μεταξύ των δύο επιπέδων ισούται με την γωνία μεταξύ δύο καθέτων διανυσμάτων τους. Για το πρώτο επίπεδο ένα κάθετο διάνυσμα είναι το (-2, 4, -2) ενώ για το δεύτερο επίπεδο ένα κάθετο διάνυσμα είναι το (5, 1, 2). Αν ω είναι η γωνία μεταξύ των δύο επιπέδων τότε

$$\omega = \tau o \xi \sigma \upsilon \nu \left(\frac{\langle (-2,4,-2), (5,1,2) \rangle}{\sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-2)^2}\sqrt{5^2 + 1^2 + 2^2}} \right) = \tau o \xi \sigma \upsilon \nu \left(\frac{-10}{\sqrt{24}\sqrt{30}} \right) \Rightarrow \omega = 68^0{,}119$$

Παράδειγμα 13

Δίδεται η ευθεία ε με διανυσματική εξίσωση

$$\bar{r} : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (1,2,0) + t(2,0,3) = (1+2t, 2, 3t)$$

και ένα επίπεδο με εξίσωση 5x + y +2z + 7 = 0. Να εξεταστεί εάν το επίπεδο και η ευθεία τέμνονται και να βρεθεί η γωνία μεταξύ τους.

Από την διανυσματική εξίσωση της ευθείας παρατηρούμε ότι η ευθεία περνά από το σημείο (1,2,0) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα (2,0,3). Επίσης παρατηρούμε ότι

$$5 \cdot 1 + 2 + 2 \cdot 0 + 7 = 14$$

επομένως το σημείο (1,2,0) δεν ανήκει στο επίπεδο. Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε εάν υπάρχει άλλο σημείο της ευθείας που να ανήκει στο επίπεδο. Εάν ναι τότε θα επαληθεύει την εξίσωση του επιπέδου. Είναι

$$5(1+2t) + 2 + 2(3t) + 7 = 0 \Rightarrow 16t + 14 = 0 \Rightarrow t = -\frac{14}{16}$$

Άρα η κοινό σημείο της ευθείας ε και του επιπέδου έχει συντεταγμένες

$$\left(1 - 2\frac{14}{16}, 2, -3\frac{14}{16}\right) = \left(-\frac{12}{16}, 2, -\frac{42}{16}\right) = \left(-\frac{3}{4}, 2, -\frac{21}{8}\right)$$

Η γωνία μεταξύ της ευθείας ε και του επιπέδου είναι η συμπληρωματική γωνία μεταξύ της ευθείας ε και ενός κάθετου διανύσματος του επιπέδου. Ένα κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο έχει συντεταγμένες (5, 1, 2) άρα εάν ω είναι η γωνία μεταξύ της ευθείας ε και του επιπέδου τότε

$$90^0 - \omega = \tau o\xi \sigma \upsilon \nu \left(\frac{\langle (5,1,2), (2,0,3) \rangle}{\sqrt{25+1+4}\sqrt{4+9}} \right) = \tau o\xi \sigma \upsilon \nu \left(\frac{16}{\sqrt{30}\sqrt{13}} \right) \Rightarrow \omega = 54^0{,}114$$

Παράδειγμα 14

Να βρεθεί η προβολή της ευθείας ε με διανυσματική εξίσωση

$$\bar{r} : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (1,1,-3) + t(0,2,0) = (1, 1+2t, -3)$$

πάνω στο επίπεδο Π με αλγεβρική εξίσωση x + 2y – z + 4 = 0.

Αρκεί να επιλέξουμε δύο αυθαίρετα σημεία πάνω στην ευθεία ε και να βρούμε τις προβολές τους στο επίπεδο μέσω του τύπου

$$(x_{M'}, y_{M'}, z_{M'}) = (x_M, y_M, z_M) + s_0 \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}} (A, B, \Gamma) \ , s_0 = -\frac{Ax_M + By_M + \Gamma z_M + \Delta}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}$$

Έστω M_1 = (1, 1, - 3) και M_2 = (1, 3, -3) δύο σημεία της ευθείας ε. Τα σημεία αυτά επιλέχθηκαν για τις τιμές της παραμέτρου t = 0 και t = 1 αντίστοιχα. Είναι

$$(x_{M'_1}, y_{M'_1}, z_{M'_1}) = (x_{M_1}, y_{M_1}, z_{M_1}) + s_{10}\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}(A,B,\Gamma)\ ,\ s_{10} = -\frac{Ax_{M_1}+By_{M_1}+\Gamma z_{M_1}+\Delta}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}$$

$$(x_{M'_2}, y_{M'_2}, z_{M'_2}) = (x_{M_2}, y_{M_2}, z_{M_2}) + s_{20}\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}(A,B,\Gamma)\ ,\ s_{20} = -\frac{Ax_{M_2}+By_{M_2}+\Gamma z_{M_2}+\Delta}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}$$

Οι παραπάνω σχέσεις γίνονται

$$(x_{M'_1}, y_{M'_1}, z_{M'_1}) = (1,1,-3) - \frac{10}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)\ ,\ s_{10} = -\frac{1+2+(-1)(-)3+4}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} = -\frac{10}{\sqrt{6}}$$

$$(x_{M'_2}, y_{M'_2}, z_{M'_2}) = (1,3,-3) - \frac{15}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)\ ,\ s_{20} = -\frac{1+6+(-1)(-3)+4}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} = -\frac{15}{\sqrt{6}}$$

Μετά από πράξεις οι συντεταγμένες των προβολών των σημείων είναι

$$(x_{M'_1}, y_{M'_1}, z_{M'_1}) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}\right)\ ,\ (x_{M'_2}, y_{M'_2}, z_{M'_2}) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

Η εξίσωση της προβολής της ευθείας ε πάνω στο επίπεδο είναι

$$\bar{r}:\Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}\right) + t\left(-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}, \frac{1}{2}-\frac{7}{3}, \frac{7}{2}-\frac{4}{3}\right)$$

ή

$$\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}\right) + t\left(\frac{5}{6}, -\frac{11}{6}, \frac{13}{6}\right)$$

Σχόλιο: Η απόσταση των σημείων M_1 και M_2 είναι

$$d(M_1,\Pi) = \frac{\left|Ax_{M_1}+By_{M_1}+\Gamma z_{M_1}+\Delta\right|}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}} = \frac{10}{\sqrt{6}}$$

$$d(M_2,\Pi) = \frac{\left|Ax_{M_2}+By_{M_2}+\Gamma z_{M_2}+\Delta\right|}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}} = \frac{15}{\sqrt{6}}$$

……………………….