<u>Μάθημα 3^α</u>

<u>Ευθεία στο επίπεδο και στο χώρο</u>

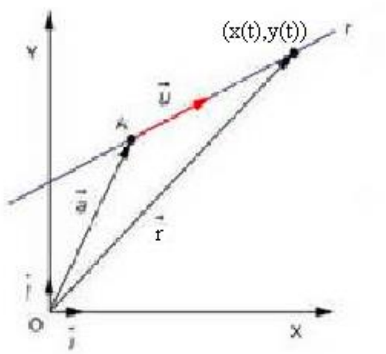
Πάνω στο επίπεδο επιλέγουμε ένα σημείο Ο και με κέντρο το σημείο αυτό ορίζουμε ένα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x, y). Θέλουμε να βρούμε μια εξίσωση που να περιγράφει μια ευθεία στο επίπεδο. Γνωρίζουμε από την Ευκλείδεια Γεωμετρία ότι από δύο σημεία περνά μια και μόνο μια ευθεία.
Έστω δύο τυχαία σημεία Α και Β του επιπέδου με συντεταγμένες (x_A, y_A) και (x_B,y_B) και το διάνυσμα

$$\bar{u} = (a_1, a_2) = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

Έστω η *διανυσματική συνάρτηση*

$$\bar{r} : \Re \to \Re^2 : t \to \bar{r}(t) = (x(t), y(t)) = (x_A + t(x_B - x_A), y_A + t(y_B - y_A)) = (x_A + ta_1, y_A + ta_2) =$$
$$= (x_A, y_A) + t(a_1, a_2) = (x_A, y_A) + t\bar{u}$$

Η γραφική παράσταση της παραπάνω διανυσματικής συνάρτησης είναι μια ευθεία ε που περνά από το σημεία Α και Β.
Ισοδύναμα είναι μια ευθεία ε που περνά από το σημείο Α και είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\bar{u}$



α) Σε *παραμετρική μορφή* η παραπάνω διανυσματική συνάρτηση γράφεται ως

$$x(t) \equiv x = x_A + ta_1$$
$$y(t) \equiv y = y_A + ta_2$$

β) Λύνουμε τις παραπάνω σχέσεις ως προς t

$$\frac{x - x_A}{a_1} = t$$

$$\frac{y - y_A}{a_2} = t$$

Εφ’ όσον τα δεύτερα μέλη των παραπάνω σχέσεων είναι ίσα σημαίνει ότι είναι και τα δεύτερα. Επομένως ισχύει

$$\frac{x - x_A}{a_1} = \frac{y - y_A}{a_2}$$

Η παραπάνω μορφή εξίσωσης ονομάζεται *εξίσωση της ευθείας ε σε συμμετρική μορφή.*

γ) Κάνοντας πράξεις με την παραπάνω εξίσωση έχουμε ότι

$$\frac{x - x_A}{a_1} = \frac{y - y_A}{a_2} \Rightarrow a_2(x - x_A) - a_1(y - y_A) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = 0$$

Άρα *η εξίσωση της ευθείας ε μπορεί να γραφεί και σαν μορφή μιας ορίζουσας 2x2.*

δ) Εάν γνωρίζουμε δύο σημεία (x_A, y_A) και (x_B, y_B) που ανήκουν σε μια ευθεία ε τότε θέτουμε (α_1, α_2) = ($x_B - x_A$, $y_B - y_A$) και έχουμε ότι

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

στ) Επί πλέον

$$\frac{x - x_A}{a_1} = \frac{y - y_A}{a_2} \Rightarrow a_2(x - x_A) - a_1(y - y_A) = 0 \Rightarrow a_2 x - a_1 y + (a_1 y_A - a_2 x_A) = 0$$

Θέτουμε

$$A = a_2 \ , \ B = -a_1 \ , \ \Gamma = a_1 y_A - a_2 x_A$$

οπότε η εξίσωση της ευθείας ε παίρνει την παρακάτω μορφή

$$Ax + By + \Gamma = 0$$

ζ) Είναι

$$a_2 x - a_1 y + (a_1 y_A - a_2 x_A) = 0 \Rightarrow y = \frac{a_2}{a_1} x + \frac{a_1 y_A - a_2 x_A}{a_1} \Rightarrow y = c_1 x + c_2 \ , \ a_1 \neq 0$$

η) Ειδικές περιπτώσεις: Εάν $\alpha_1 = 0$ τότε η εξίσωση της ευθείας ε είναι η

$$x = x_A$$

Εάν $\alpha_2 = 0$ τότε η εξίσωση της ευθείας ε είναι η

$$y = y_A$$

Σχόλιο: Γνωρίζουμε από την Ευκλείδεια Γεωμετρία ότι από δύο σημεία περνά μία και μόνο ευθεία. Επειδή σε ένα ζεύγος σημείων μπορεί να αντιστοιχηθεί ένα διάνυσμα παρατηρούμε ότι

Μια ευθεία ε μπορεί να οριστεί όταν δίδεται ένα σημείο το οποίο ανήκει σε αυτήν και ένα διάνυσμα (α_1, α_2) το οποίο είναι παράλληλο με την ευθεία

Έστω ευθεία ε η οποία είναι παράλληλη στο διάνυσμα (α_1, α_2) και έχει εξίσωση Αx + Βy + Γ = 0. Τότε το διάνυσμα (Α, Β) είναι κάθετο στην ευθεία και το διάνυσμα (Β, -Α) είναι παράλληλο στην ευθεία. Πράγματι πριν θέσαμε Α = α_2 και Β = $-\alpha_1$ επομένως (Α, Β) = (α_2, $-\alpha_1$) άρα

$$\langle (a_1, a_2), (A, B) \rangle = \langle (a_1, a_2), (a_2, -a_1) \rangle = 0$$

Για το δεύτερο έχουμε ότι (Β,-Α) = ($-\alpha_1$, $-\alpha_2$) που είναι συγραμμικό με το (α_1, α_2).

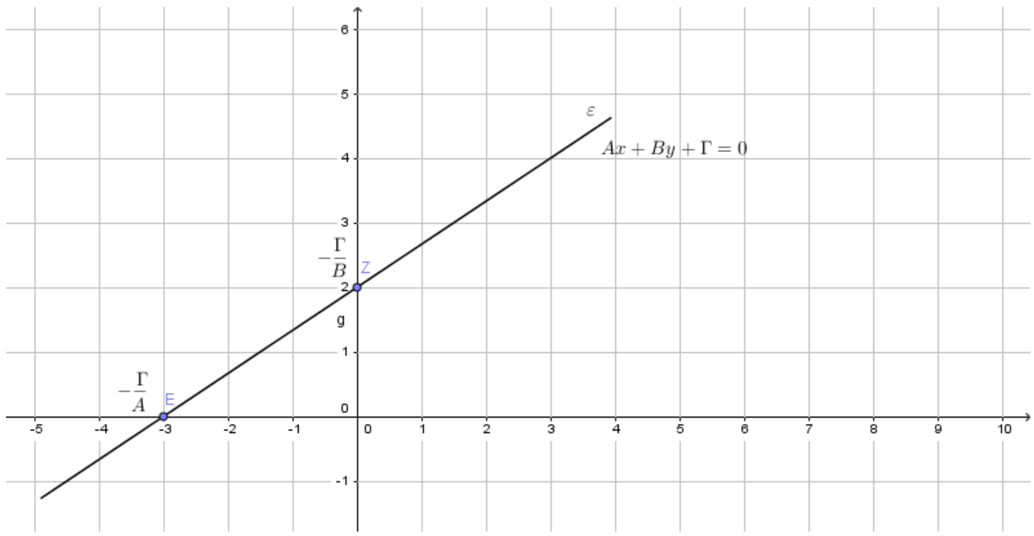
Έστω δύο ευθείες ε_1 και ε_2 του επιπέδου με εξισώσεις

$$A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 = 0$$
$$A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 = 0$$

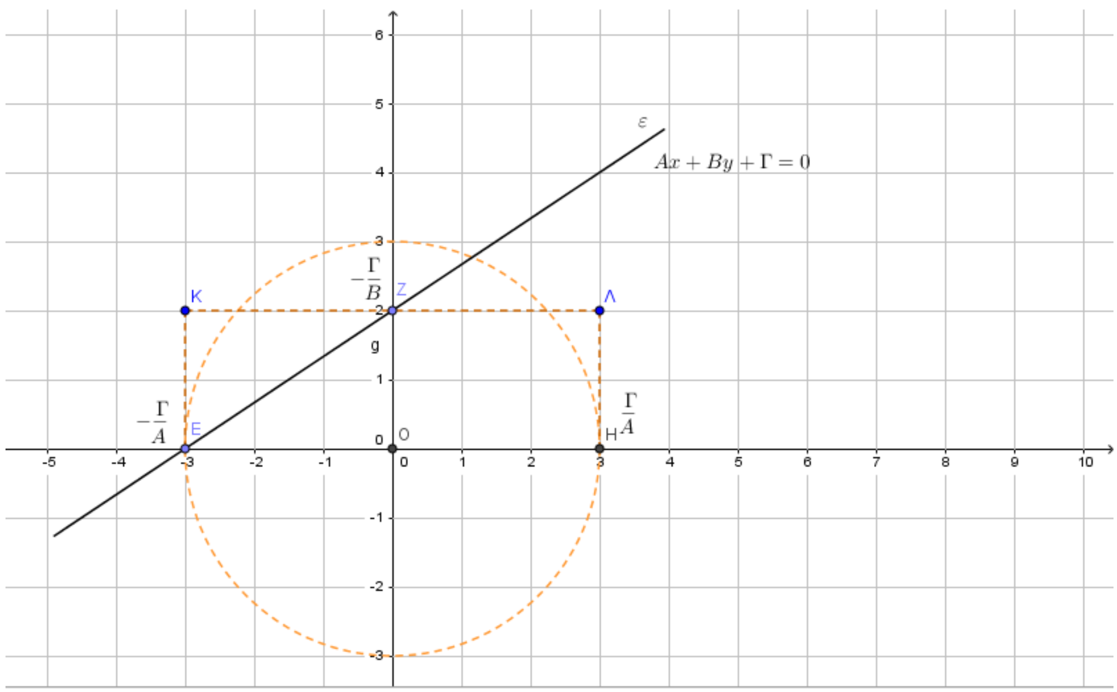
Ορίζουμε ως γωνία των ευθειών ε_1 και ε_2 το μέγεθος

$$\theta = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}\right)$$

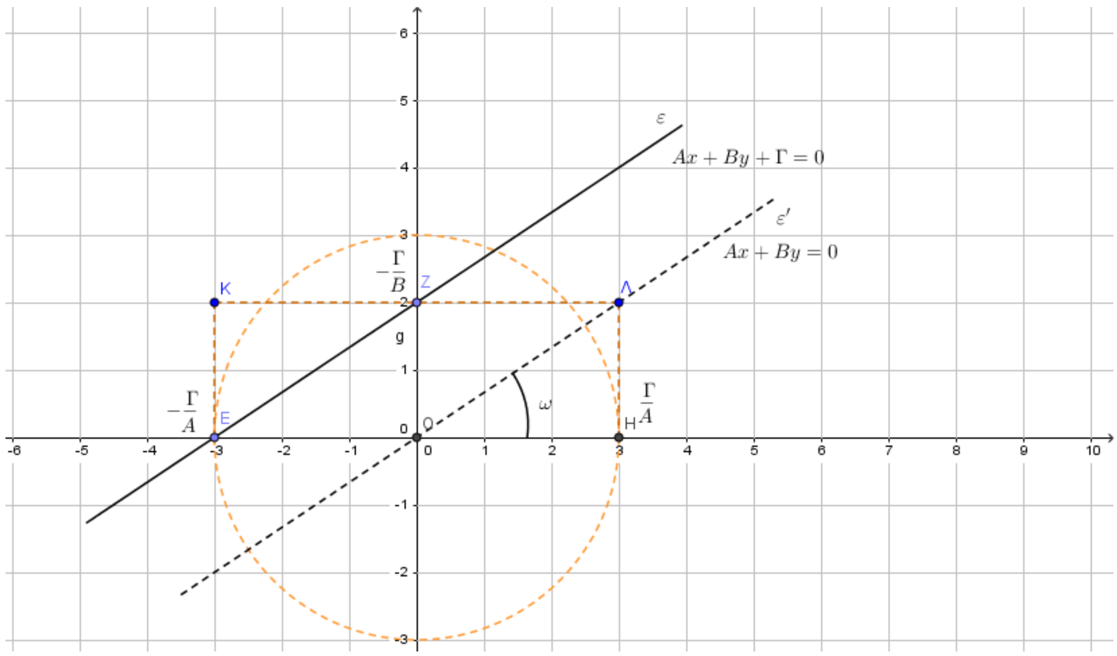
Έστω τώρα μια ευθεία ε η οποία έχει εξίσωση Αx + Βy + Γ = 0



Με κέντρο το κέντρο του Καρτεσιανού συστήματος αξόνων x και y και ακτίνα Γ/Α σχεδιάζουμε ένα κύκλο.



Στην συνέχεια σχεδιάζουμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΕΚΛΗ. Το παραλληλόγραμμο αυτό περιέχει δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα το ΕΚΖΟ και το ΟΖΛΗ. Οι διαγώνιοι των δύο αυτών παραλληλογράμμων είναι ίσες και παράλληλες. Επομένως μια ευθεία ε΄ που διέρχεται από τα σημεία Ο και Λ θα είναι παράλληλη στην ευθεία ε που διέρχεται από τα σημεία Ε και Ζ.



Η εξίσωση της ευθείας ε΄ βρίσκεται εάν θέσουμε στην σχέση Αx + Βy + Γ = 0 το συντελεστή Γ = 0. Άρα η εξίσωση της ευθείας ε΄ είναι Αx + Βy = 0.

Ας βρούμε με τι ισούται η γωνία ω. Είναι

$$\varepsilon\phi\omega = \frac{-\frac{\Gamma}{B}}{\frac{\Gamma}{A}} \Rightarrow \varepsilon\phi\omega = -\frac{A}{B} \Rightarrow \omega = \tau o\xi\varepsilon\phi\left(-\frac{A}{B}\right)$$

Τον αριθμό λ = εφω τον ονομάζουμε *συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε΄*.

Επειδή οι ευθείες ε και ε΄ είναι παράλληλες τον αριθμό λ = εφω τον ονομάζουμε και *συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε.*

Το διάστημα των τιμών της γωνίας ω είναι το [0, π) και μετράται αριστερόστροφα από τον άξονα x.

Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι εάν έχουμε την εξίσωση μιας ευθείας ε της μορφής Αx + Βy + Γ = 0 τότε για να βρούμε το συντελεστή διεύθυνσης της θέτουμε Γ=0 και λύνουμε ως προς y.

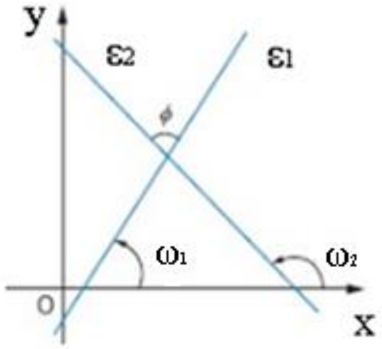
Εάν η εξίσωση της ευθείας ε είναι της μορφής $y = c_1x + c_2$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της είναι το c_1.

Εάν η ευθεία ε είναι παράλληλη με τον άξονα x τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ισούται με το μηδέν. Εάν είναι παράλληλη με τον άξονα y τότε ο συντελεστής διεύθυνσής της δεν ορίζεται.

Έστω δύο ευθείες ε_1 και ε_2 του επιπέδου με εξισώσεις

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$$

Έστω ω_1 η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε_1 με τον άξονα x και ω_2 είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε_2 με τον άξονα x.



Θέλουμε να βρούμε πως συνδέεται η γωνία φ με τις γωνίες ω_1 και ω_2. Η ζητούμενη γωνία είναι η γωνία φ. Γνωρίζουμε ότι $\omega_2 = \omega_1 + \varphi$ άρα $\varphi = \omega_2 - \omega_1$. Άρα

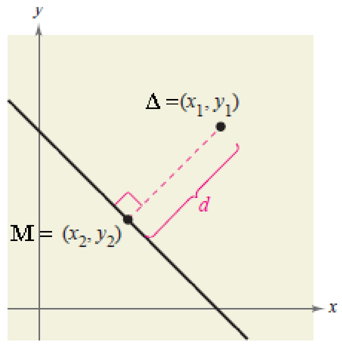
$$\varepsilon\phi\phi = \varepsilon\phi(\omega_2 - \omega_1) \Rightarrow \varepsilon\phi\phi = \frac{\varepsilon\phi\omega_2 - \varepsilon\phi\omega_1}{1 + \varepsilon\phi\omega_1\varepsilon\phi\omega_2} \Rightarrow \phi = \tau o\xi\varepsilon\phi\left(\frac{\varepsilon\phi\omega_2 - \varepsilon\phi\omega_1}{1 + \varepsilon\phi\omega_1\varepsilon\phi\omega_2}\right) = \tau o\xi\varepsilon\phi\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1\lambda_2}\right)$$

Εάν η ευθεία ε_2 είναι παράλληλη στον άξονα y τότε $\varphi = \pi/2 - \omega_1$. Εάν η ευθεία ε_1 είναι παράλληλη στον άξονα y τότε $\varphi = \omega_2 - \pi/2$.

Σχόλιο: Από την τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι εάν οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες τότε $\lambda_1\lambda_2 = -1$ και εάν είναι παράλληλες τότε $\lambda_1 = \lambda_2$.

<u>Απόσταση σημείου από ευθεία</u>

Θεωρούμε μια ευθεία ε του επιπέδου με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ και ένα σημείο Δ με συντεταγμένες (x_1, y_1). Θέλουμε να βρούμε την απόσταση του σημείου Δ από την ευθεία ε. Έστω $M = (x_2, y_2)$ το ίχνος της καθέτου ευθείας στην ευθεία ε που περνά από το σημείο Δ.



Γνωρίζουμε ότι η ευθεία ε είναι παράλληλη στο διάνυσμα (Β, -Α) και κάθετη στο διάνυσμα (Α, Β). Εάν ΔΜ είναι το ευθύγραμμο τμήμα που το μήκος του είναι η απόσταση μεταξύ των σημείων Μ και Δ τότε

$$\langle (A,B),\overline{M\Delta}\rangle = A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2) = Ax_1 - Ax_2 + By_1 - By_2 =$$
$$= (Ax_1 + By_1) - (Ax_2 + By_2) = Ax_1 + By_1 + \Gamma$$

Αλλά ισχύει και

$$\langle (A,B),\overline{M\Delta}\rangle = \sqrt{A^2 + B^2}\left|\overline{M\Delta}\right|\sigma\upsilon\nu 0 = \sqrt{A^2 + B^2}\Delta M = \sqrt{A^2 + B^2}\,d(\Delta,\varepsilon)$$

Επειδή d(Δ, ε) είναι πάντα θετικός αριθμός έχουμε ότι

$$\left|Ax_1 + By_1 + \Gamma\right| = \sqrt{A^2 + B^2}\,d(\Delta,\varepsilon) \Rightarrow d(\Delta,\varepsilon) = \frac{\left|Ax_1 + By_1 + \Gamma\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

<u>Σχετική θέση δύο ευθειών</u>

Έστω δύο ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις

$$A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 = 0$$
$$A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 = 0$$

Για να βρούμε την θέση των δύο ευθειών μελετάμε το σύστημα

$$A_1 x + B_1 y = -\Gamma_1$$
$$A_2 x + B_2 y = -\Gamma_2$$

ι) Εάν η ορίζουσα του συστήματος είναι διάφορη του μηδενός τότε οι δύο ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο. Οι συντεταγμένες του σημείου δίδονται από την λύση του συστήματος.

ιι) Εάν η ορίζουσα του συστήματος ισούται με το μηδέν τότε οι ευθείες είναι παράλληλες ή συμπίπτουν. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις

Εάν είναι παράλληλες τότε λόγω του μηδενισμού της ορίζουσας του συστήματος τότε θα ισχύει ότι

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

Εάν τέμνουν τον άξονα x τότε έχουν διαφορετικά σημεία τομής άρα ισχύει και

$$\left.\begin{aligned} A_1 x + B_1 0 = -\Gamma_1 \\ A_2 x + B_2 0 = -\Gamma_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -\frac{\Gamma_1}{A_1} \neq -\frac{\Gamma_2}{A_2} \Rightarrow \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Εάν τέμνουν τον άξονα x και είναι παράλληλες και στον άξονα y πρέπει επί πλέον να ισχύει ότι $B_1 = B_2 = 0$ άρα θα ισχύει και

$$\begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

Εάν είναι παράλληλες προς τον άξονα x τότε $A_1 = A_2 = 0$ άρα στην περίπτωση αυτή

$$\begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Εάν οι ευθείες συμπίπτουν τότε

$$\lambda(A_1x + B_1y + \Gamma_1) = A_2x + B_2y + \Gamma_2 \Rightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

Περιπτώσεις	**Κοινά σημεία**	**Συνθήκες**
Τομή των ε_1 και ε_2 $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$	1 σημείο $x = \dfrac{B_2\Gamma_1 - \Gamma_2B_1}{A_1B_2 - A_2B_1}$ $y = \dfrac{A_1\Gamma_2 - A_2\Gamma_1}{A_1B_2 - A_2B_1}$	$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$
$\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και τομή με άξονα x και άξονα y	Κανένα	$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} \neq 0$
$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // y$	Κανένα	$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = 0$ $B_1 = B_2 = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = 0$
$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // x$	Κανένα	$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} \neq 0$ $A_1 = A_2 = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = 0$
Ταύτιση	Άπειρα	$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = 0$

<u>Μονοπαραμετρική οικογένεια ευθειών</u>

Θεωρούμε δύο ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις

$A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$
$A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$

οι οποίες τέμνονται σε ένα σημείο P με συντεταγμένες (x_P, y_P). Θεωρούμε και την παράσταση

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 + \mu(A_2x + B_2y + \Gamma_2) = 0 \Rightarrow (A_1 + \mu A_2)x + (B_1 + \mu B_2)y + (\Gamma_1 + \mu\Gamma_2) = 0$$

όπου μ πραγματικός αριθμός. Η παραπάνω παράσταση είναι εξίσωση ευθείας γιατί οι συντελεστές των x και y δεν είναι ταυτοχρόνως ίσοι με το μηδέν.

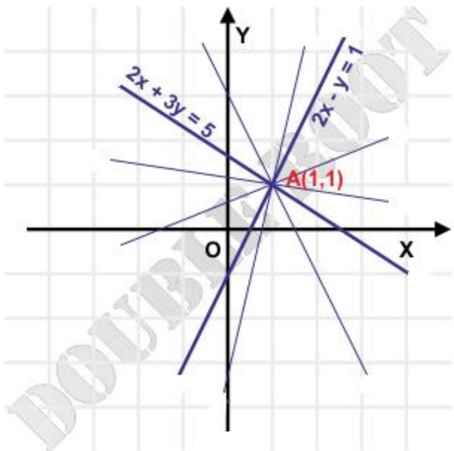
Η παραπάνω εξίσωση αντιπροσωπεύει μια οικογένεια ευθειών που ονομάζεται *μονοπαραμετρική οικογένεια ευθειών που περνά από το σημείο τομής των ευθειών* ε_1 *και* ε_2.

Παράδειγμα έστω δύο ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις

$2x + 3y - 5 = 0$
$2x - y - 1 = 0$

Οι ευθείες αυτές τέμνονται στο σημείο Α που έχει συντεταγμένες (1, 1). Η μονοπαραμετρική οικογένεια ευθειών που ορίζεται από αυτές τις δύο ευθείες έχει εξίσωση

$$(2 + 2\mu)x + (3 - \mu)y - (5 + \mu) = 0$$



.

Ονομάζουμε *δέσμη ευθειών στο επίπεδο μια οικογένεια ευθειών που προκύπτει από την εξίσωση*

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + \Gamma_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + \Gamma_2) = 0 \text{ , } \lambda_1 \in \Re \text{ , } \lambda_2 \in \Re$$

Η παραπάνω οικογένεια ευθειών είναι ευθείες που περνούν από το σημείο τομής P αλλά η οικογένεια της δέσμης ευθειών περιέχει περισσότερες ευθείες από την οικογένεια ευθειών που ορίσαμε πριν. Δηλαδή η δέσμη ευθειών περιέχει τις ευθείες τις μονοπαραμετρικής οικογένειας ευθειών όταν $\lambda_1 = 1$ αλλά περιέχει και την ευθεία

$$A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$$

για τις τιμές $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = 1$. Η μονοπαραμετρική οικογένεια ευθειών που γράψαμε

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 + \mu(A_2x + B_2y + \Gamma_2) = 0 \Rightarrow (A_1 + \mu A_2)x + (B_1 + \mu B_2)y + (\Gamma_1 + \mu\Gamma_2) = 0$$

δεν περιέχει την παραπάνω ευθεία.

Ευθεία στο χώρο

Μια ευθεία στο χώρο ορίζεται όπως πριν δηλαδή είτε γνωρίζουμε δύο σημεία τα οποία ανήκουν σε αυτήν είτε ένα σημείο και ένα διάνυσμα το οποίο είναι παράλληλο στην ζητούμενη ευθεία

Για την πρώτη περίπτωση έστω δύο σημεία P και Q με Καρτεσιανές συντεταγμένες

$$(x_P, y_P, z_P)\ ,\ (x_Q, y_Q, z_Q)$$

Η ευθεία που περνά από το σημεία P και Q έχει διανυσματική εξίσωση

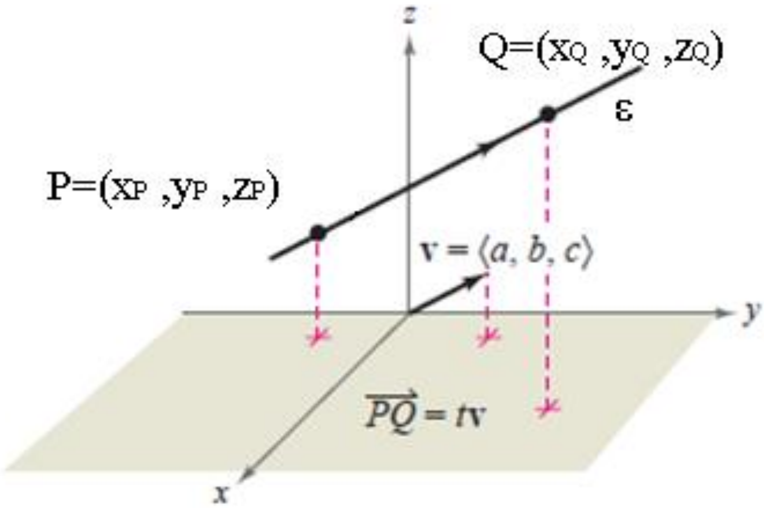
$$\bar{r} : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t) = (x_P + t(x_Q - x_P), y_P + t(y_Q - y_P), z_P + t(z_Q - z_P))$$

Για την δεύτερη περίπτωση έστω

$$P = (x_P, y_P, z_P)$$
$$\bar{v} = (a, b, c) = (x_Q - x_P, y_Q - y_P, z_Q - z_P)$$

Τότε η διανυσματική εξίσωση της ευθείας είναι

$$\bar{r} : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}(t) = (x_P, y_P, z_P) + t\bar{v} = (x(t), y(t), z(t)) = (x_P + ta, y_P + tb, z_P + tc)$$



Όπως και στην περίπτωση του επιπέδου έτσι και εδώ η διανυσματική συνάρτηση της ευθείας μπορεί να πάρει τις παρακάτω μορφές

Παραμετρική

$$x(t) \equiv x = x_1 + ta$$
$$y(t) \equiv y = y_1 + tb$$
$$z(t) \equiv z = z_1 + tc$$

Συμμετρική

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

Όπως είδαμε πριν δύο ευθείες στο επίπεδο μπορεί να τέμνονται, να είναι παράλληλες ή να συμπίπτουν. Στον τρισδιάστατο χώρο δύο ευθείες πάλι μπορούν να τέμνονται, να συμπίπτουν ή να είναι παράλληλες αλλά υπάρχει και άλλη μια δυνατότητα.

Δύο ευθείες στο τρισδιάστατο χώρο ονομάζονται *ασύμβατες* όταν δεν είναι παράλληλες και δεν έχουν κοινό σημείο. Έστω

$$\bar{r}_1 : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}_1(t) = (x_B, y_B, z_B) + t\bar{u} = (x_B + ta_1, y_B + tb_1, z_B + tc_1)$$
$$\bar{r}_2 : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}_2(t) = (x_H, y_H, z_H) + t\bar{v} = (x_H + ta_2, y_H + tb_2, z_H + tc_2)$$

οι διανυσματικές εξισώσεις δύο ασύμβατων ευθειών. Τότε αν οι δύο ευθείες είναι ασύμβατες ισχύει ότι

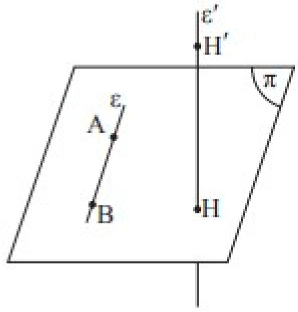
$$[(x_H - x_B, y_H - y_B, z_H - z_B), (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)] \neq 0$$

$$(a_1, b_1, c_1) = (x_A - x_B, y_A - y_B, z_A - z_B)$$

$$(a_2, b_2, c_2) = (x_{H'} - x_H, y_{H'} - y_H, z_{H'} - z_H)$$

Εάν οι δύο ευθείες ανήκουν στο ίδιο επίπεδο τότε ισχύει ότι

$$[(x_H - x_B, y_H - y_B, z_H - z_B), (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)] = 0$$



…………………………