Μάθημα 1ο

Εισαγωγή στην Αναλυτική Γεωμετρία

1 Εισαγωγή

Ως Γεωμετρία ορίζουμε τον κλάδο της ανθρώπινης γνώσης που έχει ως αντικείμενο την περιγραφή του χώρου και των σχημάτων των αντικειμένων που βρίσκονται στο χώρο.

Όταν λέμε "περιγραφή του χώρου" εννοούμε το πως αντιλαμβανόμαστε το χώρο με την αίσθηση της όρασης.

Με την όραση αντιλαμβανόμαστε έννοιες όπως ύψος, πλάτος, και μήκος. Η αντίληψη αυτή μας οδήγησε στην υπόθεση ότι ο χώρος στον οποίο ζούμε - και υπάρχουν και τα διάφορα αντικείμενα - είναι τρισδιάστατος.

Βάση αυτής της αίσθησης ορίζουμε ένα μαθηματικό χώρο που τον ονομάζουμε *γεωμετρικό ή εποπτικό χώρο* και τον συμβολίζουμε με E^3.

Τα στοιχεία του χώρου αυτού τα ονομάζουμε *σημεία και στον χώρο αυτό φτιάχνουμε τα γεωμετρικά σχήματα ή γεωμετρικά αντικείμενα.*

Γεωμετρικό σχήμα είναι οποιοδήποτε υποσύνολο σημείων του χώρου.

Η περιγραφή των σχημάτων στην Γεωμετρία αφορά στην

α) Εύρεση του σχήματος του αντικειμένου (πχ τετράγωνο)
β) Εύρεση ιδιοτήτων του σχήματος του αντικειμένου (πχ οι διαγώνιοι του τέμνονται κάθετα)
γ) Σχέσεις μεταξύ διαφόρων σχημάτων (τετράγωνο και ορθογώνιο παραλληλόγραμμο) οι οποίες αποτυπώνονται με τις διαφορές τους και τις ομοιότητές τους (το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο δεν έχει ίσες διαδοχικές πλευρές όπως το τετράγωνο, και τα δύο σχήματα έχουν όλες τις γωνίες ορθές).

Η περιγραφή αυτή ουσιαστικώς ήταν "ποσοτική" και γίνονταν με την χρήση του διαβαθμισμένου κανόνα και του μοιρογνωμονίου.

Ευκλείδεια Γεωμετρία: περιγραφή των γεωμετρικών σχημάτων καθώς και την περιγραφή και συλλογή των ιδιοτήτων τους στον εποπτικό χώρο μέσω

α) Αξιωμάτων και βασικών εννοιών. Οι βασικές γεωμετρικές έννοιες είναι σημείο, ευθεία, και επίπεδο τα οποία είναι και τα *θεμελιώδη ή βασικά γεωμετρικά αντικείμενα*.
Τα αξιώματα είναι σχετικά με τα γεωμετρικά αντικείμενα (ποιες είναι οι σχέσεις μεταξύ τους) πχ «από δύο σημεία διέρχεται μια και μόνο ευθεία» αλλά και με την *άλγεβρα δηλαδή με τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης*.

β) Θεωρημάτων, προτάσεων και λημμάτων (Συμπεράσματα που εξάγονται μέσω της χρήσης των αξιωμάτων ή και προηγούμενων θεωρημάτων, προτάσεων, και λημμάτων)

Πετυχαίνουμε να βρίσκουμε διάφορες ιδιότητες των σχημάτων οι οποίες δεν μπορούν να βρεθούν από παρατήρηση του σχήματος ούτε από μετρήσεις. Στην συνέχεια γενικεύουμε τα συμπεράσματα που βγάζουμε.

Ο Ευκλείδης ταύτισε τα ευθύγραμμα τμήματα με τους αριθμούς (κάθε ευθύγραμμο τμήμα έχει μήκος) και σε κάθε γωνία όριζε το μέτρο της με βάση την ορθή γωνία (πόσες ορθές γωνίες είναι μια γωνία ή πόσο από το μέρος μιας ορθής γωνίας).

Έτσι ήταν δυνατόν να συγκρίνονται ευθύγραμμα τμήματα μεταξύ τους και γωνίες μεταξύ τους. Αυτό έδωσε την δυνατότητα να κατασκευαστούν σχέσεις οι οποίες σε ένα γεωμετρικό σχήμα είτε συνέδεαν ευθύγραμμα τμήματα (πχ το Πυθαγόρειο Θεώρημα) είτε ευθύγραμμα τμήματα με γωνίες είτε γωνίες μεταξύ τους.
Αφού θεώρησε ότι τα μήκη και τα μέτρα των γωνιών μπορούν να μετρηθούν οι σχέσεις οι οποίες τα συνδέουν ονομάζονται *μετρικές ή αλγεβρικές σχέσεις*.
Το σύνολο των σχέσεων αυτών για την μελέτη των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων είναι η Μετρική Γεωμετρία.

Δηλαδή η Μετρική Γεωμετρία μας παρέχει σχέσεις για να λύνουμε γεωμετρικά προβλήματα μέσω αλγεβρικών εξισώσεων.

Η Αναλυτική Γεωμετρία είναι τρόπος μελέτης των γεωμετρικών σχημάτων αλλά οι κατασκευή των αλγεβρικών σχέσεων στηρίζεται σε δύο επί πλέον έννοιες:
την έννοια του *συστήματος αξόνων* και την έννοια του *προσανατολισμού.*
Η έννοια του προσανατολισμού έχει να κάνει με, ευθύγραμμα τμήματα, ευθείες και γωνίες.

Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ στον εποπτικό χώρο. Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ λέγεται προσανατολισμένο όταν ορίσουμε ότι η αρχή του είναι το σημείο Α και πέρας το σημείο Β.
Η ευθεία στην οποία ανήκει λέγεται φορέας του, και έχει ως διεύθυνση την διεύθυνση του φορέα του.

Η φορά του προσανατολισμένου ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ λέγεται θετική όταν σαν αρχή θέσουμε το σημείο Α και πέρας το σημείο Β, και είναι αρνητική όταν θέσουμε σαν αρχή το σημείο Β και πέρας το σημείο Α. Τότε έχουμε ότι ΒΑ = -ΑΒ.

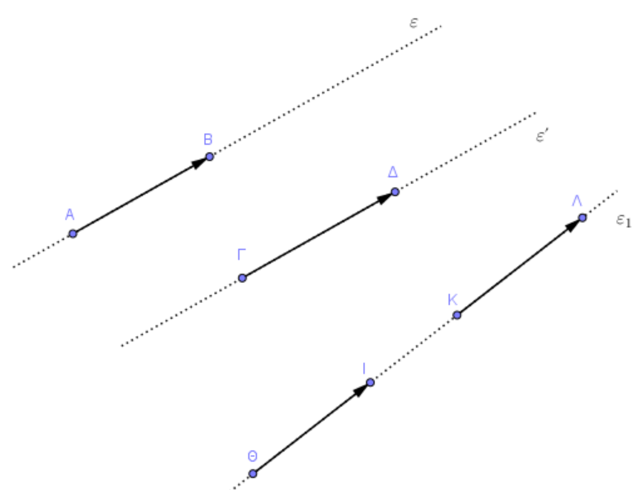
Κάθε προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα στον εποπτικό χώρο μπορεί να μετατοπιστεί παραλλήλως, δηλαδή για ένα τυχαίο σημείο Γ υπάρχει ένα μοναδικό σημείο Δ τέτοιο ώστε
α) ΓΔ = ΑΒ.

β) το Γ ορίζεται ως αρχή και το σημείο Δ ως πέρας του προσανατολισμένου ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ

γ) Οι φορείς των ΑΒ και ΓΔ να είναι παράλληλοι ή να συμπίπτουν.

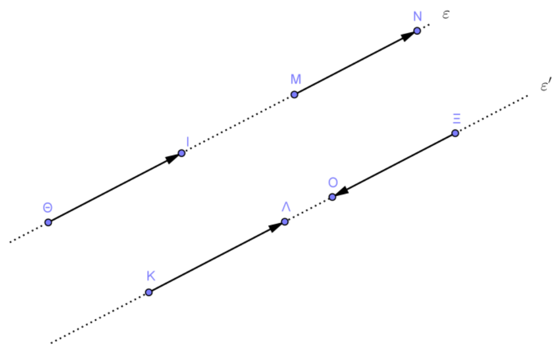
Ονομάζουμε εφαρμοστό διάνυσμα ΑΒ ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ του εποπτικού χώρου E^3.

Ονομάζουμε μέτρο του εφαρμοστού διανύσματος ΑΒ τον θετικό αριθμό ο οποίος εκφράζει το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.



Ένα εφαρμοστό διάνυσμα λέγεται *μηδενικό* εάν το αρχικό και το τελικό σημείο του συμπίπτουν (πχ $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$ κλπ).

Δύο εφαρμοστά διανύσματα ονομάζονται *συγγραμμικά* εάν ανήκουν σε παράλληλες ευθείες δηλαδή έχουν την ίδια διεύθυνση (επίσης θεωρούμε ότι μια ευθεία είναι παράλληλη του εαυτού της).



Δύο εφαρμοστά διανύσματα ονομάζονται *ομόρροπα* εάν είναι συγγραμμικά και έχουν την ίδια φορά δηλαδή τον ίδιο προσανατολισμό.

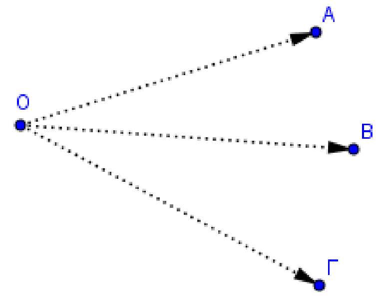
Δύο εφαρμοστά διανύσματα ονομάζονται *αντίρροπα* εάν είναι συγγραμμικά και έχουν αντίθετη φορά δηλαδή αντίθετο προσανατολισμό.

Δύο εφαρμοστά διανύσματα ονομάζονται *ίσα* εάν είναι ομόρροπα και έχουν ίσα μήκη.

Δύο εφαρμοστά διανύσματα ονομάζονται *αντίθετα* εάν είναι αντίρροπα και έχουν ίσα μήκη.

Ένα μηδενικό εφαρμοστό διάνυσμα θεωρείται συγραμμικό, ομόρροπο και αντίρροπο με κάθε μη μηδενικό εφαρμοστό διάνυσμα.

Έστω Ο ένα σημείο του εποπτικού χώρου το οποίο ονομάζουμε «σταθερό». Έστω και ένα τυχαίο σημείο Α του εποπτικού χώρου. Το εφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ *ονομάζεται διάνυσμα θέσης του σημείου Α.*



Στο σχήμα βλέπουμε την αντιστοιχία ενός διανύσματος θέσης για κάθε ένα από τα σημεία Α, Β και Γ.

Άρα εφ' όσον το σημείο Ο είναι σταθερό τότε σε κάθε τυχαίο σημείο Α του εποπτικού χώρου μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα διάνυσμα θέσης OA και αντιστρόφως. Η 1 – 1 και επί αντιστοιχία μεταξύ σημείων του εποπτικού χώρου και διανυσμάτων θέσης θα μας χρησιμεύσει λίγο παρακάτω.

Από την Ευκλείδεια Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι αν ΑΒ και ΒΓ είναι δύο ευθύγραμμα τμήματα τότε υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός m τέτοιος ώστε

$$AB = mB\Gamma$$

Παρόμοιες σχέσεις ισχύουν ανάμεσα σε διανύσματα. Αν $\overrightarrow{OA}$ ένα διάνυσμα θέσης τότε το μέτρο του διανύσματος αυτού είναι ίσο με το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΟΑ. Έστω $\overrightarrow{O\Delta}$ ένα διάνυσμα θέσης με μοναδιαίο μέτρο (μήκος ευθυγράμμου τμήματος ίσο με την μονάδα) το οποίο είναι συγραμμικό και ομόρροπο με το διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$. Τότε αν m το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OA}$ γράφουμε

$$\overrightarrow{OA} = m\overrightarrow{O\Delta}$$

Εάν τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{O\Delta}$ είναι αντίρροπα γράφουμε

$$\overrightarrow{OA} = -m\overrightarrow{O\Delta}.$$

Έστω το σύνολο

$$\delta_{AB} = \{\Gamma\Delta :\ \Gamma\Delta // AB,\ \Gamma\Delta = AB\}$$

Το παραπάνω σύνολο είναι μια κλάση ισοδυναμίας του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ *και ονομάζεται (ελεύθερο) διάνυσμα ΑΒ και συμβολίζεται ως* $\overline{AB}$

Κάθε (ελεύθερο) διάνυσμα μπορεί να παρασταθεί από οποιοδήποτε εφαρμοστό διάνυσμα που ανήκει μέσα στην κλάση.

Κάθε εφαρμοστό διάνυσμα που ανήκει στην κλάση δ_{AB} ονομάζεται *γεωμετρικός αντιπρόσωπος* του ελεύθερου διανύσματος $\overline{AB}$.

Δύο ελεύθερα διανύσματα ονομάζονται *συγγραμμικά* εάν έχουν παράλληλους γεωμετρικούς αντιπροσώπους.

Δύο ελεύθερα διανύσματα ονομάζονται *ομόρροπα* εάν έχουν ομόρροπους γεωμετρικούς αντιπροσώπους.
.
Δύο ελεύθερα διανύσματα ονομάζονται *αντίρροπα* εάν έχουν αντίρροπους γεωμετρικούς αντιπροσώπους.

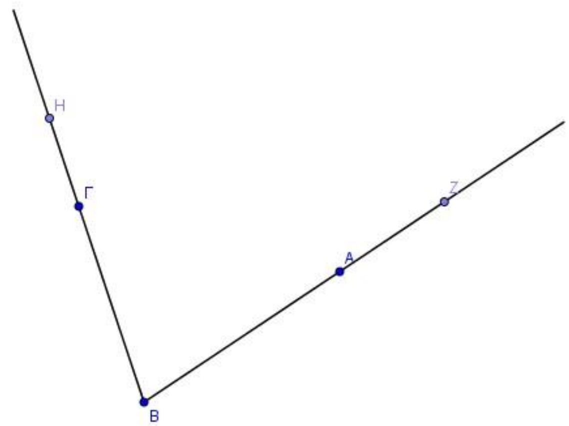
Δύο ελεύθερα διανύσματα ονομάζονται *ίσα* εάν έχουν ίσους γεωμετρικούς αντιπροσώπους.

Δύο ελεύθερα διανύσματα ονομάζονται *αντίθετα* εάν έχουν αντίθετους γεωμετρικούς αντιπροσώπους.

Έστω τρία σημεία Α, Β, Γ του εποπτικού χώρου και οι ημιευθείες ΒΑ και ΒΓ.

Ονομάζουμε γωνία ΑΒΓ με κορυφή το σημείο Β το σύνολο των σημείων των ημιευθειών ΒΑ και ΒΓ.

Ορίζουμε ως θετική φορά την φορά διαγραφής της γωνίας ως αυτή που είναι αντίθετη των δεικτών του ωρολογίου.



Το διάστημα τιμών του μέτρου της γωνίας αυτής είναι το [-π, π] αναλόγως με τον προσανατολισμό.

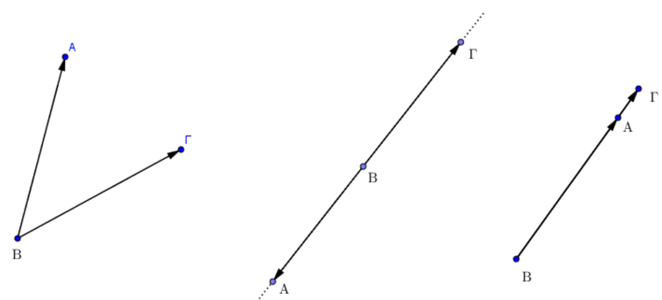
Εάν τα διανύσματα $\overline{\text{ΒΓ}}$ και $\overline{\text{ΒΑ}}$ είναι ομόρροπα τότε η τιμή της είναι ίση με το μηδέν.

Όταν τα διανύσματα $\overline{\text{ΒΓ}}$ και $\overline{\text{ΒΑ}}$ είναι αντίρροπα τότε η τιμή της ισούται με π ή –π αναλόγως με τι φορά την διαγράφουμε.

Όταν η γωνία ΑΒΓ έχει μέτρο ίσο με π ή –π την ονομάζουμε *ευθεία γωνία* και όταν έχει μέτρο μηδέν την ονομάζουμε *μηδενική γωνία.*

Όταν τα διανύσματα $\overline{\text{ΒΓ}}$ και $\overline{\text{ΒΑ}}$ δεν είναι συγραμμικά τότε η τιμή της ισούται με κάποια τιμή μέσα στο διάστημα [-π, π] η οποία θα είναι διάφορη του 0, π και –π.

Η γωνία ΑΒΓ είναι *κυρτή γωνία.*

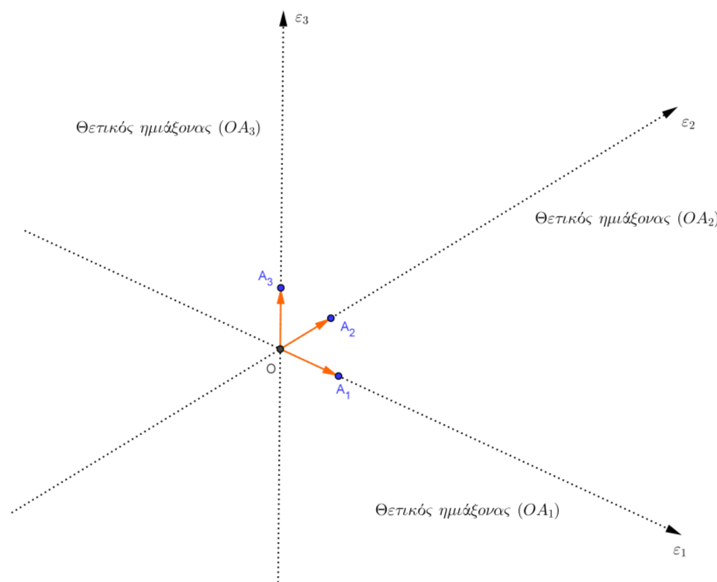


Στην συνέχεια εισάγουμε την έννοια του συστήματος αξόνων. Έστω σημείο Ο του εποπτικού χώρου. Θεωρούμε τρεις ευθείες $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$ οι οποίες περνούν από το σημείο Ο και είναι ανά δύο κάθετες.

Βαθμονομούμε τις τρεις ευθείες επιλέγοντας τρία σημεία $Α_1$, $Α_2$, και $Α_3$ τέτοια ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα $ΟΑ_1$, $ΟΑ_2$ και $ΟΑ_3$ να είναι ισομήκη. Το μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων αυτών λαμβάνεται ίσο με την μονάδα.

Τα προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα $\overline{OA_1}$, $\overline{OA_2}$ και $\overline{OA_3}$ είναι προσανατολισμένα θετικά. Οι ημιευθείες OA_1, OA_2 και OA_3 ορίζουμε ότι είναι προσανατολισμένες θετικά και οι αντικείμενες τους προσανατολισμένες αρνητικά.

Οι βαθμονομημένες και προσανατολισμένες ευθείες ε_1, ε_2 και ε_3 ονομάζονται άξονες. Οι ημιευθείες (OA_1), (OA_2) και (OA_3) ονομάζονται θετικοί ημιάξονες ενώ οι αντικείμενες ημιευθείες των παραπάνω ημιευθειών ονομάζονται αρνητικοί ημιάξονες.



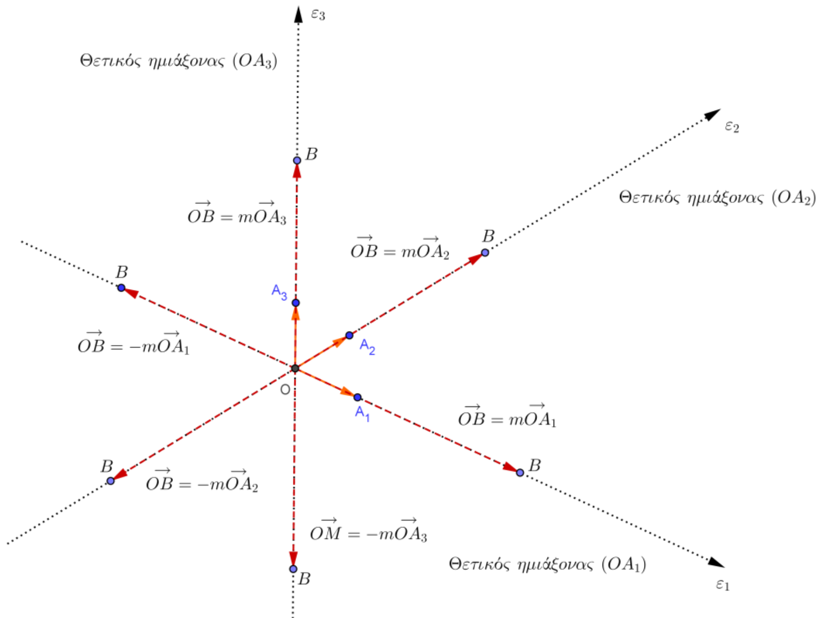
Όταν ένα διάνυσμα $\overrightarrow{OB}$ μέτρου m_1 κείται στον θετικό ημιάξονα (OA_1) γράφουμε

$$\overrightarrow{OB} = m\overrightarrow{OA_1}$$

Εάν κείται στον αντικείμενο ημιάξονα του (OA_1) (αρνητικός ημιάξονας) τότε γράφουμε

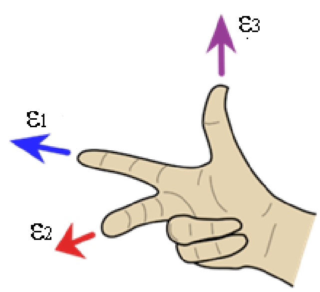
$$\overrightarrow{OB} = -m\overrightarrow{OA_1}$$

Ανάλογες σχέσεις ισχύουν όταν το διάνυσμα $\overrightarrow{OB}$ ανήκει στον θετικό ημιάξονα (OA_2) στον αντικείμενο του αρνητικό ημιάξονα, στον θετικό ημιάξονα (OA_3) και στον αντικείμενο του αρνητικό ημιάξονα.



Στο παραπάνω σχήμα δείχνουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις.

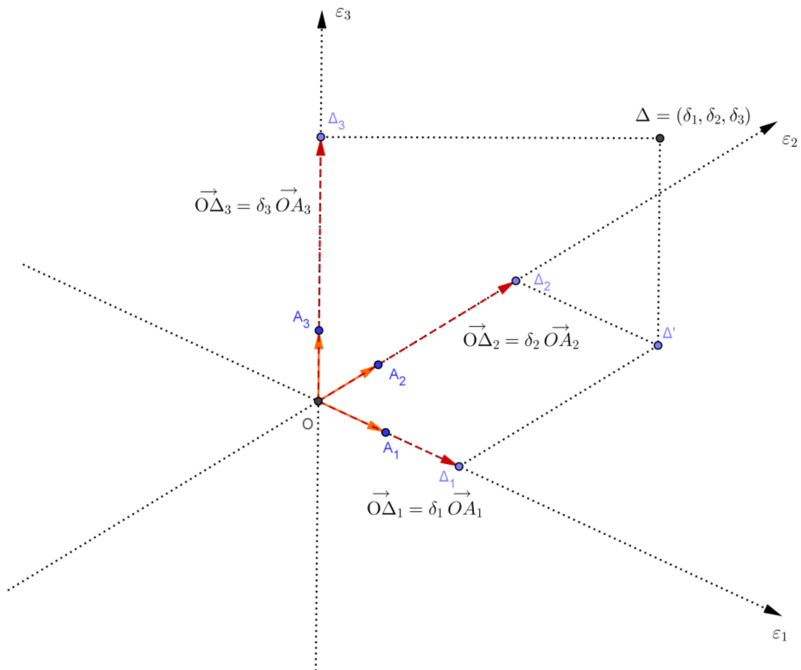
Στην συνέχεια υποθέτουμε ότι η γωνία A_1OA_2 διαγράφεται θετικά και ότι η σειρά των αξόνων $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ακολουθεί τον κανόνα του δεξιού χεριού.



Με τις παραπάνω προϋποθέσεις το σύνολο των παραπάνω ευθειών ε_1, ε_2, και ε_3 ονομάζεται Καρτεσιανό σύστημα αξόνων και τα εφαρμοστά διανύσματα μια δεξιόστροφη τριάδα.

Έστω ένα τυχαίο σημείο Δ του εποπτικού χώρου και το διάνυσμα θέσης $\overline{O\Delta}$. Προβάλλουμε το σημείο Δ στους άξονες ε_1, ε_2, και ε_3. Έστω Δ_1, Δ_2, Δ_3 οι προβολές του στους άξονες αυτούς αντίστοιχα και

$$\overline{O\Delta_1} = \delta_1 \overline{OA_1} \ , \ \overline{O\Delta_2} = \delta_2 \overline{OA_2} \ , \ \overline{O\Delta_3} = \delta_3 \overline{OA_3}$$



Με τον τρόπο αυτό αντιστοιχούμε στο σημείο Δ την τριάδα (δ_1, δ_2, δ_3). Αυτό μπορεί να γίνει και για κάθε σημείο του εποπτικού χώρου. Το πρόσημο των αριθμών δ_1, δ_2, δ_3 εξαρτάται από τον ημιάξονα (θετικό ή αρνητικό) στον οποίο ανήκει (βλέπε και σχετικό σχήμα στην προηγούμενη παράγραφο).

Τον αριθμό δ_1 τον ονομάζουμε τετμημένη του σημείου Δ, τον αριθμό δ_2 τεταγμένη του σημείου Δ και τον αριθμό δ_3 κατηγμένη του σημείου Δ.

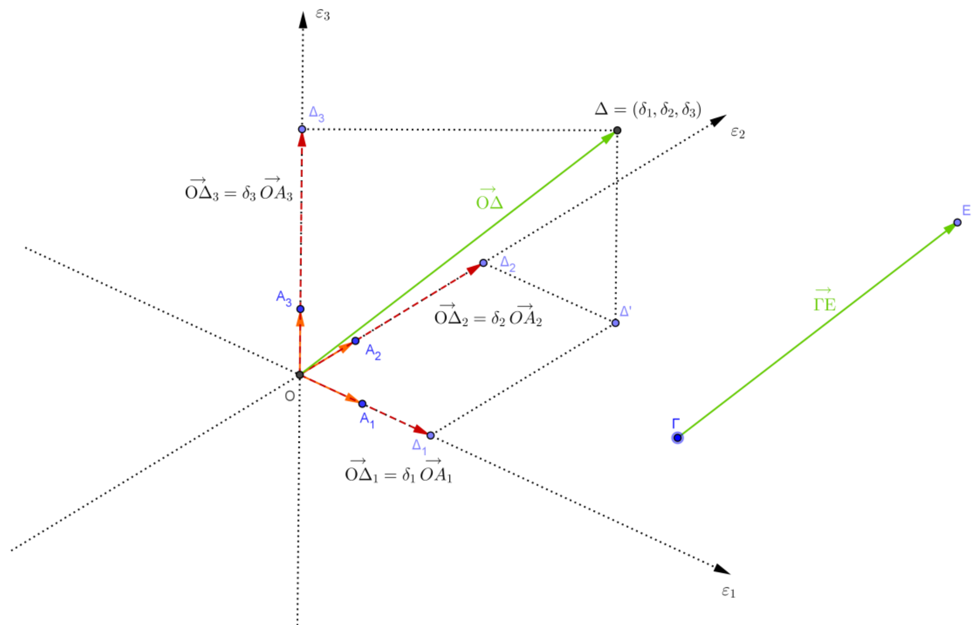
Όμως πριν αντιστοιχήσαμε σε κάθε σημείο του εποπτικού χώρου ένα διάνυσμα θέσης. Επομένως και στο σημείο Δ αντιστοιχείται το διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{\mathrm{O\Delta}}$. Άρα η τριάδα ($\delta_1$, δ_2, δ_3) αντιστοιχείται όχι μόνο στο σημείο Δ αλλά και στο διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{\mathrm{O\Delta}}$.
Ένα διάνυσμα θέσης ορίζει μια κλάση ισοδυναμίας δική του – δηλαδή ένα ελεύθερο διάνυσμα. Στο ελεύθερο διάνυσμα ΟΔ αντιστοιχείται η τριάδα (δ_1,δ_2, δ_3).

Επομένως:

α) Η τριάδα (δ_1, δ_2, δ_3) ονομάζονται Καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου Δ.

β) Κάθε σημείο Δ του εποπτικού χώρου αντιστοιχείται σε ένα διάνυσμα το οποίο είναι το διάνυσμα $\overline{\mathrm{O\Delta}}$. Το διάνυσμα αυτό έχει συντεταγμένες (δ_1,δ_2,δ_3)

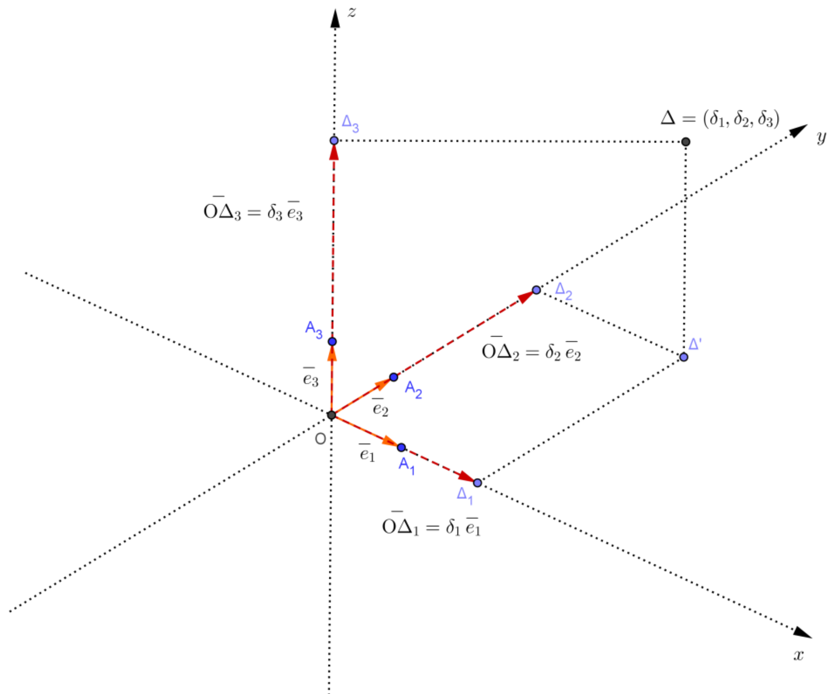
γ) Έστω $\overrightarrow{\mathrm{ΓΕ}}$ μια παράλληλη μετατόπιση του διανύσματος $\overrightarrow{\mathrm{ΟΔ}}$. Τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{ΓΕ}}$ ανήκει στην κλάση ισοδυναμίας του (εφαρμοστού) διανύσματος θέσης $\overrightarrow{\mathrm{ΟΔ}}$ που είναι το ελεύθερο διάνυσμα $\overline{\mathrm{ΟΔ}}$. Επομένως οι συντεταγμένες του θα είναι ($δ_1$, $δ_2$, $δ_3$).



<u>*Συντεταγμένα επίπεδα*</u>

Πριν ορίσαμε ένα σύστημα τριών αξόνων όπου το κέντρο του το ονομάσαμε Ο, οι άξονες ήταν ανά δύο κάθετοι μεταξύ τους, τα διανύσματα $ΟΑ_1$, $ΟΑ_2$ και $ΟΑ_3$ τα οποία τα ορίσαμε ως μοναδιαία διανύσματα επί των τριών αξόνων ήταν ισομήκη και σαν σύστημα ήταν δεξιόστροφο (Καρτεσιανό σύστημα αξόνων).

Στην συνέχεια θα ονομάσουμε αυτούς τους τρεις άξονες ως x, y, και z και τα μοναδιαία διανύσματα $\overrightarrow{ΟΑ_1}, \overrightarrow{ΟΑ_2}, \overrightarrow{ΟΑ_3}$ θα τα συμβολίζουμε ως $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ αντίστοιχα. Αυτό γίνεται για να έχουμε συμβολισμούς που χρησιμοποιούνται στην Γραμμική Άλγεβρα.



Υπάρχουν κάποια διανύσματα του χώρου τα οποία κείνται σε ένα χαρακτηριστικό επίπεδο ή αλλοιώς συντεταγμένο επίπεδο.
Θέλουμε να ορίσουμε ποια θα είναι τα χαρακτηριστικά ή αλλοιώς τα συντεταγμένα επίπεδα του τρισδιάστατου χώρου.
Τα χαρακτηριστικά – συντεταγμένα επίπεδα του τρισδιάστατου χώρου είναι τρία:

Το πρώτο είναι το επίπεδο xy στο οποίο κείνται οι άξονες x και y. Κάθε διάνυσμα που κείται στο επίπεδο αυτό έχει μηδενική κατηγμένη.

Το δεύτερο είναι το επίπεδο xz στο οποίο κείνται οι άξονες x και z. Κάθε διάνυσμα που κείται στο επίπεδο αυτό έχει μηδενική τεταγμένη.

Το τρίτο είναι το επίπεδο yz στο οποίο κείνται οι άξονες y και z. Κάθε διάνυσμα που κείται στο επίπεδο αυτό έχει μηδενική τετμημένη.

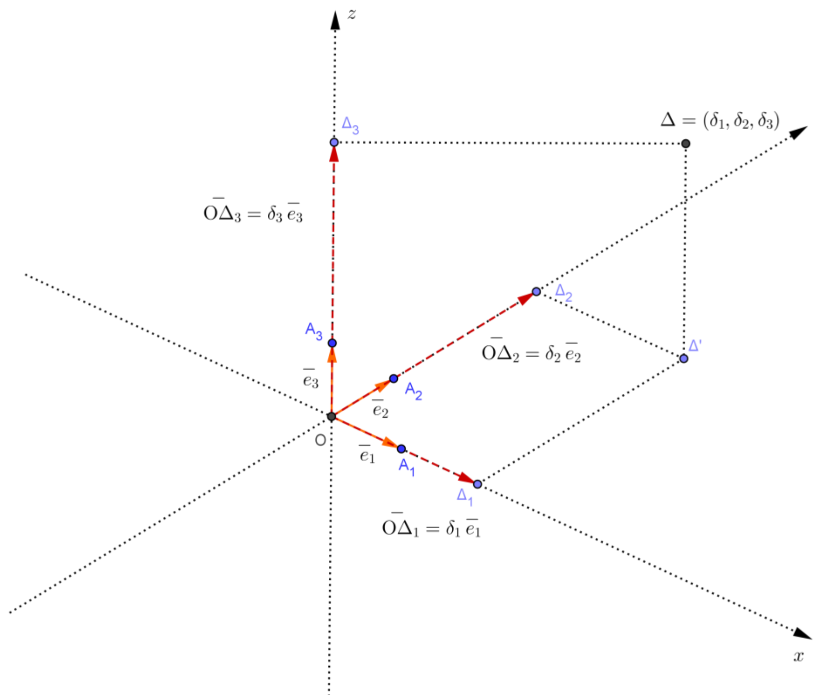
Επίσης για τα διανύσματα $\overline{O\Delta_1}, \overline{O\Delta_2}, \overline{O\Delta_3}$ έχουμε τα εξής

Το διάνυσμα $\overline{O\Delta_1}$ *κείται στον άξονα x έχει συντεταγμένες* $(\delta_1, 0, 0)$
Το διάνυσμα $\overline{O\Delta_2}$ *κείται στον άξονα y έχει συντεταγμένες* $(0, \delta_2, 0)$
Το διάνυσμα $\overline{O\Delta_3}$ *κείται στον άξονα z έχει συντεταγμένες* $(0, 0, \delta_3)$

Οι συντεταγμένες του μοναδιαίου διανύσματος $\bar{e}_1$ *που κείται στον άξονα x έχει συντεταγμένες (1, 0, 0).*

Οι συντεταγμένες του μοναδιαίου διανύσματος $\bar{e}_2$ *που κείται στον άξονα y έχει συντεταγμένες (0, 1, 0).*

Οι συντεταγμένες του μοναδιαίου διανύσματος $\bar{e}_3$ *που κείται στον άξονα z έχει συντεταγμένες (0 ,0, 1).*

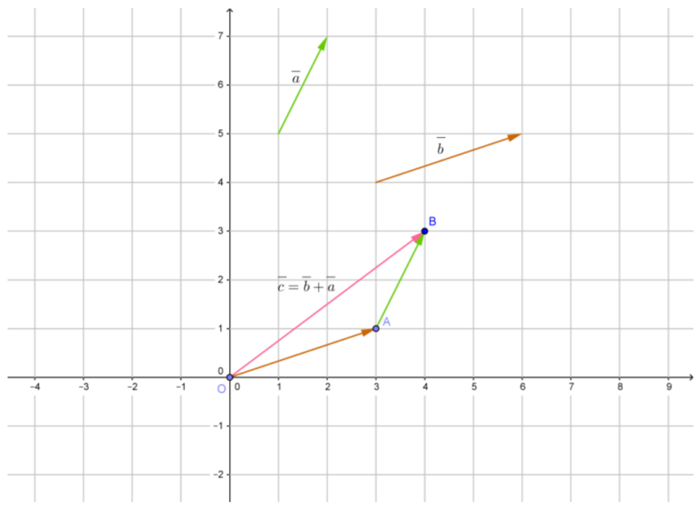


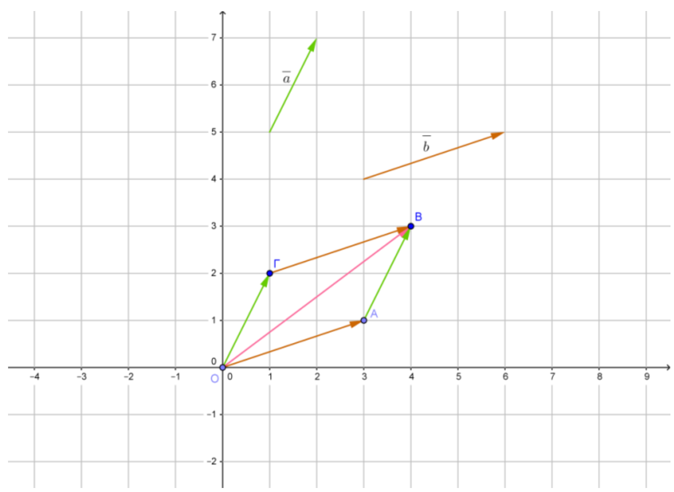
1 Πράξεις με διανύσματα

Η πρόσθεση μεταξύ των διανυσμάτων διαφέρει λίγο από αυτή των ευθυγράμμων τμημάτων γιατί ο ορισμός του διανύσματος εμπλέκει τις έννοιες διεύθυνση και φορά.
Εάν θέλουμε να προσθέσουμε δύο διανύσματα τότε υπάρχουν δύο τρόποι:

α) τα κάνουμε διαδοχικά και το άθροισμά τους είναι ένα διάνυσμα που έχει αρχή την αρχή του πρώτου και τέλος το τέλος του δεύτερου.

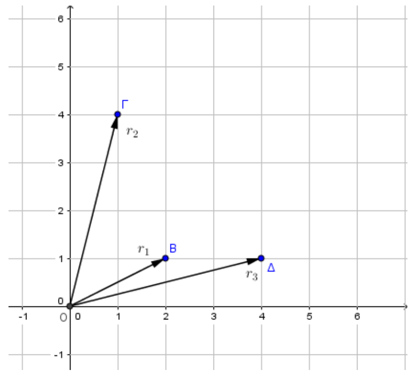
β) Τα τοποθετούμε έτσι ώστε να έχουν κοινή αρχή και στην συνέχεια σχεδιάζουμε ένα παραλληλόγραμμο το οποίο έχει μήκος πλευρών όσο τα μέτρα των διανυσμάτων.



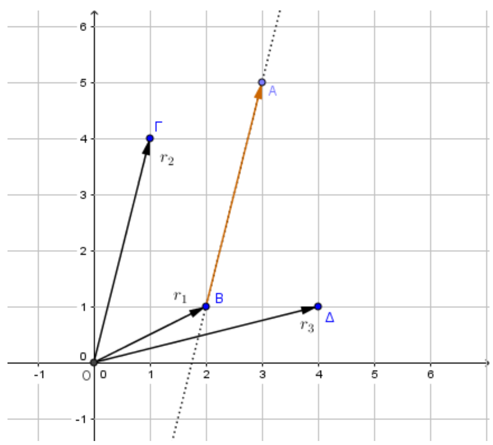


Η πρόσθεση των διανυσμάτων (γεωμετρικά) γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε αν (α_1,b_1) και (α_2, b_2) είναι οι συντεταγμένες των δύο διανυσμάτων που προσθέτουμε τότε το άθροισμα τους είναι ένα διάνυσμα με συντεταγμένες ($\alpha_1 + \alpha_2$, $b_1 + b_2$).
Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι η πρόσθεση διανυσμάτων είναι πράξη αντιμεταθετική.
Εάν έχουμε n το πλήθος διανύσματα και θέλουμε να τα προσθέσουμε τότε τα κάνουμε διαδοχικά και το άθροισμα τους είναι το διάνυσμα το οποίο έχει ως αρχή την αρχή του πρώτου και πέρας το πέρας του τελευταίου. Θα δώσουμε ένα παράδειγμα όπου θα προσθέσουμε τρία διανύσματα στο επίπεδο. Έστω

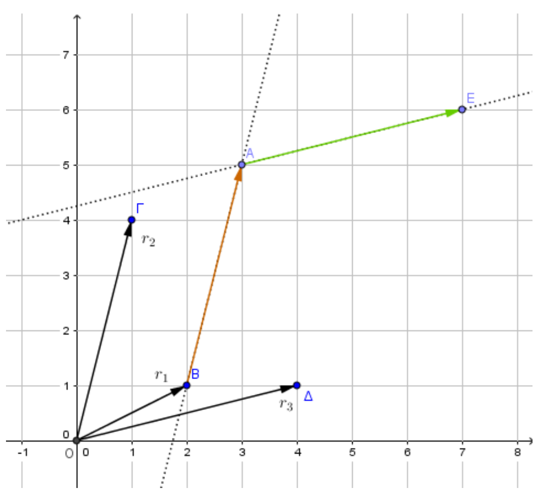
$\bar{r}_1 = (2,1,0)$, $\bar{r}_2 = (1,4,0)$, $\bar{r}_3 = (4,1,0)$



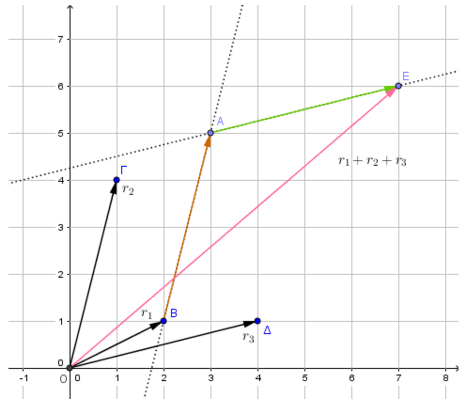
Σχεδιάζουμε παράλληλη ευθεία προς το διάνυσμα r_2 η οποία διέρχεται από το σημείο Β και σχεδιάζουμε ένα διάνυσμα το οποίο είναι ίσο με το διάνυσμα r_2 με αρχή το σημείο Β.



Σχεδιάζουμε παράλληλη ευθεία προς το διάνυσμα r_3 η οποία διέρχεται από το σημείο Α και σχεδιάζουμε ένα διάνυσμα το οποίο είναι ίσο με το διάνυσμα r_3 με αρχή το σημείο Α.



Το διάνυσμα που είναι αντιστοιχεί στο άθροισμα των διανυσμάτων r_1, r_2 και r_3 είναι το διάνυσμα που έχει αρχή το σημείο Ο και πέρας το σημείο Ε.



Η διαδικασία επεκτείνεται για τον υπολογισμό του αθροίσματος n του πλήθους διανυσμάτων r_1, r_2,…, r_n.

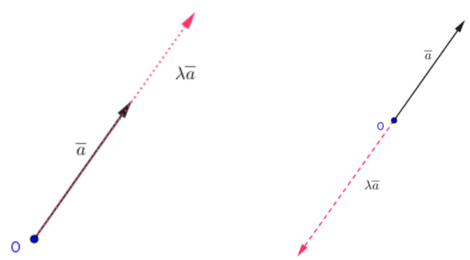
Για τον πολλαπλασιασμό πραγματικού αριθμού με διάνυσμα έχουμε ότι αν

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

και λ ένας θετικός πραγματικός αριθμός τότε

$$\lambda\bar{a} = \lambda(a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

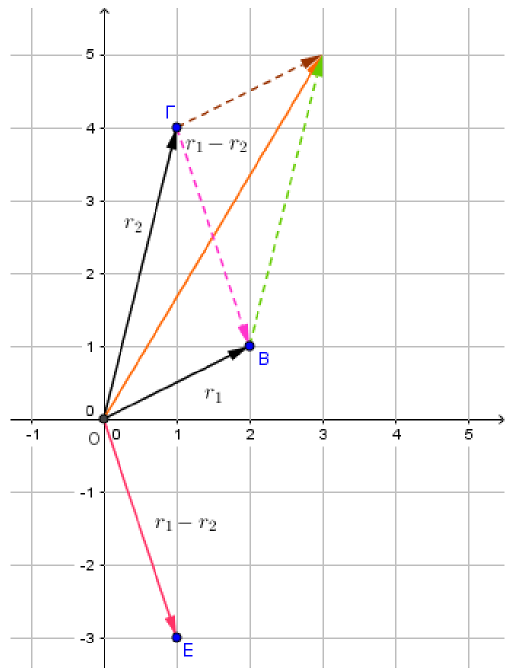
Το διάνυσμα που προκύπτει είναι ένα διάνυσμα όπου οι συνιστώσες του είναι πολλαπλάσιες του αρχικού διανύσματος. Επειδή ο πραγματικός αριθμός λ είναι θετικός το διάνυσμα που προκύπτει είναι ένα διάνυσμα με ίδια διεύθυνση, ίδια φορά και μέτρο λ φορές το μέτρο του αρχικού. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το αρχικό διάνυσμα και το διάνυσμα που προκύπτει είναι *ομόρροπα.*
Στην περίπτωση όπου το λ είναι αρνητικός πραγματικός αριθμός τότε το διάνυσμα που προκύπτει είναι ένα διάνυσμα με ίδια διεύθυνση, αντίθετη φορά και μέτρο $|\lambda|$ φορές το μέτρο του αρχικού διανύσματος. Στην περίπτωση αυτή τα δύο διανύσματα είναι *αντίρροπα.*

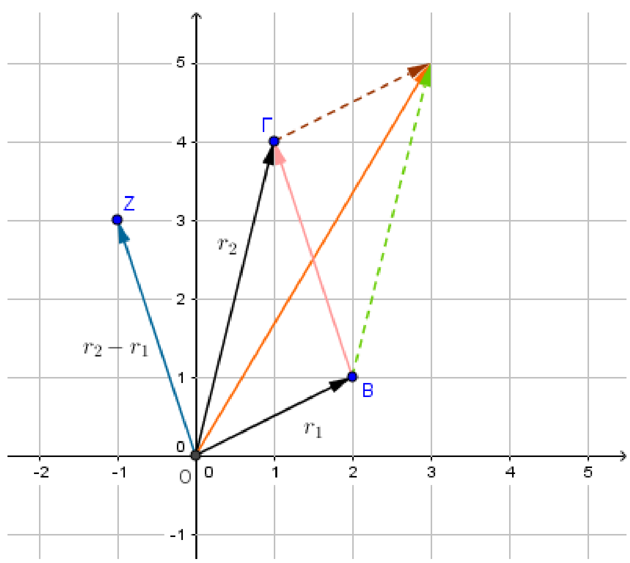


Η αφαίρεση δύο διανυσμάτων $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ ορίζεται ως

$$\bar{r}_1 - \bar{r}_2 = \bar{r}_1 + (-\bar{r}_2)$$
$$\bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \bar{r}_2 + (-\bar{r}_1)$$

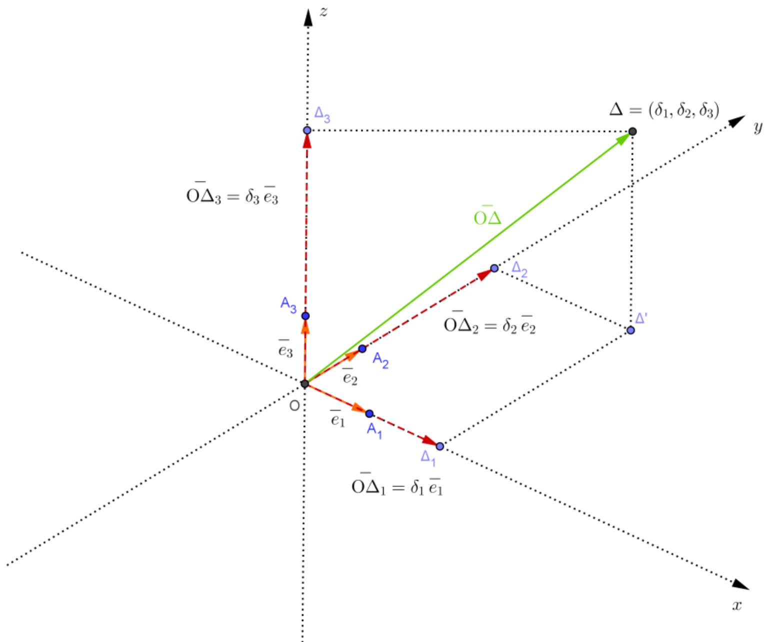
Γεωμετρικά οι παραπάνω διαφορές είναι διανύσματα που σχετίζονται με την δεύτερη διαγώνιο του παραλληλογράμμου που κατασκευάσαμε όταν προσθέταμε δύο διανύσματα.





Διανύσματα βάσης

Είδαμε ότι ένα διάνυσμα $\overline{\mathrm{O\Delta}}$ του εποπτικού χώρου έχει Καρτεσιανές συντεταγμένες (δ_1, δ_2, δ_3).



Από το παραπάνω σχήμα και από τον τρόπο που ορίσαμε την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό μεταξύ αριθμού και διανύσματος έχουμε ότι

$$\overline{\mathrm{O\Delta}} = \overline{\mathrm{O\Delta_1}} + \overline{\mathrm{O\Delta_2}} + \overline{\mathrm{O\Delta_3}} \Rightarrow \overline{\mathrm{O\Delta}} = \delta_1\overline{e}_1 + \overline{\delta}_2\overline{e}_2 + \delta_3\overline{e}_3$$

Επειδή το διάνυσμα $\overline{\mathrm{O\Delta}}$ είναι τυχαίο σημαίνει ότι κάθε διάνυσμα του εποπτικού χώρου αναλύεται σαν άθροισμα γινομένων πραγματικών αριθμών και των τριών διανυσμάτων $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$. Τα τρία διανύσματα αυτά τα ονομάζουμε διανύσματα βάσης του εποπτικού χώρου.

………………………..