Λίγα λόγια για την εκθετική συνάρτηση

Η εκθετική συνάρτηση είναι η

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(Αποδεικνύεται ότι το πιο πάνω όριο υπάρχει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.)

Η εκθετική συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, θετική, παραγωγίσιμη και $(e^x)' = e^x$. Επιπλέον ικανοποιεί

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x\to\infty} e^x = \infty, \quad e^0 = 1.$$

Τέλος ισχύει

$$e^{x_1+x_2} = e^{x_1}\cdot e^{x_2}, \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Λίγα λόγια για τη λογαριθμική συνάρτηση

Η εκθετική συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to (0,\infty) : f(x) = e^x$ είναι $1-1$ και επί. Η λογαριθμική συνάρτηση $\ln$ είναι η αντίστροφη της εκθετικής, δηλαδή

$$\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R} : \ln(y) = x \iff e^x = y.$$

Ο αριθμός $\ln(y)$ ονομάζεται επίσης ο φυσικός λογάριθμος ή νεπέριος λογάριθμος (napierian logarithm) του y.

Η λογαριθμική συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, παραγωγίσιμη και ισχύει $\ln'(y) = y^{-1}$. Επιπλέον ικανοποιεί

$$\lim_{y\to 0} \ln(y) = -\infty, \qquad \lim_{y\to\infty} \ln(y) = \infty,$$
$$\ln(1) = 0, \quad \ln(y) > 0 \iff y > 1.$$

Τέλος ισχύει

$$\ln(y_1 \cdot y_2) = \ln y_1 + \ln y_2, \qquad y_1, y_2 > 0.$$

Αλλαγή Βάσης

Για κάθε $a > 0$ ορίζεται η εκθετική συνάρτηση με βάση το a

$$\boxed{a^x = e^{x \cdot \ln a}, \quad x \in \mathbb{R}.}$$

Για $a > 1$ η συνάρτηση $x \mapsto a^x$ έχει την ίδια μονοτονία και την ίδια οριακή συμπεριφορά με την e^x ενώ για $0 < a < 1$ έχει τις αντίστοιχες ιδιότητες με την e^{-x} (γιατί τότε $\ln a < 0$).

Ισχύουν επιπλέον

$$a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} \quad (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}, \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

και

$$\ln a^x = x \cdot \ln a, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Για κάθε $a > 0$ με $a \neq 1$ ορίζεται η λογαριθμική συνάρτηση με βάση το a ως εξής

$$\boxed{\log_a(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}, \quad y > 0.}$$

Αποδεικνύεται ότι η $\log_a$ είναι η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης με βάση το a, δηλαδή

$$a^x = y \iff \log_a y = x, \quad x \in \mathbb{R},\ y > 0.$$

Για $a > 1$ η $\log_a$ έχει την ίδια μονοτονία και την ίδια οριακή συμπεριφορά με την $\ln$ ενώ για $0 < a < 1$ έχει τις αντίστοιχες ιδιότητες με την $-\ln$ (γιατί τότε $\ln a < 0$).

Ισχύει επιπλέον

$$\log_a(y_1 \cdot y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2, \quad y_1, y_2 > 0.$$

Με $\log$ συμβολίζεται η συνάρτηση $\log_{10}$, αν και πολλές φορές με $\log$ εννοούμε τη συνάρτηση $\ln$.