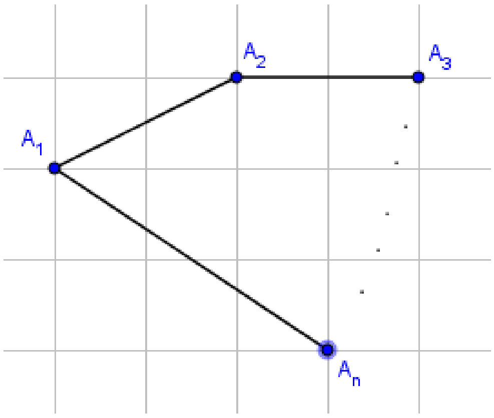
Μάθημα 3^{β}

Παράδειγμα Πρώτο

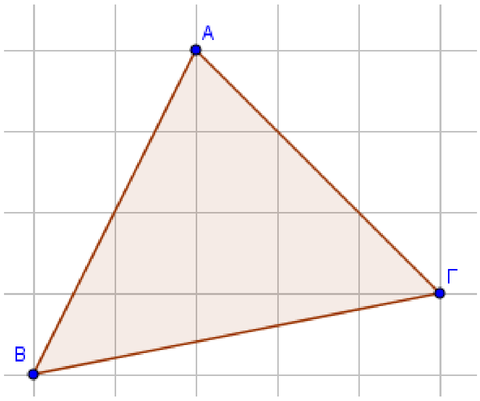
Εμβαδόν απλού πολυγώνου με βάση τις συντεταγμένες του. Έστω ένα απλό πολύγωνο με κορυφές $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$, …, $A_n = (x_n, y_n)$.

Σχέση του Albrecht Ludwig Friedrich Meister (1769): Το εμβαδόν ενός απλού πολυγώνου δίδεται από την παρακάτω σχέση

$$E = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)\right| = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix}\right|$$



Ειδική περίπτωση: Να υπολογιστεί το εμβαδόν ενός τριγώνου με κορυφές Α = (3, 5), Β = (1, 1) και Γ = (6, 2) με την σχέση του Meister.



Είναι

$$E = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{3} \det\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}\right|$$

$$\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right\|$$

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου ισούται με

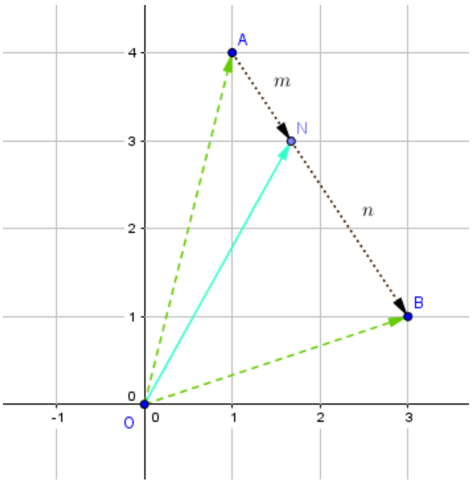
$$E = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix}\right\|$$

<u>Παράδειγμα Δεύτερο</u>

Δίδονται οι συντεταγμένες δύο σημείων Α και Β πάνω στο επίπεδο

Α = (1, 4) , Β = (3, 1)

Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Να γραφούν οι σχέσεις οι οποίες δίδουν τις συντεταγμένες ενός σημείου Ν το οποίο χωρίζει το ευθύγραμμο τμήμα σε λόγο m : n.



Είναι

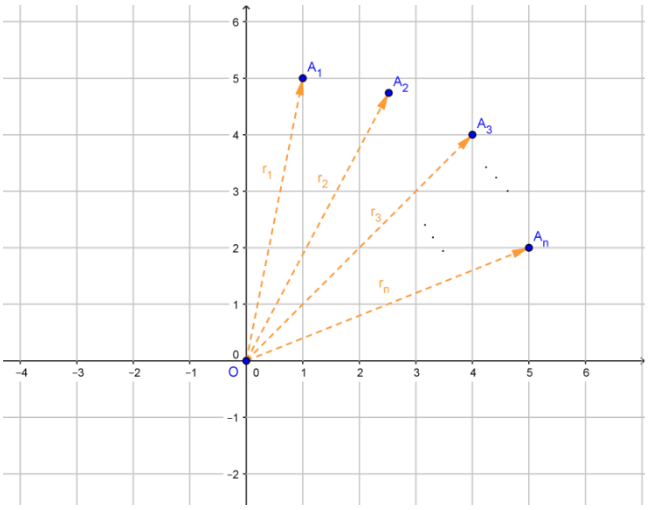
$$\vec{AB} = \vec{AN} + \vec{NB}$$
$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

$$\vec{ON} = \vec{OA} + \vec{AN} = \vec{OA} + \frac{m}{m+n}\vec{AB} = \vec{OA} + \frac{m}{m+n}(\vec{OB} - \vec{OA}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{ON} = \frac{n\vec{OA} + m\vec{OB}}{m+n}$$

Παράδειγμα Τρίτο

Έστω n το πλήθος διανύσματα $\bar{r}_1 , \bar{r}_2 , \bar{r}_3 , \ldots , \bar{r}_n$ του επιπέδου.



Ονομάζουμε κεντροειδές (centroid) ή διάνυσμα μέσης θέσεως των διανυσμάτων $\bar{r}_1 , \bar{r}_2 , \bar{r}_3 , \ldots , \bar{r}_n$ *το διάνυσμα*

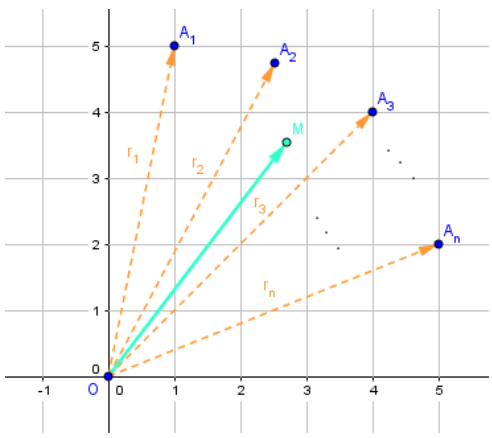
$$\bar{r}_{mp} = \frac{\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3 + \ldots + \bar{r}_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i$$

Αν

$$\bar{r}_1 = (x_1, y_1) \quad , \quad \bar{r}_2 = (x_2, y_2) \quad , \quad \ldots\ldots \quad , \quad \bar{r}_n = (x_n, y_n)$$

τότε ο παραπάνω τύπος γίνεται

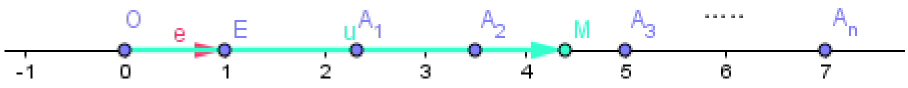
$$\bar{r}_{mp} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n \ , \ y_1 + y_2 + \ldots y_n) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \ , \ \sum_{i=1}^{n} y_i \right)$$



Ονομάζουμε μέτρο του διανύσματος μέσης θέσεως των διανυσμάτων $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \dots, \bar{r}_n$ *το μέγεθος*

$$\left|\bar{r}_{mp}\right| = \frac{1}{n}\left|\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3 + \dots + \bar{r}_n\right| = \sqrt{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 + (y_1 + y_2 + \dots + y_n)^2}$$

Στην περίπτωση του διανυσματικού χώρου R τα παραπάνω γίνονται ως εξής



$$\bar{r}_{mp} = \frac{1}{n}(x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_1) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)\bar{e}_1$$

Η τετμημένη

$$\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

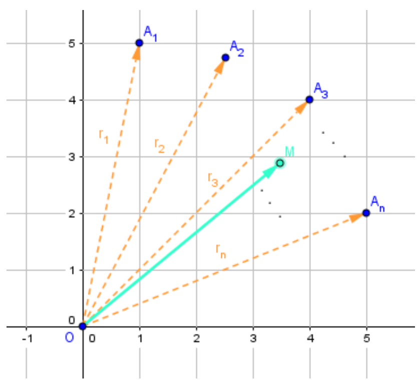
έχει σπουδαίο ρόλο στις εφαρμογές.

<u>Παράδειγμα Τέταρτο</u>

Έστω n το πλήθος διανύσματα $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \dots, \bar{r}_n$ του επιπέδου και n το πλήθος πραγματικοί αριθμοί $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$.

Ονομάζουμε διάνυσμα μέσης θέσεως των διανυσμάτων $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \dots, \bar{r}_n$ *ως προς τους πραγματικούς αριθμούς* $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ *το διάνυσμα*

$$\bar{r}_{mp}^{\,p_i} = \frac{p_1\bar{r}_1 + p_2\bar{r}_2 + p_3\bar{r}_3 + \dots + p_n\bar{r}_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n} =$$
$$= \frac{1}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n}(p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n\ ,\ p_1y_1 + p_2y_2 + \dots + p_ny_n)$$



Με παρόμοιο τρόπο ορίζουμε το ίδιο διάνυσμα στον διανυσματικό χώρο R δηλαδή

$$\bar{r}_{mp}^{\,p_i} = \frac{p_1 r_1 + p_2 r_2 + p_3 r_3 + \ldots + p_n r_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n}\,\bar{e}_1 = \frac{1}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n}(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n)\bar{e}_1$$

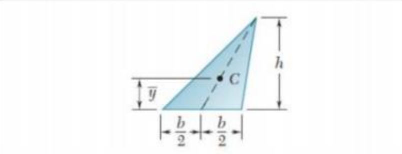
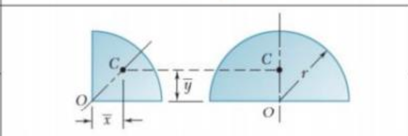
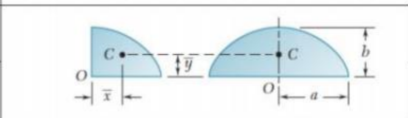
Η τετμημένη του παραπάνω διανύσματος

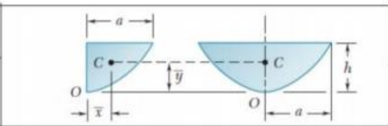
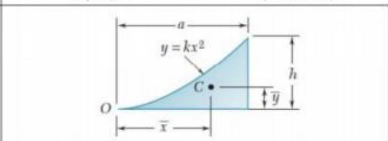
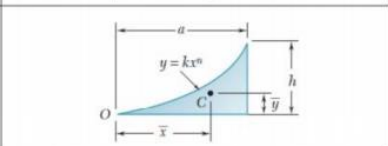
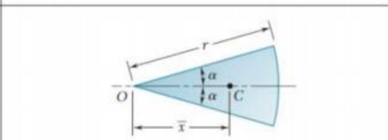
$$\frac{1}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n}(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n)$$

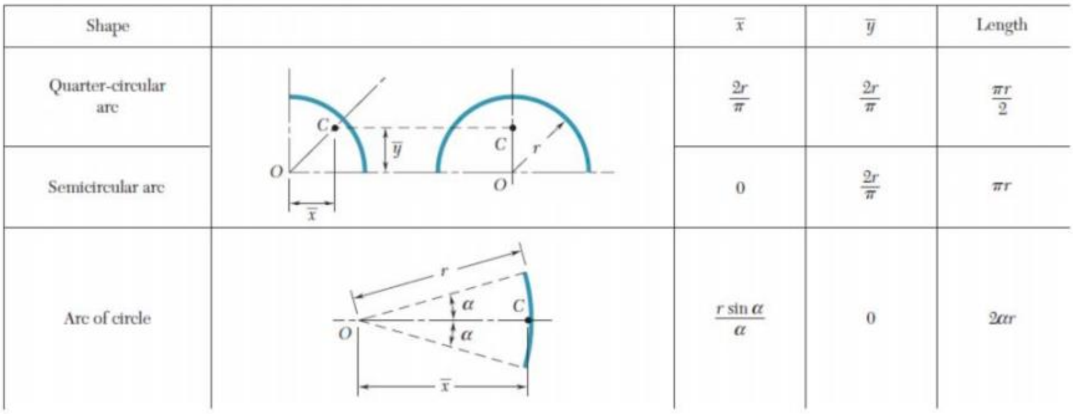
έχει σπουδαίο ρόλο στις εφαρμογές.

Δεχόμαστε (χωρίς απόδειξη) ότι: Το διάνυσμα θέσεως των διανυσμάτων $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \ldots, \bar{r}_n$ δεν εξαρτάται από το σημείο Ο.

Παρακάτω παρουσιάζουμε κέντρα βάρους διαφόρων σχημάτων

Shape		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Area
Triangular area			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Quarter-circular area		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Semicircular area		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Quarter-elliptical area		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Semielliptical area		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$

Semiparabolic area		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Parabolic area		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Parabolic spandrel		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
General spandrel		$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{4n+2}h$	$\frac{ah}{n+1}$
Circular sector		$\frac{2r\sin\alpha}{3\alpha}$	0	αr^2



Shape		$\overline{x}$	$\overline{y}$	Length
Quarter-circular arc		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Semicircular arc		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arc of circle		$\frac{r \sin \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

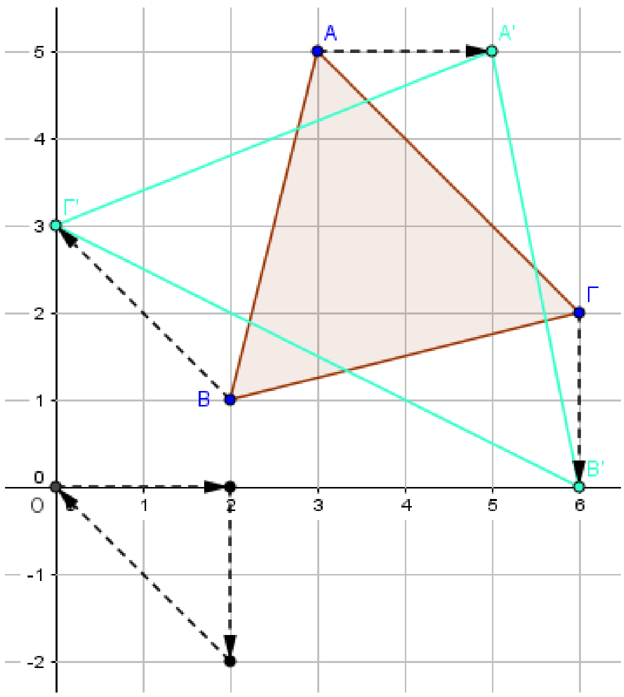
Τα κεντροειδή έχουν σχέση με το κέντρο μάζας και το κέντρο βάρους ενός σώματος.

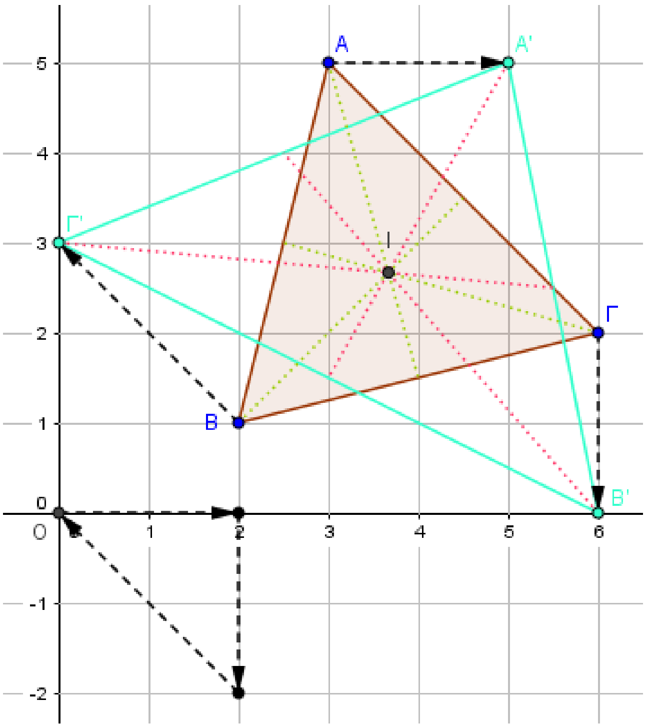
Παράδειγμα Πέμπτο

Να βρεθεί το κέντρο βάρους (βαρύκεντρο) σε ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο πλευράς α και στην συνέχεια να κατασκευαστεί από αυτό ένα τρίγωνο με ίδιο κέντρο βάρους.

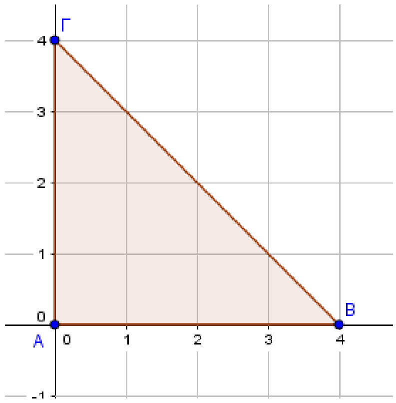
Για την κατασκευή θα στηριχτούμε στην παρακάτω ιδιότητα: Έστω τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου οι κορυφές μετατοπίζονται κατά τα διανύσματα $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ έτσι ώστε $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$

Τότε προκύπτει ένα τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ το οποίο έχει το ίδιο κέντρο βάρους με το αρχικό.





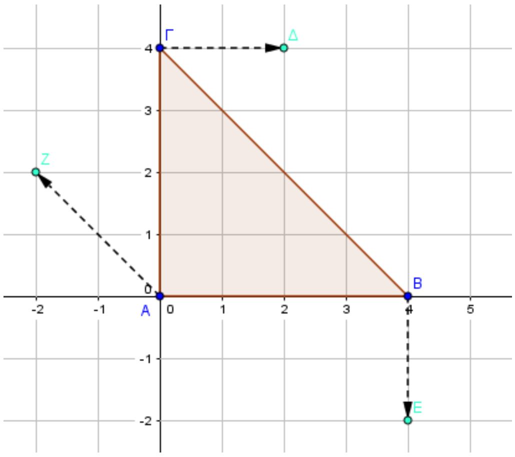
Συγκεκριμένα έστω ένα ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές μήκους 4 εκατοστά. Οι συντεταγμένες των κορυφών του είναι Α = (0, 0), Β = (4, 0) , Γ = (0, 4).



Θα μετατοπίσουμε τις κορυφές του κατά τα διανύσματα

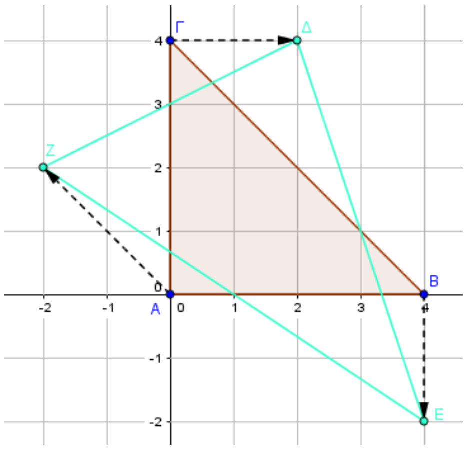
$\bar{a} = (2,0)$, $\bar{b} = (0,-2)$, $\bar{c} = (-2,2)$

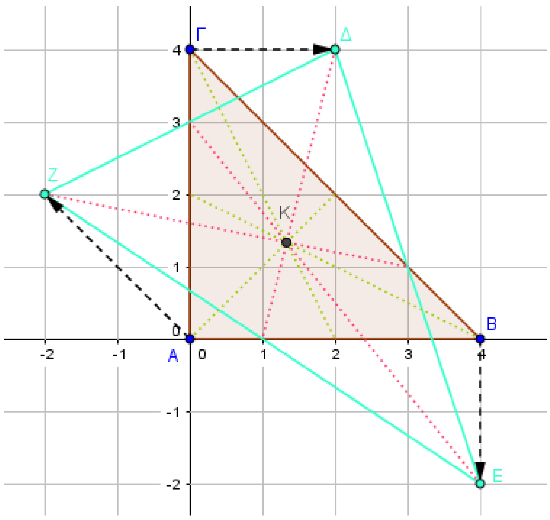
Κατ’ αρχήν παρατηρούμε ότι το άθροισμα τους είναι το μηδενικό διάνυσμα.



Το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ένα τρίγωνο το οποίο έχει το ίδιο βαρύκεντρο με το αρχικό. Οι συντεταγμένες των κορυφών του είναι

Δ = (2, 4) , Ε = (4, -2) , Ζ = (-2, 2)

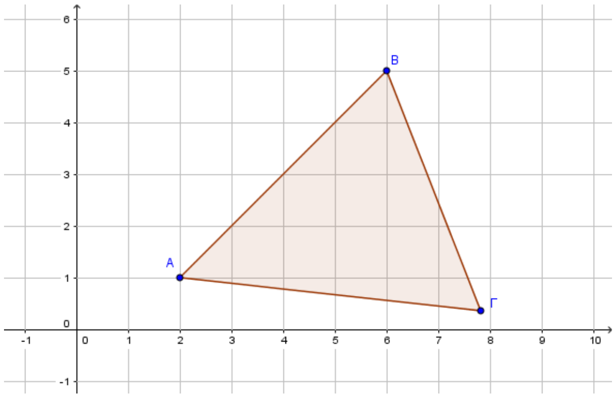




Παράδειγμα Έκτο

Δίδεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Να κατασκευαστεί ένα τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ από το αρχικό με ίδιο κέντρο βάρους.

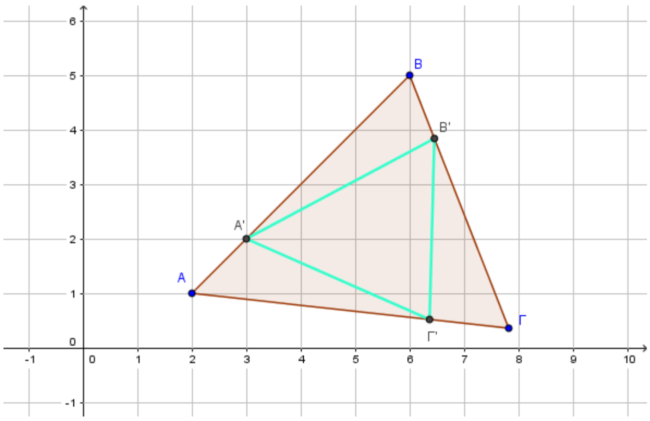
Μια άλλη μεθοδολογία για να κατασκευάζουμε δύο τρίγωνα με ίδιο κέντρο βάρους είναι η παρακάτω



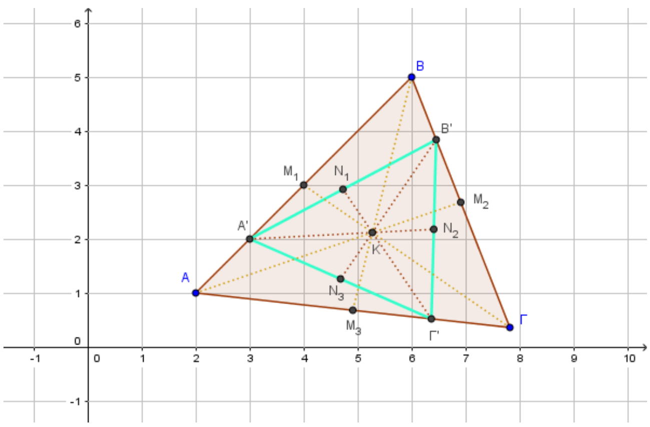
Το πρώτο βήμα είναι να επιλέξουμε τρία σημεία Α΄, Β΄, Γ΄ πάνω στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα έτσι ώστε

ΑΑ΄: Α΄Β = m : n , ΒΒ΄: Β΄Γ = m : n , ΓΓ΄: Γ΄Α = m : n

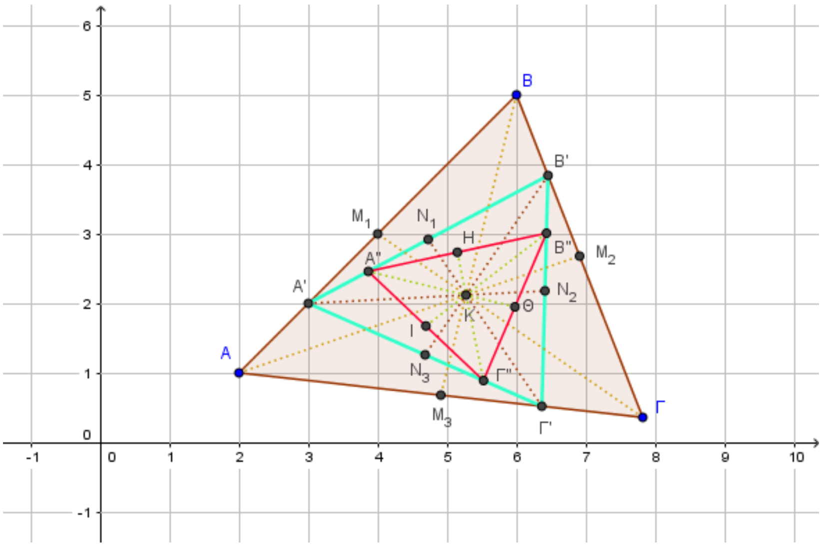
Στην περίπτωσή μας ο λόγος m : n θα ισούται με 1:3 δηλαδή τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄, θα είναι το 1/4 το μηκών των αντίστοιχων πλευρών.



Το τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ έχει το ίδιο κέντρο βάρους με το αρχικό.



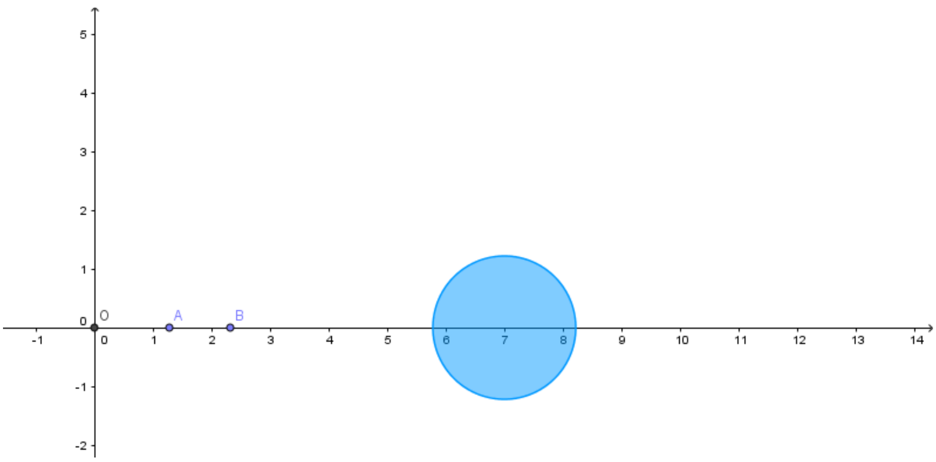
Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για το τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ βρίσκουμε ένα τρίγωνο Α΄΄Β΄΄Γ΄΄ με το ίδιο κέντρο βάρους. Εάν συνεχίσουμε την διαδικασία αυτή θα βρίσκουμε συνεχώς νέα τρίγωνα με κέντρο βάρους ίδιο του αρχικού.



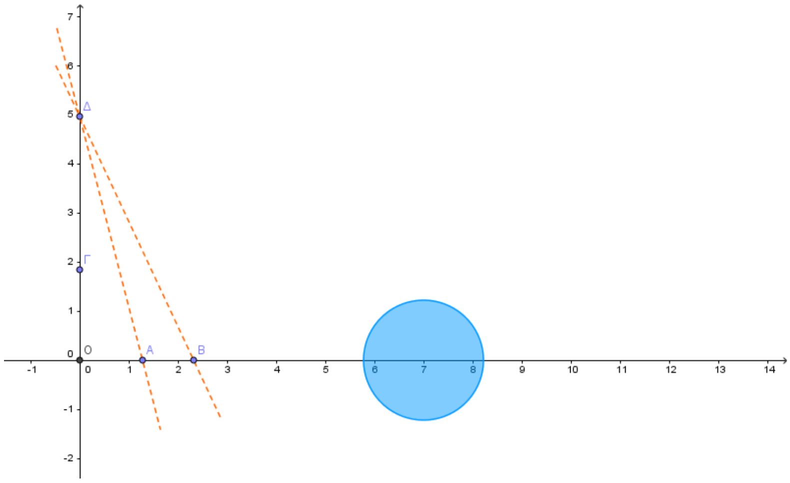
Παράδειγμα Έβδομο

Έστω τρία σημεία Ο, Α, Β επί του εδάφους τα οποία είναι συνευθειακά. Μετά το σημείο Β υπάρχει μια λίμνη. Να βρεθεί ένα σημείο Σ μετά την λίμνη το οποίο να ανήκει στην ευθεία των αρχικών σημείων.

Για να βρούμε το σημείο Δ πρέπει κατ' αρχήν τα σημεία Ο, Α και Β να είναι κοντά μεταξύ τους. Δεν μπορούμε να ξέρουμε ακριβώς το πόσο κοντά, θα χρειαστεί διερεύνηση.



Έστω (0, 0), (x_A, 0), και (x_B, 0) οι συντεταγμένες των αρχικών σημείων. Το πρώτο βήμα είναι να επιλέξουμε δύο τυχαία σημεία Γ και Δ πάνω στον άξονα y και να σχεδιάζουμε τις ευθείες (ΔΑ) και (ΔΒ)

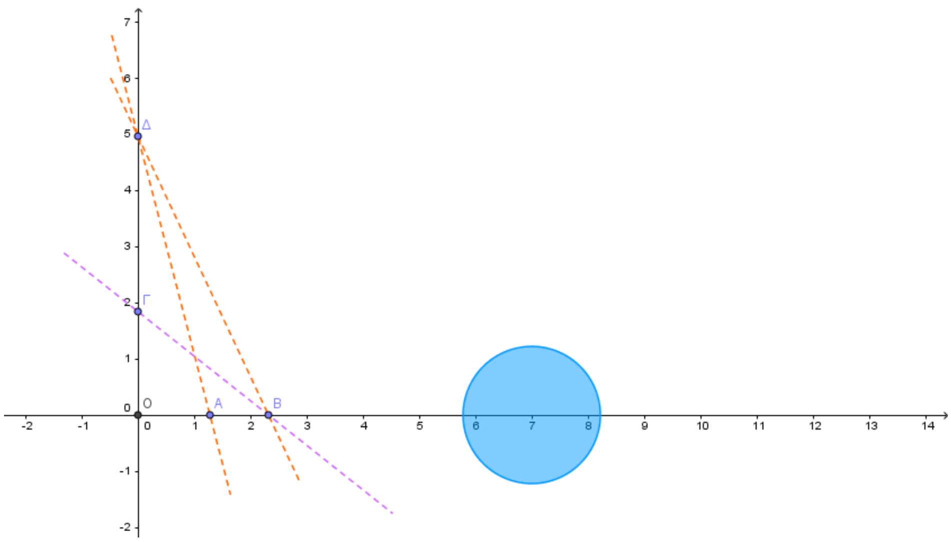


Οι εξισώσεις των ευθειών (ΔΑ) και (ΔΒ) αντίστοιχα είναι

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & 0 & 1 \\ 0 & y_\Delta & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -y_\Delta x - x_A y + x_A y_\Delta = 0 \Rightarrow y_\Delta x + x_A y = -x_A y_\Delta$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_B & 0 & 1 \\ 0 & y_\Delta & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -y_\Delta x - x_B y + x_B y_\Delta = 0 \Rightarrow y_\Delta x + x_B y = -x_B y_\Delta$$

Το δεύτερο βήμα είναι να σχεδιάσουμε την ευθεία (ΓΒ) δηλαδή την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Γ και Β.



Η εξίσωση της ευθείας (ΓΒ) είναι

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_B & 0 & 1 \\ 0 & y_\Gamma & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y_\Gamma x + x_B y = x_B y_\Gamma$$

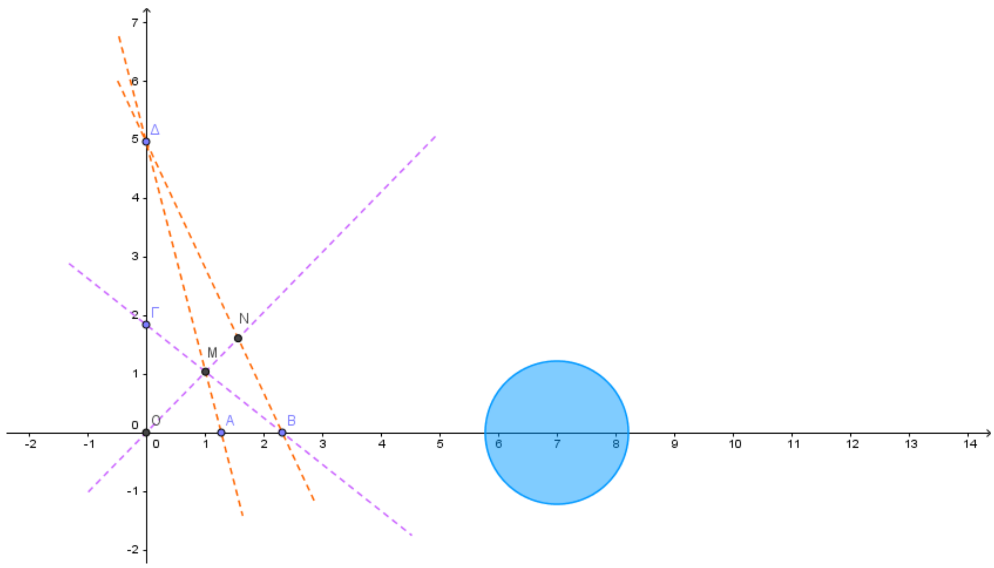
Έστω Μ το σημείο τομής των ευθειών (ΒΓ) και (ΔΑ). Οι συντεταγμένες του σημείου αυτού βρίσκονται από την λύση του παρακάτω συστήματος

$$y_\Delta x + x_A y = x_A y_\Delta$$
$$y_\Gamma x + x_B y = x_B y_\Gamma$$

$$D = x_B y_\Delta - x_A y_\Gamma$$
$$D_x = x_A x_B y_\Delta - x_A x_B y_\Gamma = x_A x_B (y_\Delta - y_\Gamma)$$
$$D_y = x_B y_\Gamma y_\Delta - x_A y_\Gamma y_\Delta = y_\Gamma y_\Delta (x_B - x_A)$$

$$x_M = \frac{x_A x_B (y_\Gamma - y_\Delta)}{x_A y_\Gamma - x_B y_\Delta} \quad , \quad y_M = \frac{y_\Gamma y_\Delta (x_A - x_B)}{x_A y_\Gamma - x_B y_\Delta}$$

Το τρίτο βήμα είναι να σχεδιάσουμε την ευθεία (ΟΜ). Η ευθεία αυτή τέμνει την ευθεία (ΔΒ) σε ένα σημείο Ν.



Η εξίσωση της ευθείας (ΟΜ) είναι

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \dfrac{x_A x_B (y_\Gamma - y_\Delta)}{x_A y_\Gamma - x_B y_\Delta} & \dfrac{y_\Gamma y_\Delta (x_A - x_B)}{x_A y_\Gamma - x_B y_\Delta} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{y_\Gamma y_\Delta (x_A - x_B)}{x_A y_\Gamma - x_B y_\Delta} x - \frac{x_A x_B (y_\Gamma - y_\Delta)}{x_A y_\Gamma - x_B y_\Delta} y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_\Gamma y_\Delta (x_A - x_B) x - x_A x_B (y_\Gamma - y_\Delta) y = 0$$

Οι συντεταγμένες του σημείου Ν βρίσκονται από την επίλυση του παρακάτω συστήματος

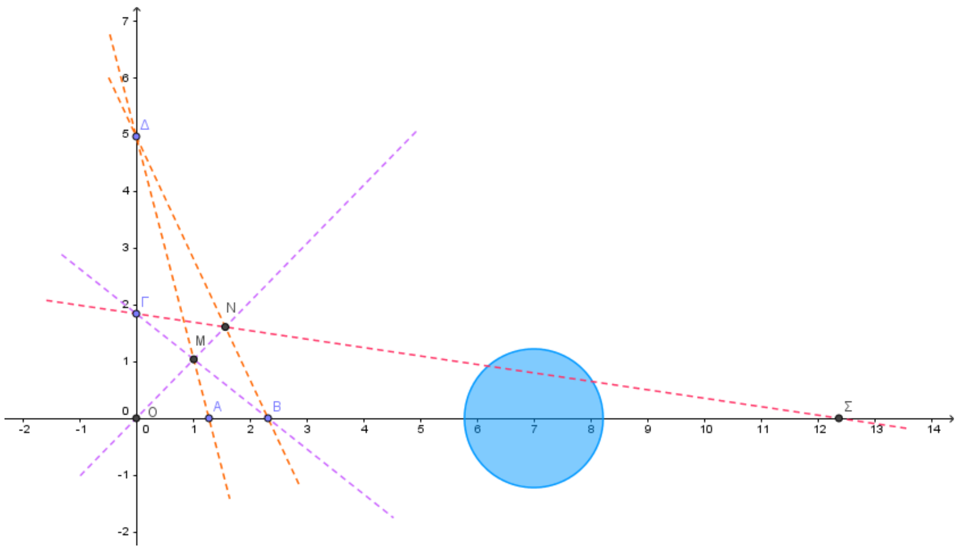
$$y_\Delta x \qquad + \qquad x_B y = x_B y_\Delta$$
$$y_\Gamma y_\Delta (x_A - x_B)x - x_A x_B (y_\Gamma - y_\Delta)y = 0$$

$$D = -x_A x_B y_\Delta (y_\Gamma - y_\Delta) - x_B y_\Gamma y_\Delta (x_A - x_B)$$
$$D_x = -x_A x_B^2 y_\Delta (y_\Gamma - y_\Delta)$$
$$D_y = -x_B y_\Gamma y_\Delta^2 (x_A - x_B)$$

$$x_N = \frac{x_A x_B y_\Delta (y_\Gamma - y_\Delta)}{x_A y_\Delta (y_\Gamma - y_\Delta) + y_\Gamma y_\Delta (x_A - x_B)}$$

$$y_N \frac{y_\Gamma y_\Delta^2 (x_A - x_B)}{x_A y_\Delta (y_\Gamma - y_\Delta) + y_\Gamma y_\Delta (x_A - x_B)}$$

Το τέταρτο βήμα είναι να σχεδιάσουμε την ευθεία (ΓΝ). Η ευθεία αυτή θα τέμνει τον άξονα x στο σημείο Σ το οποίο είναι και το ζητούμενο.



Η εξίσωση της ευθείας (ΓΝ) είναι

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_N & y_N & 1 \\ 0 & y_\Gamma & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (y_\Gamma - y_N)x - x_N y = -x_N y_\Gamma$$

Αντικαθιστώντας τα x_N και y_N με τα ίσα τους έχουμε ότι

$$\left[y_\Gamma - \frac{y_\Gamma y_\Delta^2 (x_A - x_B)}{x_A y_\Delta (y_\Gamma - y_\Delta) + y_\Gamma y_\Delta (x_A - x_B)} \right] x -$$
$$\frac{x_A x_B y_\Delta (y_\Gamma - y_\Delta)}{[x_A y_\Delta (y_\Gamma - y_\Delta) + y_\Gamma y_\Delta (x_A - x_B)]} y = -\frac{x_A x_B y_\Delta (y_\Gamma - y_\Delta)}{[x_A y_\Delta (y_\Gamma - y_\Delta) + y_\Gamma y_\Delta (x_A - x_B)]} y_\Gamma$$

Εάν θέσουμε y = 0 στην παραπάνω εξίσωση βρίσκουμε τις συντεταγμένες του ζητούμενου σημείου Σ.

$$\left[y_\Gamma - \frac{y_\Gamma y_\Delta^2 (x_A - x_B)}{x_A y_\Delta (y_\Gamma - y_\Delta) + y_\Gamma y_\Delta (x_A - x_B)}\right] x =$$
$$= -\frac{x_A x_B y_\Delta (y_\Gamma - y_\Delta)}{[x_A y_\Delta (y_\Gamma - y_\Delta) + y_\Gamma y_\Delta (x_A - x_B)]} y_\Gamma$$

Είναι

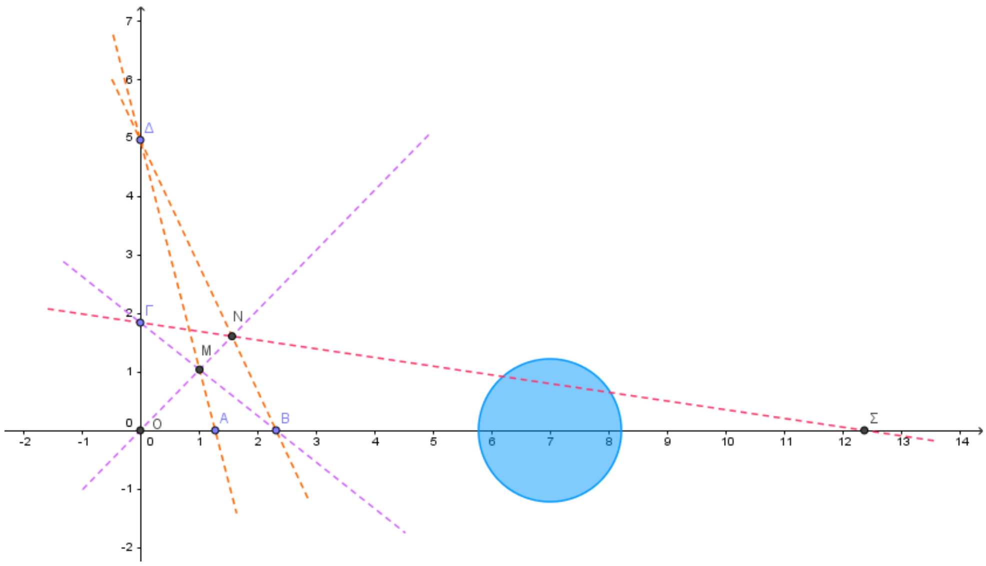
$$x_A y_\Gamma y_\Delta (y_\Gamma - y_\Delta) + y_\Gamma^2 y_\Delta (x_A - x_B) - y_\Gamma y_\Delta^2 (x_A - x_B) = x_A x_B y_\Gamma y_\Delta (y_\Gamma - y_\Delta) \Rightarrow$$
$$x_A y_\Gamma y_\Delta (y_\Gamma - y_\Delta) + (x_A - x_B) y_\Gamma y_\Delta (y_\Gamma - y_\Delta) = x_A x_B y_\Gamma y_\Delta (y_\Gamma - y_\Delta)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι οι συντεταγμένες του σημείου Σ είναι

$$x_\Sigma = \frac{x_A x_B}{2x_A - x_B} \quad , \quad y_\Sigma = 0$$

Παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες του σημείου Σ είναι ανεξάρτητες των συντεταγμένων των σημείων Γ και Δ.

Επομένως επιλέγουμε το σημείο Α και στην συνέχεια επιλέγουμε το σημείο Β έτσι ώστε η τετμημένη x_Δ να είναι μεγαλύτερη από την απόσταση του συνόρου της λίμνης από το σημείο Ο.



....