Μάθημα 2ο

Γεωμετρικά μεγέθη, δομές και γινόμενα

Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία είτε με τον κανόνα και τον διαβήτη είτε μέσω αλγεβρικών σχέσεων μπορούμε να υπολογίζουμε μήκη ευθυγράμμων τμημάτων και γωνίες. Επί πλέον μπορούμε να υπολογίζουμε μεγέθη όπως περίμετρο, εμβαδό επίπεδων σχημάτων ή όγκους στερεών (κύβοι, παραλληλεπίπεδα κλπ).

Ο υπολογισμός της περιμέτρου, εμβαδού και όγκου γινόταν μεν με αλγεβρικές σχέσεις αλλά δεν γινόταν χρήση της έννοιας των συντεταγμένων.

Θέλοντας να συνεχίσουμε να κάνουμε υπολογισμούς στον τρισδιάστατο χώρο είναι ανάγκη να ορίσουμε κάποιες αλγεβρικές σχέσεις με τις οποίες θα μπορούμε να υπολογίζουμε γωνίες και μήκη, εμβαδά κλπ με μια διαφορά. Οι σχέσεις που θα ορίσουμε για τον υπολογισμό των παραπάνω μεγεθών θα περιέχουν τις συντεταγμένες των σημείων ή των διανυσμάτων που έχουν σχέση με το γεωμετρικό αντικείμενο που μελετάμε.

Με τον τρόπο αυτό ο τρισδιάστατος χώρος εμπλουτίζεται με επί πλέον δομές οι οποίες μας επιτρέπουν να υπολογίζουμε παραπάνω πράγματα από αυτά που μπορούμε μόνο από την δομή του διανυσματικού χώρου.

Α) Νόρμα

$$\| \ \| : \Re^3 \to \Re_+ : \overline{OA} = (x_1, y_1, z_1) \to \|\overline{OA}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

Β) Απόσταση

Αν Α = (x_1, y_1, z_1), Β = (x_2, y_2, z_2) δύο σημεία του τρισδιάστατου χώρου τότε η απόσταση μεταξύ τους ορίζεται ως

$$d : \Re^3 \times \Re^3 \to \Re_+ : (A, B) \to d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Γ) Εσωτερικό Γινόμενο

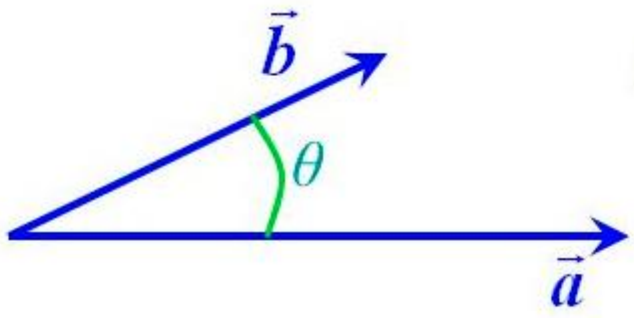
$$\langle \ , \ \rangle : \Re^3 \times \Re^3 \to \Re : (\bar{a}, \bar{b}) \to \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \|\bar{a}\| \|\bar{b}\| \sigma\upsilon\nu\phi$$

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

Μέσω του εσωτερικού γινομένου μπορούμε να μετράμε γωνία μεταξύ διανυσμάτων - άρα και μεταξύ ευθυγράμμων τμημάτων - δηλαδή

$$\theta = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\|\bar{a}\| \|\bar{b}\|}\right)$$



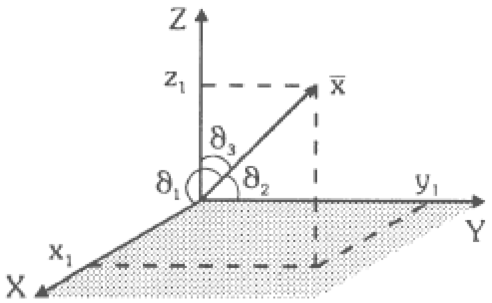
Έστω ένα διάνυσμα με Καρτεσιανές συντεταγμένες

$\bar{x} = (x_1, y_1, z_1)$

Ορίζουμε ως *συνημίτονα κατεύθυνσης του διανύσματος* $\bar{x}$ *τα μεγέθη*

$$\sigma\upsilon\nu\theta_1 = \frac{\langle \bar{x}, \bar{e}_1 \rangle}{\|\bar{x}\|\|\bar{e}_1\|} = \frac{\langle (x_1, y_1, z_1), (1,0,0) \rangle}{\|\bar{x}\|\sqrt{1^2+0^2+0^2}} = \frac{x_1}{\|\bar{x}\|} \quad , \quad \sigma\upsilon\nu\theta_2 = \frac{\langle \bar{x}, \bar{e}_2 \rangle}{\|\bar{x}\|\|\bar{e}_2\|} = \frac{y_1}{\|\bar{x}\|} \quad ,$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta_3 = \frac{\langle \bar{x}, \bar{e}_3 \rangle}{\|\bar{x}\|\|\bar{e}_3\|} = \frac{z_1}{\|\bar{x}\|}$$



Ισχύει η παρακάτω ταυτότητα

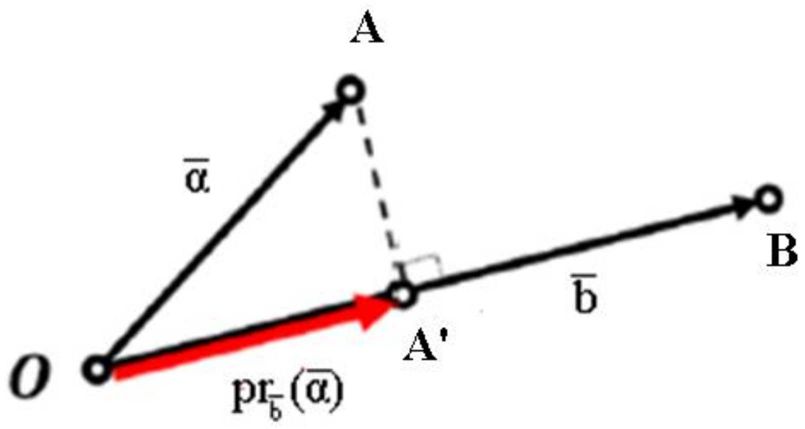
$$\sigma\upsilon\nu^2\theta_1 + \sigma\upsilon\nu^2\theta_2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta_3 = \frac{x_1^{\ 2}}{\|\bar{x}\|^2} + \frac{y_1^{\ 2}}{\|\bar{x}\|^2} + \frac{z_1^{\ 2}}{\|\bar{x}\|^2} = 1$$

Έστω τώρα τα διανύσματα

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) \ , \ \bar{b} = (b_1, b_2, b_3) \ , \ \bar{b}_u = \frac{1}{\sqrt{b_1^{\ 2} + b_2^{\ 2} + b_3^{\ 2}}}(b_1, b_2, b_3)$$

Ορίζουμε ως ορθογώνια προβολή του διανύσματος $\bar{a}$ *πάνω στο διάνυσμα* b *την παράσταση*

$$pr_{\bar{b}}(\bar{a}) = \langle \bar{a}, \frac{\bar{b}}{\|\bar{b}\|} \rangle \frac{\bar{b}}{\|\bar{b}\|} = \langle \bar{a}, \bar{b}_u \rangle \bar{b}_u = (\|\bar{a}\| \|\bar{b}_u\| \sigma\upsilon\nu\theta)\bar{b}_u = (\|\bar{a}\| \sigma\upsilon\nu\theta)\bar{b}_u$$



Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου

α) Διπροσθετικό

$$\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \Re^3 \ \langle \bar{a} + \bar{b}, \bar{c} \rangle = \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle + \langle \bar{b}, \bar{c} \rangle$$
$$\langle \bar{a}, \bar{b} + \bar{c} \rangle = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle + \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle$$

β) Γραμμικό

$$\forall \lambda \in \Re, \forall \bar{a}, \bar{b} \in \Re^3 \ \langle \lambda \bar{a}, \bar{b} \rangle = \langle \bar{a}, \lambda \bar{b} \rangle = \lambda \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$$

γ) Αντιμεταθετικό

$$\forall \bar{a}, \bar{b} \in \Re^3 \ \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = \langle \bar{b}, \bar{a} \rangle$$

δ) Θετικώς ορισμένο

$$\forall \bar{a} \in \Re^3 \ \langle \bar{a}, \bar{a} \rangle > 0 \ \ \langle \bar{a}, \bar{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \bar{a} = (0,0,0)$$

Παρατήρηση: Στο εσωτερικό γινόμενο δεν ισχύει ο κανόνας της διαγραφής όπως στον βαθμωτό πολλαπλασιασμό.

$\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle \Rightarrow \bar{b} = \bar{c}$ ΟΧΙ!

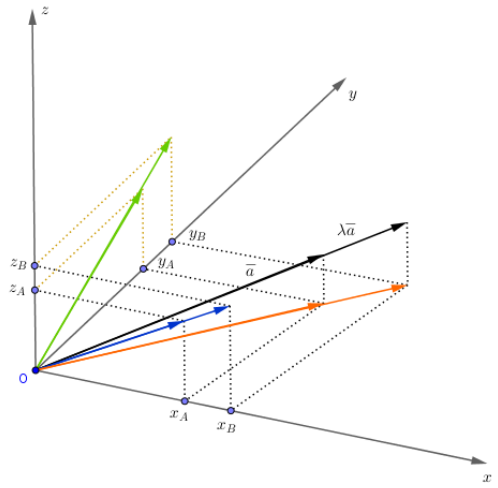
Σχόλιο: Εάν το διάνυσμα $\bar{b}$ θεωρηθεί ως η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα μάζας m και $\bar{a}$ η διεύθυνση της ευθείας διαδρομής του σώματος m στην οποία κινείται για κάποιο χρόνο t τότε το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων είναι το έργο της δύναμης $\bar{b}$ κατά την ευθεία διαδρομή του σώματος μήκους όσο το μέτρο του διανύσματος $\bar{a}$.

<u>Εξωτερικό Γινόμενο</u>

Έστω δύο διανύσματα

$$\bar{a}=(x_A,y_A,z_A)\ \ ,\ \ \bar{b}=(x_B,y_B,z_B)=\lambda(x_A,y_A,z_A)\quad ,\quad \lambda\in\Re$$

του τρισδιάστατου χώρου τα οποία είναι συγραμμικά.



Στο παραπάνω σχήμα σχεδιάσαμε τα δύο συγραμμικά διανύσματα και τις προβολές τους στα συντεταγμένα επίπεδα xy, xz, και yz αντίστοιχα. Επειδή τα δύο διανύσματα είναι συγραμμικά σημαίνει ότι και τα διανύσματα που είναι οι προβολές τους στα συντεταγμένα επίπεδα xy, xz, και yz είναι και αυτά συγραμμικά διανύσματα.

Έχουμε τις παρακάτω σχέσεις: Για το επίπεδο xy

$$(x_B,y_B,0)=(\lambda x_A,\lambda y_A,0)\rightarrow\begin{vmatrix}x_A & y_A\\ x_B & y_B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_A & y_A\\ \lambda x_A & \lambda y_A\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}x_A & y_A\\ x_A & y_A\end{vmatrix}=0$$

Για το επίπεδο xz

$$(x_B,0,z_B)=(\lambda x_A,0,\lambda z_A)\rightarrow\begin{vmatrix}x_A & z_A\\ x_B & z_B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_A & z_A\\ \lambda x_A & \lambda z_A\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}x_A & z_A\\ x_A & z_A\end{vmatrix}=0$$

Για το επίπεδο yz

$$(0,y_B,z_B)=(0,\lambda y_A,\lambda z_A)\rightarrow\begin{vmatrix}y_A & z_A\\ y_B & z_B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_A & z_A\\ \lambda y_A & \lambda z_A\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}y_A & z_A\\ y_A & z_A\end{vmatrix}=0$$

Έχουμε δηλαδή τον μηδενισμό των τριών οριζουσών

$$\begin{vmatrix}x_A & y_A\\ x_B & y_B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_A & z_A\\ x_B & z_B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_A & z_A\\ y_B & z_B\end{vmatrix}=0\rightarrow\left\|\begin{matrix}x_A & y_A\\ x_B & y_B\end{matrix}\right\|+\left\|\begin{matrix}x_A & z_A\\ x_A & z_B\end{matrix}\right\|+\left\|\begin{matrix}y_A & z_A\\ y_B & z_B\end{matrix}\right\|=0$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι τα δύο αρχικά μας διανύσματα δεν είναι συγραμμικά. Θεωρούμε ένα διάνυσμα με συντεταγμένες

$$\left(\begin{vmatrix} y_A & z_A \\ y_B & z_B \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_A & x_B \\ z_A & z_B \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_A & x_B \\ y_A & y_B \end{vmatrix} \right) = (y_A z_B - y_B z_A \ , \ -x_A z_B + x_B z_A \ , \ x_A y_B - x_B y_A)$$

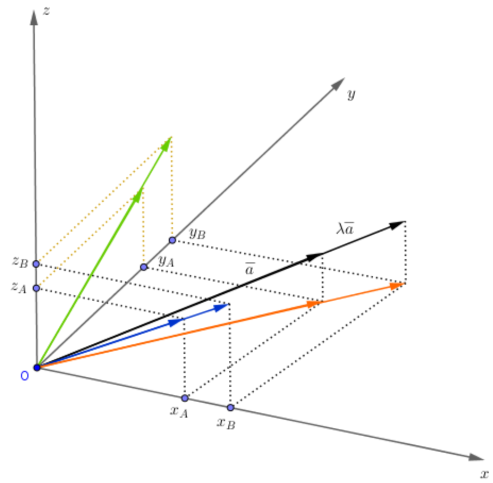
Θέλουμε το παραπάνω διάνυσμα να το εκφράσουμε σαν ένα ανάπτυγμα μιας ορίζουσας. Η ορίζουσα αυτή έχει την παρακάτω μορφή

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_A & z_A \\ y_B & z_B \end{vmatrix} \bar{e}_1 - \begin{vmatrix} x_A & x_B \\ z_A & z_B \end{vmatrix} \bar{e}_2 + \begin{vmatrix} x_A & x_B \\ y_A & y_B \end{vmatrix} \bar{e}_3 =$$

$$= (y_A z_B - y_B z_A)\bar{e}_1 + (-x_A z_B + x_B z_A)\bar{e}_2 + (x_A y_B - x_B y_A)\bar{e}_3 =$$

$$= (y_A z_B - y_B z_A \ , -x_A z_B + x_B z_A \ , \ x_A y_B - x_B y_A)$$

Το παραπάνω διάνυσμα είναι το μηδενικό διάνυσμα όταν τα αρχικά διανύσματα α , b είναι συγραμμικά ενώ είναι ένα διάνυσμα μη μηδενικό όταν τα αρχικά διανύσματα μας α και b είναι μη συγραμμικά.



Ορίζουμε ως *εξωτερικό γινόμενο δύο τυχαίων διανυσμάτων α και b το διάνυσμα*

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \end{vmatrix}$$

ή

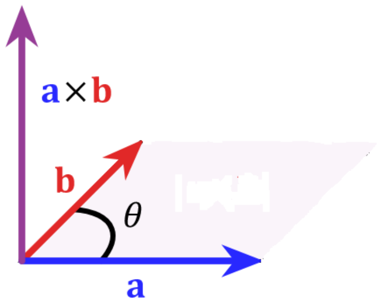
$$\times : \Re^3 \times \Re^3 \to \Re^3 : (\bar{a}, \bar{b}) \to (\bar{a} \times \bar{b}) = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \end{vmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\langle \bar{a}, \bar{a}\times\bar{b}\rangle = \langle (x_A, y_A, z_A), (y_A z_B - y_B z_A\ ,\ -x_A z_B + x_B z_A\ ,\ x_A y_B - x_B y_A)\rangle =$$
$$= x_A y_A z_B - x_A y_B z_A - x_A y_A z_B + x_B y_A z_A + x_A y_B z_A - x_B y_A z_A = 0$$

$$\langle \bar{b}, \bar{a}\times\bar{b}\rangle = \langle (x_B, y_B, z_B), (y_A z_B - y_B z_A\ ,\ -x_A z_B + x_B z_A\ ,\ x_A y_B - x_B y_A)\rangle =$$
$$= x_B y_A z_B - x_B y_B z_A - x_A y_B z_B + x_B y_B z_A + x_A y_B z_B - x_B y_A z_B = 0$$

Άρα το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων α και b είναι ένα διάνυσμα α x b το οποίο είναι κάθετο σε αυτά.

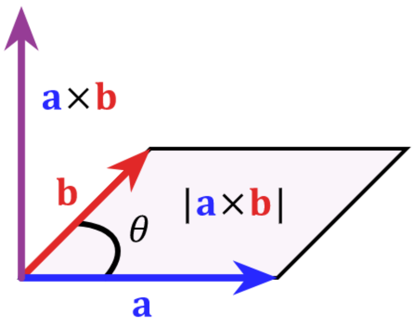


Επίσης από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου έχουμε ότι

$$\bar{a}\times\bar{b} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{b} = \lambda\bar{a} \quad , \quad \lambda \in \Re$$
$$\bar{a}\times\bar{a} = \bar{0}$$

Αποδεικνύεται ότι μέτρο του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές a και b δηλαδή έχουμε και την σχέση

$$\|\bar{a}\times\bar{b}\| = \|\bar{a}\|\|\bar{b}\||\eta\mu\theta|$$



όπου θ η γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων a και b.
Επίσης το εμβαδόν του τριγώνου με πλευρές a, b και γωνία μεταξύ τους θ ισούται με

$$E_{tr} = \frac{1}{2}\|\bar{a}\times\bar{b}\| = \frac{1}{2}\|\bar{a}\|\|\bar{b}\||\eta\mu\theta|$$

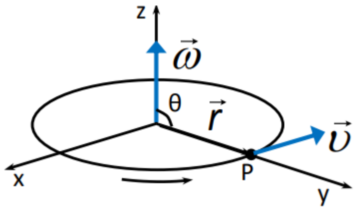
Σχόλιο: Το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων a και b μπορεί να γραφτεί και σαν

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{bmatrix}0 & -z_A & y_A\\ z_A & 0 & -x_A\\ -y_A & x_A & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_B\\ y_B\\ z_B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-z_Ay_B+y_Az_B & z_Ax_B-x_Az_B & -y_Ax_B+x_Ay_B\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}y_Az_B-y_Bz_A & -x_Az_B+z_Ax_B & x_Ay_B-x_By_A\end{bmatrix}$$

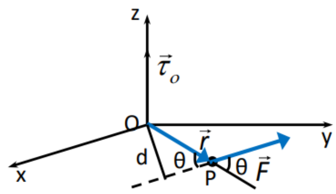
Φυσική ερμηνεία

ι) Εάν ένα σώμα μάζας m εκτελεί κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας r. Έστω $\bar{\varpi}$ το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας. Τότε το διάνυσμα της ταχύτητας του σώματος $\bar{v}$ είναι ένα διάνυσμα που υπολογίζεται από το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\bar{\varpi}$ και $\bar{r}$

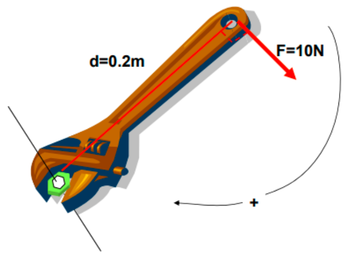


$$\bar{v}=\bar{\varpi}\times\bar{r}$$

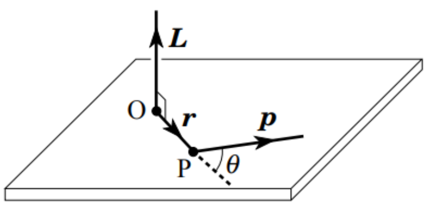
ιι) Η ροπή $\bar{\tau}_0$ μιας δύναμης $\bar{F}$ σε ένα σώμα μάζας m



$$\bar{\tau}_0=\bar{r}\times\bar{F}$$



ιιι) Στροφορμή (Angular momentum) σωμάτιου μάζας m

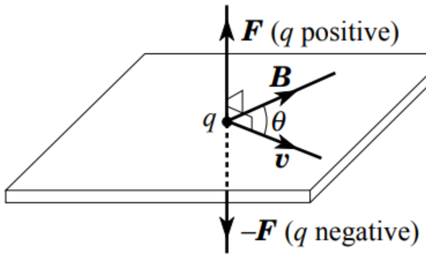


$$\bar{L}=\bar{r}\times\bar{p}=\bar{r}\times(m\bar{v})$$

ιν) Δύναμη Lorentz

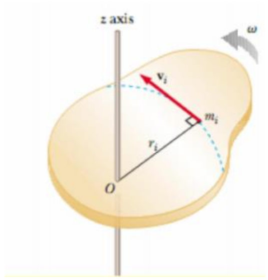
Ένα σωματίδιο με ηλεκτρικό φορτίο q κινείται με ταχύτητα $\bar{v}$ μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο μαγνητικής έντασης $\bar{B}$ τότε η μαγνητική δύναμη που ασκείται στο φορτίο q ισούται με

$\bar{F} = q(\bar{v} \times \bar{B})$ όπου το διάνυσμα $\bar{B}$ είναι το διάνυσμα της μαγνητικής έντασης



ν) Κατανομή ταχυτήτων σε περιστρεφόμενο στερεό

Έστω ένα στερεό σώμα μάζας Μ το οποίο εκτελεί περιστροφική κίνηση γύρω από ένα σταθερό άξονα.



Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας κάθε σημείου του στερεού σώματος Μ είναι συνάρτηση των Καρτεσιανών συντεταγμένων των σημείων του στερεού. Το ίδιο ισχύει και για το διάνυσμα θέσης r του κάθε σημείου από την αρχή του συστήματος Ο δηλαδή

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}(x, y, z) = (\omega_1(x, y, z), \omega_2(x, y, z), \omega_3(x, y, z))$$
$$\bar{r} = \bar{r}(x, y, z) = (r_1(x, y, z), r_2(x, y, z), r_3(x, y, z))$$

Το διάνυσμα της ταχύτητας v κάθε σημείου του στερεού είναι και αυτό συνάρτηση των Καρτεσιανών συντεταγμένων των σημείων του στερεού και ισχύει ότι

$$\bar{v}(x, y, z) = (\bar{\omega} \times \bar{r})(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

Ο παραπάνω πίνακας 3 x 3 ονομάζεται και *τελεστής γωνιακής ταχύτητας*.

Ιδιότητες

α) $\forall \bar{a},\bar{b} \in \Re^3\, (\bar{a}\times\bar{b}) = -(\bar{b}\times\bar{a})$

β) $\bar{a}\times\bar{b} = (0,0,0) \Leftrightarrow \bar{a}\,//\,\bar{b}$

γ) $\forall \bar{a},\bar{b},\bar{c} \in \Re^3\, (\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c} = (\bar{a}\times\bar{c}) + (\bar{b}\times\bar{c})$

δ) $\forall \bar{a},\bar{b} \in \Re^3, \lambda \in \Re\, \lambda(\bar{a}\times\bar{b}) = ((\lambda\bar{a})\times\bar{b}) = (\bar{a}\times(\lambda\bar{b}))$

ε) $$\begin{aligned}&\forall \bar{a},\bar{b},\bar{c} \in \Re^3\, (\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c} = \langle\bar{a},\bar{c}\rangle\bar{b} - \langle\bar{c},\bar{b}\rangle\bar{a}\\ &\forall \bar{a},\bar{b},\bar{c} \in \Re^3\, \bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = \langle\bar{a},\bar{c}\rangle\bar{b} - \langle\bar{a},\bar{b}\rangle\bar{c}\end{aligned}$$

στ) $\forall \bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d} \in \Re^3\, \langle(\bar{a}\times\bar{b}),(\bar{c}\times\bar{d})\rangle = \langle\bar{a},\bar{c}\rangle\langle\bar{b},\bar{d}\rangle - \langle\bar{b},\bar{c}\rangle\langle\bar{a},\bar{d}\rangle$

Μεικτό γινόμενο

Θεωρούμε τρία διανύσματα

$\bar{a} = (x_A, y_A, z_A)$, $\bar{b} = (x_B, y_B, z_B)$, $\bar{c} = (x_C, y_C, z_C)$

Προσδιορίζουμε το παρακάτω εσωτερικό γινόμενο

$$\begin{aligned}\langle\bar{a},\bar{b}\times\bar{c}\rangle &= \langle(x_A, y_A, z_A),(y_B z_C - y_C z_B\ ,\ -x_B z_C + x_C z_B\ ,\ x_B y_C - x_C y_B) = \\ &= x_A(y_B z_C - y_C z_B) + y_A(-x_B z_C + x_C z_B) + z_A(x_B y_C - x_C y_B)\end{aligned}$$

Η τελευταία παράσταση γράφεται και σαν

$$x_A\begin{vmatrix} y_B & z_B \\ y_C & z_C \end{vmatrix} - y_A\begin{vmatrix} x_B & z_B \\ x_C & z_C \end{vmatrix} + z_A\begin{vmatrix} y_B & z_B \\ y_C & z_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix}$$

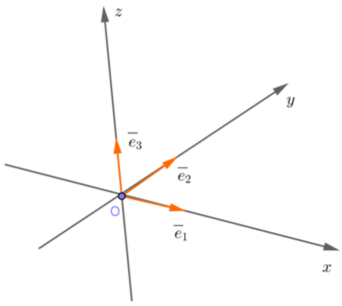
Στην συνέχεια προσδιορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\begin{aligned}\langle\bar{a}\times\bar{b},\bar{c}\rangle &= \langle(y_A z_B - y_B z_A\ ,-x_A z_B + x_B z_A\ ,\ x_A y_B - x_B y_A),(x_C, y_C, z_C)\rangle = \\ &= x_C(y_A z_B - y_B z_A) + y_C(-x_A z_B + x_B z_A) + z_C(x_A y_B - x_B y_A) = \\ &= \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Την παραπάνω παράσταση την ορίζουμε ως το *μεικτό γινόμενο τριών διανυσμάτων α,b,c και συμβολίζουμε με [, ,]*

$$[\ ,\ ,\ ]:\Re^3\times\Re^3\times\Re^3\rightarrow\Re:(\bar{a},\bar{b},\bar{c})\rightarrow[\bar{a},\bar{b},\bar{c}]=\begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix}$$

Το μεικτό γινόμενο είναι θετικό όταν τα διανύσματα αποτελούν μια δεξιόστροφη τριάδα, αρνητικό όταν αποτελούν μια αριστερόστροφη τριάδα, και ίσο με το μηδέν όταν είναι συνεπίπεδα. Παράδειγμα για τα διανύσματα βάσης του τρισδιάστατου χώρου



Είναι

$$\left[\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\right]=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

$$\left[\bar{e}_3,\bar{e}_2,\bar{e}_1\right]=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-1$$

Σχόλιο: Παρόμοια συνθήκη εύρεσης προσανατολισμού δύο διανυσμάτων a και b στο επίπεδο είναι και η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}>0\ \textit{δεξιόστροφο ζεύγος}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}<0\ \textit{αριστερόστροφο ζεύγος}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0\ \textit{γραμμικώς εξαρτημένα}$$

Σχόλιο: Δύο διανύσματα α, b και το εξωτερικό γινόμενό τους α x b αποτελεί μια δεξιόστροφη τριάδα διανυσμάτων

Ιδιότητες

α) Τριπροσθετικό

$$\forall \bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d} \in \Re^3 \Rightarrow [\bar{a}+\bar{d},\bar{b},\bar{c}] = [\bar{a},\bar{b},\bar{c}] + [\bar{d},\bar{b},\bar{c}]$$

β) Αντισυμμετρικό

$$\forall \bar{a},\bar{b},\bar{c}, \in \Re^3 \Rightarrow [\bar{a},\bar{b},\bar{c}] = -[\bar{b},\bar{a},\bar{c}] = [\bar{b},\bar{c},\bar{a}]$$

γ) $\forall \lambda \in \Re, \forall \bar{a},\bar{b},\bar{c} \in \Re^3 \Rightarrow [\lambda\bar{a},\bar{b},\bar{c}] = [\bar{a},\lambda\bar{b},\bar{c}] = [\bar{a},\bar{b},\lambda\bar{c}] = \lambda[\bar{a},\bar{b},\bar{c}]$

δ) Ταυτότητα

$$[\bar{a},\bar{b},\bar{d}]\bar{c} - [\bar{a},\bar{b},\bar{c}]\bar{d} = (\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{c}\times\bar{d})$$

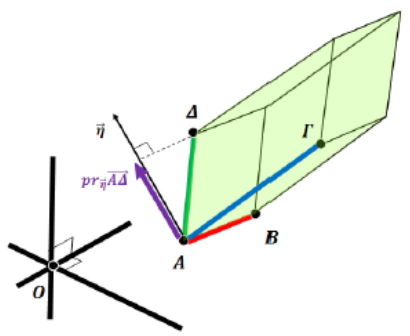
ε)

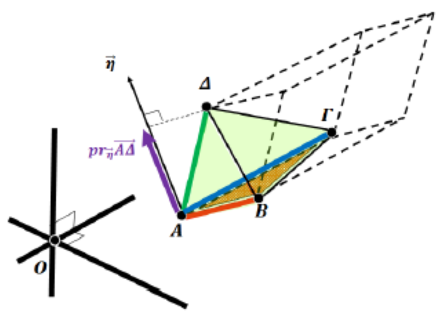
$$\forall \bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d},\bar{e},\bar{f} \in \Re^3 \Rightarrow [\bar{a},\bar{b},\bar{c}][\bar{d},\bar{e},\bar{f}] = \det\left[\begin{bmatrix}\bar{a}\\ \bar{b}\\ \bar{c}\end{bmatrix}[\bar{d},\bar{e},\bar{f}]\right] =$$

$$= \det\begin{bmatrix}\langle\bar{a},\bar{d}\rangle & \langle\bar{a},\bar{e}\rangle & \langle\bar{a},\bar{f}\rangle\\ \langle\bar{b},\bar{d}\rangle & \langle\bar{b},\bar{e}\rangle & \langle\bar{b},\bar{f}\rangle\\ \langle\bar{c},\bar{d}\rangle & \langle\bar{c},\bar{e}\rangle & \langle\bar{c},\bar{f}\rangle\end{bmatrix}$$

Γεωμετρική ερμηνεία

Η απόλυτη τιμή του μεικτού γινομένου τριών διανυσμάτων a, b, και c είναι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου με πλευρές όσο το μέτρο των διανυσμάτων a, b, και c.
Επίσης ο όγκος του τετράεδρου με τις ίδιες ακμές ισούται με το 1 / 6 της απόλυτης τιμής του μεικτού γινομένου των τριών αυτών διανυσμάτων





Πρόταση: Η τριάδα των διανυσμάτων α, b, α x b είναι μια δεξιόστροφη τριάδα διανυσμάτων.
Είναι

$$[\bar{a},\bar{b},\bar{a}\times\bar{b}] = \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ y_A z_B - y_B z_A & x_B z_A - x_A z_B & x_A y_B - x_B y_A \end{vmatrix} =$$

$$= x_A \begin{vmatrix} y_B & z_B \\ x_B z_A - x_A z_B & x_A y_B - x_B y_A \end{vmatrix} - y_A \begin{vmatrix} x_B & z_B \\ y_A z_B - y_B z_A & x_A y_B - x_B y_A \end{vmatrix} +$$
$$+ z_A \begin{vmatrix} x_B & y_B \\ y_A z_B - y_B z_A & x_B z_A - x_A z_B \end{vmatrix} =$$

$$= x_A(x_A y_B^2 - x_B y_A y_B - x_B z_A z_B + x_A z_B^2) - y_A(x_A x_B y_B - x_B^2 y_A - y_A z_B^2 + y_B z_A z_B) +$$
$$+ z_A(x_B^2 z_A - x_A x_B z_B - y_A y_B z_B + y_B^2 z_A)$$

$$= x_A^2 y_B^2 + x_A^2 z_B^2 - x_A x_B y_A y_B - x_A x_B z_A z_B + x_B^2 y_A^2 + y_A^2 z_B^2 - x_A x_B y_A y_B - y_A y_B z_A z_B +$$
$$+ x_B^2 z_A^2 + y_B^2 z_A^2 - x_A x_B z_A z_B - y_A y_B z_A z_B =$$

$$= (x_A^2 y_B^2 + x_B^2 y_A^2 - 2x_A x_B y_A y_B) + (x_A^2 z_B^2 + x_B^2 z_A^2 - 2x_A x_B z_A z_B) + (y_A^2 z_B^2 + y_B^2 z_A^2 - 2y_A y_B z_A z_B) =$$

$$= (x_A y_B - x_B y_A)^2 + (x_A z_B - x_B z_A)^2 + (y_A z_B - y_B z_A)^2 \geq 0$$

Άρα το μεικτό γινόμενο [α, b, α x b] είναι πάντα θετικό επομένως τα τρία αυτά διανύσματα αποτελούν μια δεξιόστροφη τριάδα διανυσμάτων.

....