



Γραμμική Άλγεβρα

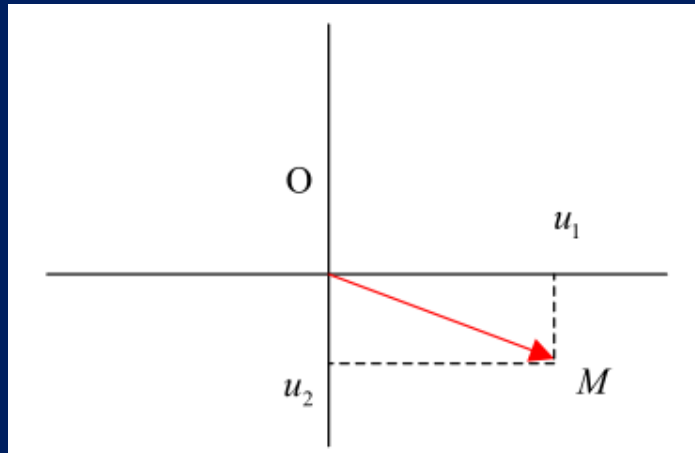
10. Εισαγωγή στους Διανυσματικούς Χώρους

Κάλλια Παυλοπούλου

2021-2022

Ο χώρος R^2

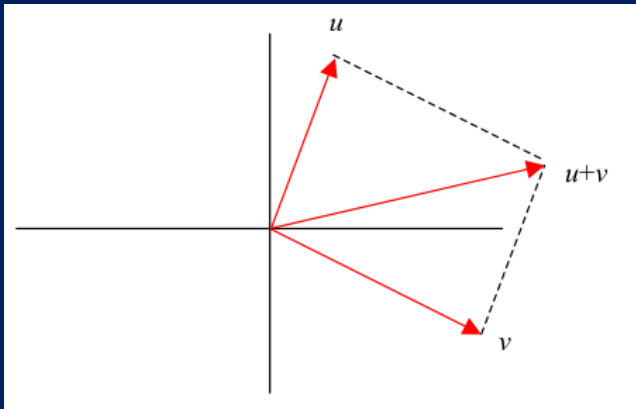
Μπορούμε να αντιστοιχίσουμε στο στοιχείο (u_1, u_2) του R^2 το διάνυσμα \overrightarrow{OM} του επιπέδου που έχει αρχή το σημείο $O = (0, 0)$ και πέρας το σημείο $M = (u_1, u_2)$ όπως φαίνεται στο σχήμα



Μπορούμε το διάνυσμα \overrightarrow{OM} του επιπέδου να το συμβολίζουμε με έναν πίνακα γραμμή $[u_1 \quad u_2]$ ή με έναν πίνακα στήλη $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$.

Οι πράξεις των διανυσμάτων στο R^2

Πρόσθεση



Γεωμετρικά

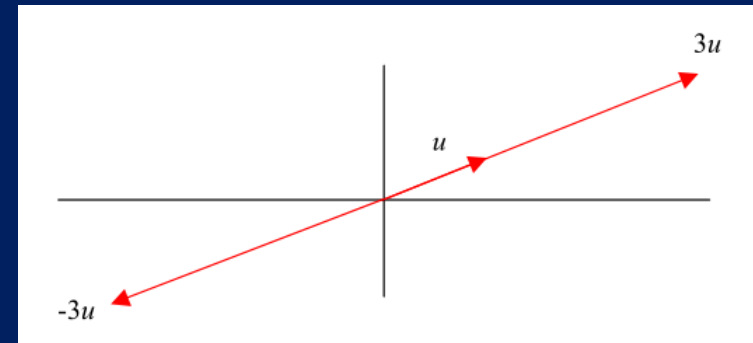
Το διάνυσμα $\vec{u} + \vec{v}$ προκύπτει από τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

Αλγεβρικά

$$\text{Αν } \vec{u} = (u_1, u_2) \text{ και } \vec{v} = (v_1, v_2):$$
$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

Λέμε ότι το $\vec{u} + \vec{v}$ είναι το άθροισμα των \vec{u} και \vec{v}

Βαθμωτός πολλαπλασιασμός



Γεωμετρικά

Το διάνυσμα $\lambda \cdot \vec{u}$ αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα που έχει την ίδια διεύθυνση με το \vec{u} . Η φορά του εξαρτάται από το πρόσημο του λ .

Αλγεβρικά

$$\text{Αν } \vec{u} = (u_1, u_2) \text{ και } \lambda \in R (\lambda \neq 0):$$
$$\lambda \cdot \vec{u} = (\lambda \cdot u_1, \lambda \cdot u_2)$$

Λέμε ότι το $\lambda \cdot \vec{u}$ είναι συγγραμμικό με το \vec{u}

Ο χώρος R^n

Το σύνολο όλων των διατεταγμένων n -άδων $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, δηλαδή

$$R^n = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) : u_i \in R, i = 1, 2, \dots, n\}$$

Εφοδιασμένο με :

A) την εσωτερική πράξη της πρόσθεσης

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

B) και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού (επί πραγματικό αριθμό)

$$\lambda \cdot (u_1, u_2, \dots, u_n) = (\lambda \cdot u_1, \lambda \cdot u_2, \dots, \lambda \cdot u_n)$$

είναι διανυσματικός χώρος.

Σημείωση: Τα στοιχεία του συνόλου R^n μπορούν να θεωρηθούν και πίνακες μεγέθους $1 \times n$, δηλαδή πίνακες-γραμμή και τα στοιχεία του τα λέμε διανύσματα. Όταν αναφερόμαστε στο σύνολο R^n μαζί με τις προηγούμενες πράξεις θα χρησιμοποιούμε την έκφραση ο χώρος R^n ή ο δ.χ. R^n .

Διανυσματικός χώρος V

Έστω ένα μη κενό σύνολο V και K το σύνολο των πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών. Το σύνολο V εφοδιασμένο με δύο πράξεις, μία εσωτερική $+$ (πρόσθεση) και μία εξωτερική \cdot (βαθμωτό πολλαπλασιασμό), ονομάζεται K -διανυσματικός χώρος όταν ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- 1) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- 2) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V, (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- 3) $\exists \mathbf{0} \in V: \forall \vec{u} \in V, \vec{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \vec{u} = \vec{u}$
- 4) $\forall \vec{u} \in V, \exists (-\vec{u}) \in V: \vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \mathbf{0}$
- 5) $\forall \lambda \in K, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$
- 6) $\forall \lambda, \mu \in K, \forall \vec{u} \in V, (\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$
- 7) $\forall \lambda, \mu \in K, \forall \vec{u} \in V, (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u})$
- 8) $\exists \mathbf{1} \in K: \forall \vec{u} \in V, \mathbf{1} \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Οι ιδιότητες των πράξεων ενός K -δ.χ. V

Τα στοιχεία του V ονομάζονται **διανύσματα**.

Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων στον R^n

Αν έχουμε m διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ του χώρου του R^n , τότε θα λέμε ότι το διάνυσμα \vec{x} του R^n είναι ένας **γραμμικός συνδυασμός** των διανυσμάτων αυτών, αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$\vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \lambda_m \cdot \vec{v}_m, \lambda_i \in R$$

άθροισμα πολλαπλασίων αυτών των διανυσμάτων

Παράδειγμα 1

Το διάνυσμα $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$;

Λύση:

- Πρέπει να εξετάσουμε αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί κ, λ τέτοιοι ώστε:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \kappa \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa \\ 2 \cdot \kappa + \lambda \\ -\kappa + 2 \cdot \lambda \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 1 \\ 2\kappa + \lambda = 4 \\ -\kappa + 2\lambda = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 1 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

- Άρα το διάνυσμα $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων δύο ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Διανυσματικός Υπόχωρος

Ορισμός:

Έστω V ένας K -διανυσματικός χώρος. Ένα μη κενό υποσύνολο W του V θα λέγεται **K -διανυσματικός υποχώρος** του V αν είναι διανυσματικός χώρος ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού στον V .

Θεώρημα:

Ένα μη κενό υποσύνολο W ενός K -διανυσματικού χώρου V θα είναι διανυσματικός υποχώρος του V αν και μόνο αν ισχύουν για το W οι επόμενες δύο ιδιότητες:

- i) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in W, \vec{u} + \vec{v} \in W$, δηλ. να είναι **κλειστό ως προς την πρόσθεση**
- ii) $\forall \vec{u} \in W, \forall \lambda \in K, \lambda \cdot \vec{u} \in W$, δηλ. να είναι **κλειστό ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό**

Τα διανύσματα παράγουν τον χώρο...

Θα λέμε ότι τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ παράγουν τον χώρο R^n , αν κάθε διάνυσμα \vec{x} του R^n μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός τους.

Δηλαδή, θα εξετάζουμε αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ τέτοιοι ώστε να ισχύει η επόμενη σχέση για όλα τα διανύσματα \vec{x} του R^n

$$\vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \lambda_m \cdot \vec{v}_m, \lambda_i \in R$$

Π.χ.

Προφανώς τα διανύσματα $\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)$ παράγουν τον χώρο R^2 .

Ομοίως τα n διανύσματα $\vec{e}_1 = (1,0, \dots, 0), \vec{e}_2 = (0,1, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0,0, \dots, 1)$ παράγουν τον χώρο R^n .

Παράδειγμα 2

Θα δείξουμε ότι τα διανύσματα $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ παράγουν τον χώρο R^2 .

Λύση:

Πρέπει να εξετάσουμε αν **για κάθε** διάνυσμα $\vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί κ, λ τέτοιοι ώστε:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \kappa \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άγνωστοι κ, λ

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \kappa \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa \\ \kappa \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa \\ \kappa + \lambda \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = x \\ \kappa + \lambda = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = x \\ \lambda = y - x \end{cases}$$

Άρα κάθε διάνυσμα του R^2 μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των δύο αυτών διανυσμάτων: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (y - x) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Επομένως τα διανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ΠΑΡΑΓΟΥΝ ΤΟΝ ΧΩΡΟ R^2 .

Παράδειγμα 3- γεωμετρικός τρόπος λύσης

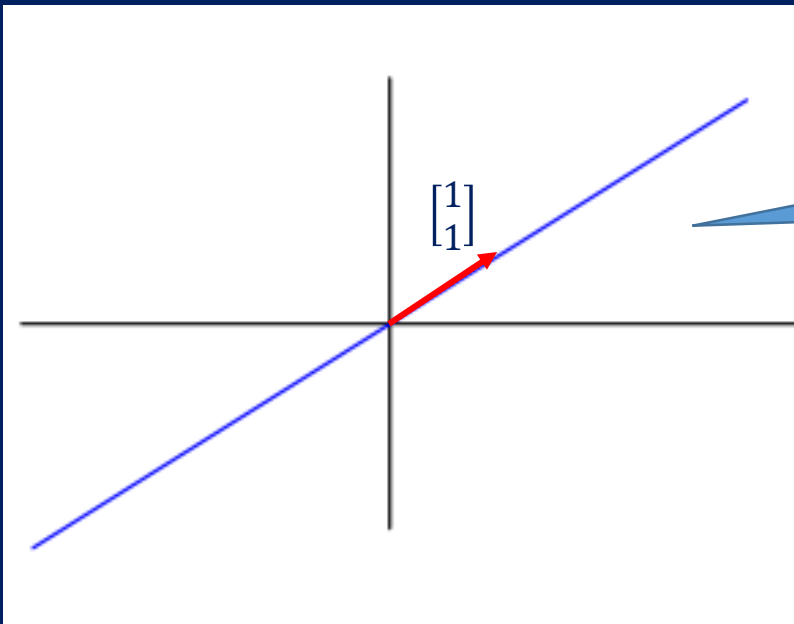
Τα διανύσματα $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ δεν παράγουν τον χώρο R^2 .

Λύση: Πράγματι, τα διανύσματα \vec{v}_1, \vec{v}_2 είναι συγγραμμικά αφού $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot \vec{v}_1$

Άρα όλα τα διανύσματα \vec{x} που γράφονται ως γραμμικός συνδυασμός των \vec{v}_1, \vec{v}_2

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \kappa \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \kappa \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \cdot 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (\kappa + 2 \cdot \lambda) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \kappa, \lambda \in R$$

είναι συγγραμμικά με το \vec{v}_1 , και το \vec{v}_2 , δηλαδή ανήκουν σε μία ευθεία και δεν «καλύπτουν» όλο το επίπεδο!



Δηλαδή όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί των \vec{v}_1 και \vec{v}_2 ανήκουν σε μία ευθεία και δεν καλύπτουν όλο το επίπεδο!

Παράδειγμα 3-αλγεβρικός τρόπος λύσης

Τα διανύσματα $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ δεν παράγουν τον χώρο R^2 .

Λύση:

Πρέπει να εξετάσουμε αν **για κάθε** διάνυσμα $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in R^2$ υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί κ, λ τέτοιοι ώστε:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \kappa \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa + 2\lambda \\ \kappa + 2\lambda \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa + 2\lambda = x \\ \kappa + 2\lambda = y \end{cases}$$

Άγνωστοι κ, λ

Το παραπάνω σύστημα έχει λύση αν και μόνον αν $x = y$.

Αν $x \neq y$ τότε το σύστημα είναι αδύνατο δηλαδή τα διανύσματα $\vec{x} = (x, y) \in R^2$ με $x \neq y$, δεν μπορούν να γραφτούν ως γραμμικοί συνδυασμοί των \vec{v}_1, \vec{v}_2 .

Επομένως τα διανύσματα \vec{v}_1 και \vec{v}_2 δεν παράγουν το χώρο R^2 !

Γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων στον R^n

- Αν έχουμε m διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ του χώρου του R^n , τότε
- θα τα ονομάζουμε **γραμμικά ανεξάρτητα** αν
- από τη σχέση $\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{v}_3 + \dots + \lambda_m \cdot \vec{v}_m = \vec{0}$, $\lambda_i \in R$, έπεται αναγκαστικά ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$.

$$\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \lambda_m \cdot \vec{v}_m = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$$

- Διαφορετικά τα ονομάζουμε **γραμμικά εξαρτημένα**.

Άλλος ορισμός: Τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ ενός διανυσματικού χώρου R^n είναι **γραμμικά εξαρτημένα** αν τουλάχιστον ένα από αυτά μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Παράδειγμα 4-γραμμική ανεξαρτησία

Τα διανύσματα $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, του χώρου R^4 , είναι γραμμικά ανεξάρτητα;

Λύση:

Θα διερευνήσουμε για ποιους συντελεστές κ, λ, μ ο γραμμικός συνδυασμός $\kappa \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w}$ δίνει το $\vec{0}$.

$$\kappa \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \kappa \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa + \lambda + \mu = 0 \\ \kappa + \lambda + \mu = 0 \\ \kappa - \lambda + 3\mu = 0 \\ -\kappa - 2\mu = 0 \end{cases}$$

Σύστημα
Άγνωστοι κ, λ, μ

$$\xrightarrow{\text{Επαυξημένος}} A_E = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Επαυξημένος σε ανηγμ. κλιμ. μορφή}} A_R = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} \kappa = -2\mu \\ \lambda = \mu \end{cases}, \mu \in R$$

Άπειρες Λύσεις
 $rank(A_R) = 2 < 3$

Άρα υπάρχουν άπειροι συνδυασμοί που μας δίνουν το $\vec{0}$.

Επομένως τα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα!

Πράγματι:
 $\vec{w} = 2 \cdot \vec{u} - \vec{v}$

Παρατήρηση: Γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων στον R^n

Η σχέση $\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \lambda_m \cdot \vec{v}_m = \vec{0}$, γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \lambda_m \cdot \vec{v}_m = \vec{0} \Leftrightarrow \underbrace{[\vec{v}_1 | \vec{v}_2 | \dots | \vec{v}_m]}_{\text{Matrix}} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \boxed{A_{n \times m} \cdot \vec{\lambda} = \vec{0}}$$

Ο πίνακας με στήλες τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$

Άρα το πρόβλημα διερεύνησης της γραμμικής ανεξαρτησίας m διανυσμάτων στο R^n ανάγεται στην επίλυση ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος.

Σχηματίζουμε λοιπόν τον πίνακα $A_{n \times m} = [\vec{v}_1 | \vec{v}_2 | \dots | \vec{v}_m]$ και εξετάζουμε αν το ομογενές σύστημα $A_{n \times m} \cdot \vec{\lambda} = \vec{0}$ έχει μία και μοναδική λύση την $\vec{\lambda} = \vec{0}$ (ανεξάρτητα) ή αν έχει άπειρες λύσεις (εξαρτημένα).

Αν **$rank(A_{n \times m}) = m$** τότε το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση τη μηδενική, άρα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα

Αν **$rank(A_{n \times m}) < m$** τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, άρα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα

Παράδειγμα 5-γραμμική ανεξαρτησία

Τα διανύσματα $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{w} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, του χώρου R^4 , είναι γραμμικά ανεξάρτητα;

Λύση:

Έχουμε να λύσουμε το ομογενές σύστημα $A \cdot \vec{\lambda} = \vec{0}$,

όπου A ο πίνακας με στήλες τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 7 & -1 & -3 & 4 \\ 6 & 5 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1) Μπορούμε να υπολογίσουμε την τάξη $r(A) = 4$ μετατρέποντάς τον σε κλιμακωτό πίνακα, και να συμπεράνουμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

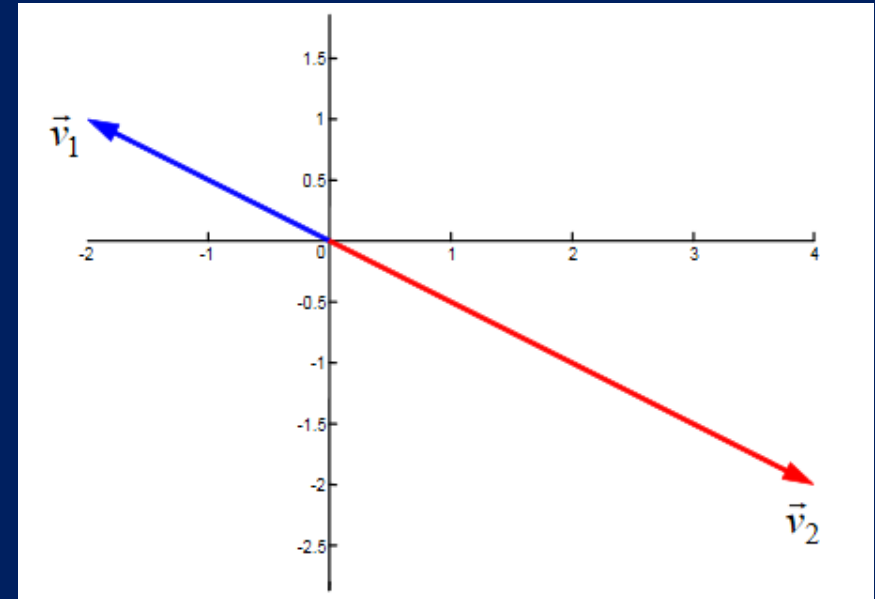
2) Εναλλακτικά, επειδή ο A είναι τετραγωνικός, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε και την ορίζουσά του: $\det(A) = -56 \neq 0$.

Επειδή $\det A \neq 0$, το ομογενές σύστημα $A \cdot \vec{\lambda} = \vec{0}$ έχει μία και μοναδική λύση την μηδενική. Άρα τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Γραμμική εξάρτηση διανυσμάτων στον R^2

- Δύο διανύσματα στον R^2 είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν και μόνο αν είναι **συνευθειακά**

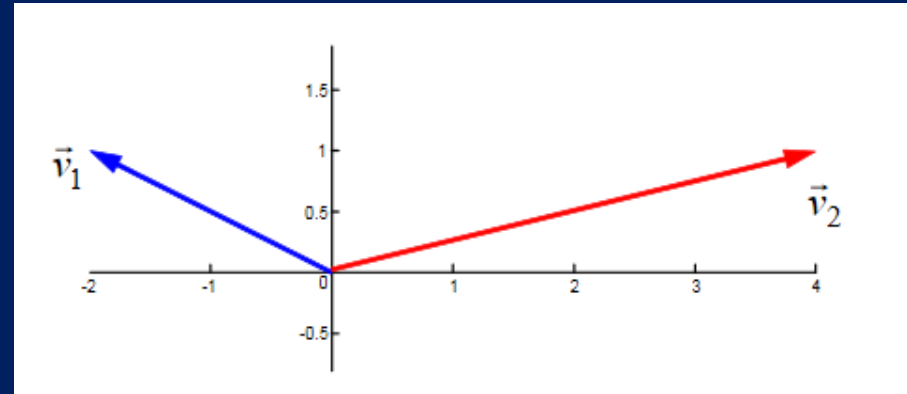
Παράδειγμα: Τα διανύσματα $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα διότι $\vec{v}_2 = -2 \cdot \vec{v}_1$



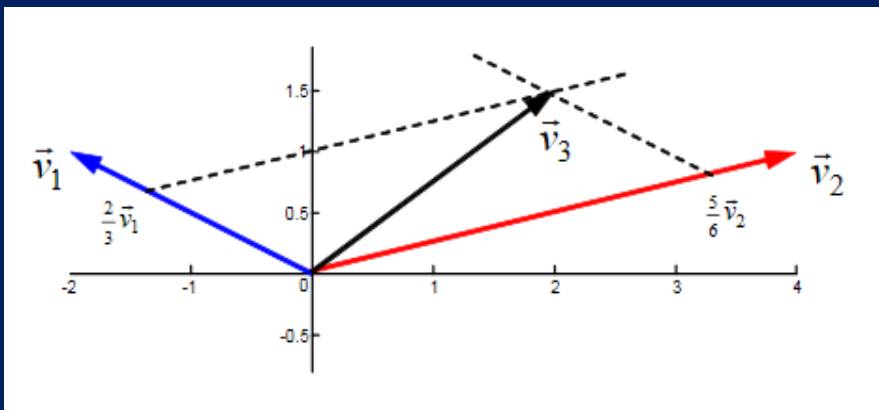
Γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων στον R^2

- Επομένως, **δύο μη συνευθειακά** διανύσματα του R^2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Παράδειγμα: Για τα διανύσματα $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$,
δεν υπάρχει $\lambda \in R: \vec{v}_2 = \lambda \cdot \vec{v}_1$



- Τρία και πλέον διανύσματα του R^2 είναι πάντα γραμμικά εξαρτημένα



Παράδειγμα: Για τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ ισχύει:

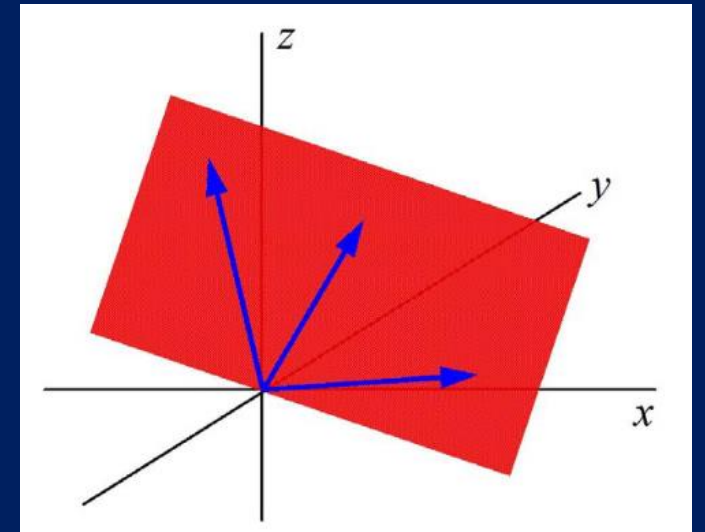
$$\vec{v}_3 = \frac{2}{3} \cdot \vec{v}_1 + \frac{5}{6} \cdot \vec{v}_2$$

Γραμμική εξάρτηση διανυσμάτων στον R^3

- Δύο διανύσματα στον R^3 είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν και μόνο αν είναι συνευθειακά

Παράδειγμα: Τα διανύσματα $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ και $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ 15 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα διότι $\vec{v}_2 = -3 \cdot \vec{v}_1$

- Τρία διανύσματα του R^3 είναι πάντα γραμμικά εξαρτημένα
- αν και μόνο αν είναι συνεπίπεδα.



- Τέσσερα και πλέον διανύσματα του R^3 είναι πάντοτε γραμμικώς εξαρτημένα.

Βάση του R^n

Το σύνολο $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ των m στοιχείων του R^n ονομάζεται βάση του R^n αν έχει τις εξής ιδιότητες:

- 1) Τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ παράγουν το χώρο R^n και
- 2) Τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Π.χ.

Προφανώς τα διανύσματα $\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)$ αποτελούν μία βάση του χώρου R^2 .

Ομοίως τα n διανύσματα $\vec{e}_1 = (1,0, \dots, 0), \vec{e}_2 = (0,1, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0,0, \dots, 1)$ αποτελούν μία βάση του χώρου R^n .

Παρατηρήσεις για τη βάση ενός δ.χ. V

- Κάθε διανυσματικός χώρος έχει **άπειρες βάσεις**. Δηλαδή υπάρχουν άπειρα σύνολα γραμμικών ανεξαρτήτων διανυσμάτων που παράγουν το χώρο V .
- Καθεμιά από τις άπειρες βάσεις ενός δ.χ. V έχει το ίδιο πλήθος διανυσμάτων.

Διάσταση ενός δ.χ. V είναι το πλήθος των διανυσμάτων κάθε βάσης του V και συμβολίζεται με $\dim(V)$.

Σημείωση:

- $\dim(V)$ = μέγιστο πλήθος γραμμικών ανεξαρτήτων διανυσμάτων του V .
- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$
- Το \mathbb{R}^n έχει άπειρο πλήθος βάσεων οι οποίες έχουν όλες n το πλήθος διανύσματα.
- Αν k -το πλήθος διανύσματα του \mathbb{R}^n με $k > n$, τότε αποδεικνύεται ότι αυτά είναι πάντα γραμμικώς εξαρτημένα.

Βάση στον R^2

- Αναφέραμε πως δύο οποιαδήποτε διανύσματα \vec{v}_1, \vec{v}_2 του R^2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνο αν είναι μη παράλληλα. Ας δούμε πότε θα αποτελούν βάση.
- Σχηματίζουμε λοιπόν τον πίνακα $A_{2 \times 2} = [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2]$ και εξετάζουμε αν το ομογενές σύστημα $A_{2 \times 2} \cdot \vec{\lambda} = \vec{0}$ έχει μία και μοναδική λύση την $\vec{\lambda} = \vec{0}$ (ανεξάρτητα) ή αν έχει άπειρες λύσεις (εξαρτημένα).
- Άρα αν **$\text{rank}(A_{2 \times 2}) = 2$** τότε τα \vec{v}_1, \vec{v}_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και στην προκειμένη περίπτωση αποτελούν και βάση του R^2 .
- Εναλλακτικά, επειδή ο $A_{2 \times 2}$ είναι τετραγωνικός, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε και την ορίζουσά του **$\det(A_{2 \times 2})$** . **Άρα θα αποτελούν βάση του R^2 αν και μόνο αν $\det A_{2 \times 2} \neq 0$.**

Βάση στον R^3

- Δύο οποιαδήποτε μη παράλληλα διανύσματα \vec{v}_1, \vec{v}_2 του R^3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αλλά δεν αποτελούν βάση του R^3 .
- Τρία οποιαδήποτε μη συνεπίπεδα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ του R^3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν βάση του R^3 αν και μόνο αν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, δηλαδή αν το ομογενές σύστημα $A_{3 \times 3} \cdot \vec{\lambda} = \vec{0}$, όπου $A_{3 \times 3} = [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3]$ έχει μία και μοναδική λύση την $\vec{\lambda} = \vec{0}$.
- Δηλαδή αν $\mathit{rank}(A_{3 \times 3}) = 3$ τότε τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ αποτελούν και βάση του R^3 .
- Ή αλλιώς, αν $\mathit{det}(A_{3 \times 3}) \neq 0$ τότε τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ αποτελούν και βάση του R^3 .