



12ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου

Άσκηση 1. Δίνεται $\rho \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν $\rho > 1$ τότε

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho} dx = \frac{1}{\rho - 1},$$

ενώ αν $\rho \leq 1$ το πιο πάνω γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν ορίζεται.

Λύση.

Υποθέτουμε ότι $\rho > 1$ και θεωρούμε $R > 1$. Τότε

$$\int_1^R \frac{1}{x^\rho} dx = \int_1^R x^{-\rho} dx = \frac{x^{-\rho+1}}{-\rho+1} \Big|_1^R = \frac{1}{1-\rho} \cdot (R^{-\rho+1} - 1) = \frac{1}{\rho-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{R^{\rho-1}}\right).$$

Επειδή $\rho > 1$ έχουμε $\lim_{R \rightarrow \infty} R^{\rho-1} = \infty$ και συνεπώς

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^{\rho-1}} = 0.$$

Άρα

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x^\rho} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{R^{\rho-1}}\right) = \frac{1}{\rho-1} \cdot (1 - 0) = \frac{1}{\rho-1}.$$

Καταλήγουμε ότι

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x^\rho} dx = \frac{1}{\rho-1}.$$

Αν $\rho < 1$ τότε $1 - \rho > 0$ και $\lim_{R \rightarrow \infty} R^{-\rho+1} = +\infty$. Όπως πιο πάνω έχουμε

$$\int_1^R \frac{1}{x^\rho} dx = \frac{1}{1-\rho} \cdot (R^{-\rho+1} - 1)$$

για κάθε $R > 1$ και άρα

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x^\rho} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\rho} \cdot (R^{-\rho+1} - 1) = +\infty.$$

Επομένως το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho} dx$ δεν ορίζεται για $\rho < 1$. (Κάποια συγγράμματα αναφέρουν

$\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho} dx = +\infty$ όταν $\rho < 1$.)

Τέλος αν $\rho = 1$,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \ln(x) \Big|_1^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \ln(R) = \infty.$$

Συνεπώς πάλι δεν ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho} dx$.

Άσκηση 2 (Ολοκληρωτικό Κριτήριο). Εξετάστε τις σειρές

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$$

ως προς τη σύγκλιση.

Λύση.

Εφαρμόζουμε το Ολοκληρωτικό Κριτήριο. Στην πρώτη σειρά θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f : [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}.$$

Αν $2 \leq x < y$ τότε $0 < \ln x < \ln y$ και

$$0 < x \cdot \ln x < x \cdot \ln y < y \cdot \ln y.$$

Επομένως $f(y) < f(x)$ και άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα και θετική. Από το Ολοκληρωτικό Κριτήριο η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει αν και μόνο αν ορίζεται το ολοκλήρωμα $\int_2^{\infty} f(x) dx$.

Θεωρούμε $R > 2$. Τότε

$$\int_2^R f(x) dx = \int_2^R \frac{1}{x \cdot \ln x} dx.$$

Παρατηρούμε ότι $1/x = (\ln x)'$. Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = \ln x$ και έχουμε $du = \frac{1}{x} dx$ αλλιώς $dx = x du$.

Άρα

$$\int_2^R f(x) dx = \int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{1}{u} du = \ln u \Big|_2^{\ln R} = \ln(\ln R) - \ln(\ln 2).$$

Έχουμε

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \ln R = \infty \quad \text{και} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \ln(\ln R) = \infty.$$

Καταλήγουμε

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_2^R f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} (\ln(\ln R) - \ln(\ln 2)) = \infty.$$

Επομένως δεν ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_2^{\infty} f(x) dx$ και άρα η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$$

αποκλίνει.

Στη δεύτερη σειρά θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g : [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : g(x) = \frac{1}{x \cdot \ln^2 x}.$$

Όπως και με την f η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα και θετική. Από το Ολοκληρωτικό Κριτήριο η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} g(n)$ συγκλίνει αν και μόνο αν ορίζεται το ολοκλήρωμα $\int_2^{\infty} g(x) dx$.

Θεωρούμε $R > 2$. Τότε

$$\int_2^R g(x) dx = \int_2^R \frac{1}{x \cdot \ln^2 x} dx.$$

Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = \ln x$ και έχουμε $du = \frac{1}{x} dx$ αλλιώς $dx = x du$.

Άρα

$$\int_2^R g(x) dx = \int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} \Big|_{\ln 2}^{\ln R} = -\frac{1}{\ln R} + \frac{1}{\ln 2}.$$

Έχουμε

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \ln R = \infty \quad \text{και} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln R} = 0.$$

Καταλήγουμε

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_2^R g(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln R} \right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Επομένως ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_2^\infty g(x) dx$ και άρα η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} g(n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$$

συγκλίνει. †

Άσκηση 3. Βρείτε τα εξής αόριστα ολοκληρώματα:

$$I = \int \frac{1}{x^2 + 2x - 3} dx \quad J = \int \frac{x}{(x+1)(x-2)} dx.$$

Λύση.

Το πολυώνυμο $x^2 + 2x - 3$ έχει δύο πραγματικές ρίζες, τις $x = 1$ και $x = -3$, επομένως $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$. Διασπάμε το κλάσμα $1/(x^2 + 2x - 3)$ σε πιο απλά κλάσματα:

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x-1)}{(x-1)(x+3)}.$$

Έχουμε $A(x+3) + B(x-1) = Ax + 3A + Bx - B = (A+B)x + 3A - B$. Προκύπτει το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ 3A - B &= 1. \end{aligned}$$

Τότε $B = -A$ και

$$3A - (-A) = 1 \iff 4A = 1 \iff A = \frac{1}{4}.$$

Άρα

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+3}.$$

Συνεπώς

$$I = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{4} \cdot \int \frac{1}{x+3} dx = \frac{1}{4} \cdot \ln|x-1| - \frac{1}{4} \cdot \ln|x+3| + c.$$

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα ο παρονομαστής είναι παραγοντοποιημένος. Απαλείφουμε τον x από τον αριθμητή με τον εξής απλό τρόπο,

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)} = \frac{x+1}{(x+1)(x-2)} - \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x+1)(x-2)}.$$

Διασπάμε το τελευταίο κλάσμα,

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-2}.$$

Άρα

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1}$$

και συνεπώς

$$J = \frac{2}{3} \cdot \int \frac{1}{x-2} dx + \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{x+1} dx = \frac{2}{3} \cdot \ln|x-2| + \frac{1}{3} \cdot \ln|x+1| + c.$$

Άσκηση 4. Βρείτε τα εξής αόριστα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2 + 4} dx \quad I_2 = \int \frac{1}{3x^2 + 1} dx \quad I_3 = \int \frac{1}{x^2 - 4x + 7} dx.$$

Λύση.

Έχουμε

$$\frac{1}{x^2 + 4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x/2)^2 + 1}.$$

Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = x/2$ και έχουμε $dx = 2du$. Οπότε

$$I_1 = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{1}{u^2 + 1} \cdot 2 du = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \arctan(u) + c = \frac{1}{2} \cdot \arctan(x/2) + c.$$

Σχετικά με το δεύτερο ολοκλήρωμα,

$$\frac{1}{3x^2 + 1} = \frac{1}{(\sqrt{3}x)^2 + 1}.$$

Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = \sqrt{3}x$ και έχουμε $dx = 1/\sqrt{3}du$. Οπότε

$$I_2 = \int \frac{1}{(\sqrt{3}x)^2 + 1} dx = \int \frac{1}{u^2 + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} du = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan(u) + c = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan(\sqrt{3}x) + c.$$

Τέλος στο τρίτο ολοκλήρωμα παρατηρούμε αρχικά ότι η διακρίνουσα του τριωνόμου $x^2 - 4x + 7$ είναι αρνητική, επομένως μπορούμε να το φέρουμε στη μορφή $(ax - b)^2 + c^2$ ή πιο απλά $(x - b)^2 + c^2$ γιατί ο συντελεστής του μεγιστοβαθμίου όρου είναι η μονάδα. Έχουμε

$$x^2 - 4x + 7 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 + 3 = (x - 2)^2 + 3.$$

Επομένως

$$I_3 = \int \frac{1}{(x - 2)^2 + 3} dx = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{\left(\frac{x - 2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx.$$

Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = \frac{x - 2}{\sqrt{3}}$ και έχουμε $dx = \sqrt{3}du$. Άρα

$$I_3 = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{u^2 + 1} \cdot \sqrt{3} du = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan(u) + c = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan\left(\frac{x - 2}{\sqrt{3}}\right) + c.$$

Άσκηση 5. Βρείτε τα εξής αόριστα ολοκληρώματα:

$$I = \int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 2} dx \quad J = \int \frac{x + 5}{4x^2 + 4x + 10} dx.$$

Λύση.

Στο πρώτο ολοκλήρωμα παρατηρούμε ότι το τριώνυμο $x^2 + 2x + 2$ έχει αρνητική διακρίνουσα και ότι

$$x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x + 1)^2 + 1.$$

Επομένως

$$I = \int \frac{x + 1}{(x + 1)^2 + 1} dx.$$

Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = (x + 1)^2$ οπότε $du = 2(x + 1)dx$. Επομένως

$$I = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{u + 1} du = \frac{1}{2} \cdot \ln|u + 1| + c = \frac{1}{2} \cdot \ln((x + 1)^2 + 1) + c = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + 2x + 2) + c.$$

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα βλέπουμε πάλι ότι η διακρίνουσα του τριωνόμου $4x^2 + 4x + 10$ είναι αρνητική και πως

$$4x^2 + 4x + 10 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x + 1 + 9 = (2x + 1)^2 + 9.$$

Άρα

$$J = \int \frac{x+5}{(2x+1)^2+9} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x+10}{(2x+1)^2+9} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x+1+9}{(2x+1)^2+9} dx \\ = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x+1}{(2x+1)^2+9} dx + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{9}{(2x+1)^2+9} dx.$$

Συμβολίζουμε τα πιο πάνω ολοκληρώματα με J_1 και J_2 αντίστοιχα και έχουμε

$$(1) \quad J = \frac{1}{2} \cdot (J_1 + J_2)$$

Υπολογίζουμε το κάθε ένα ολοκλήρωμα ξεχωριστά. Στο J_1 εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = (2x+1)^2$, οπότε $du = 2(2x+1) \cdot 2dx = 4(2x+1)dx$. Επομένως

$$J_1 = \int \frac{2x+1}{(2x+1)^2+9} dx = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{1}{u+9} du = \frac{1}{4} \cdot \ln|u+9| + c_1 = \frac{1}{4} \cdot \ln((2x+1)^2+9) + c_1.$$

Υπολογίζουμε το J_2 ,

$$J_2 = \int \frac{9}{(2x+1)^2+9} = \int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{3}\right)^2+1} dx.$$

Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = \frac{2x+1}{3}$ και έχουμε $du = \frac{2}{3}dx$ ή αλλιώς $dx = \frac{3}{2}du$. Άρα

$$J_2 = \int \frac{1}{u^2+1} \cdot \frac{3}{2} du = \frac{3}{2} \cdot \arctan(u) + c_2 = \frac{3}{2} \cdot \arctan\left(\frac{2x+1}{3}\right) + c_2.$$

Από την (1) προκύπτει

$$J = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \ln((2x+1)^2+9) + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \arctan\left(\frac{2x+1}{3}\right) + c \\ = \frac{1}{8} \cdot \ln(4x^2+4x+10) + \frac{3}{4} \cdot \arctan\left(\frac{2x+1}{3}\right) + c.$$

Άσκηση 6. Βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{1}{(x+3)(x^2+x+1)} dx.$$

Λύση.

Αρχικά διασπάμε το κλάσμα,

$$\frac{1}{(x+3)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Μετά από πράξεις βρίσκουμε $C = 2/7$, $B = -1/7$ και $A = 1/7$. Άρα

$$\frac{1}{(x+3)(x^2+x+1)} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{x+3} - \frac{1}{7} \cdot \frac{x-2}{x^2+x+1}.$$

Συμβολίζουμε με I το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα. Τότε

$$I = \frac{1}{7} \cdot \int \frac{1}{x+3} dx - \frac{1}{7} \cdot \int \frac{x-2}{x^2+x+1} dx.$$

Συμβολίζουμε τα τελευταία δύο ολοκληρώματα με I_1 και I_2 αντίστοιχα, έτσι που

$$I = \frac{1}{7} \cdot I_1 - \frac{1}{7} \cdot I_2.$$

Έχουμε

$$I_1 = \int \frac{1}{x+3} dx = \ln|x+3| + c_1.$$

Σχετικά με το I_2 , παρατηρούμε ότι το τριώνυμο $x^2 + x + 1$ δεν έχει πραγματικές ρίζες και

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = (x + 1/2)^2 + 3/4.$$

Άρα

$$I_2 = \int \frac{x-2}{(x+1/2)^2 + 3/4} dx = \int \frac{x+1/2}{(x+1/2)^2 + 3/4} dx - \frac{5}{2} \cdot \int \frac{1}{(x+1/2)^2 + 3/4} dx.$$

Συμβολίζουμε τα τελευταία δύο ολοκληρώματα με I_3 και I_4 αντίστοιχα, έτσι που $I_2 = I_3 - (5/2) \cdot I_4$. Για τον υπολογισμό του I_3 κάνουμε την αντικατάσταση $u = (x + 1/2)^2$ οπότε $du = 2(x + 1/2)dx$. Άρα

$$I_3 = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{u + 3/4} du = \frac{1}{2} \cdot \ln|u + 3/4| + c_2 = \frac{1}{2} \cdot \ln((x + 1/2)^2 + 3/4) + c_2 = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + x + 1) + c_2.$$

Για το I_4 έχουμε

$$I_4 = \int \frac{1}{(x+1/2)^2 + 3/4} dx = \frac{4}{3} \cdot \int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (x+1/2)\right)^2 + 1} dx.$$

Με αντικατάσταση $u = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (x + 1/2)$ προκύπτει $du = \frac{2}{\sqrt{3}} dx$ και άρα

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan(u) + c_3 \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (x + 1/2)\right) + c_3 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c_3. \end{aligned}$$

Καταλήγουμε

$$I_2 = I_3 - \frac{5}{2} \cdot I_4 = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + x + 1) - \frac{5\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c_4$$

και

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{7} \cdot I_1 - \frac{1}{7} \cdot I_2 \\ &= \frac{1}{7} \cdot \ln|x+3| - \frac{1}{14} \cdot \ln(x^2 + x + 1) + \frac{5\sqrt{3}}{21} \cdot \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c. \end{aligned}$$

Άσκηση 7. Θεωρούμε τα αόριστα ολοκληρώματα

$$I = \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos x} dx \quad \text{και} \quad J = \int \frac{1}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x} dx.$$

- (i) Να αναγάγετε τα I, J σε ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων με κατάλληλη αντικατάσταση.
- (ii) Υπολογίστε τα αόριστα ολοκληρώματα I, J .

Λύση.

(i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $R(u, v) = \frac{1}{u^2 \cdot v}$, $u, v \neq 0$, έτσι που

$$I = \int R(\sin x, \cos x) dx.$$

Παρατηρούμε ότι

$$R(u, -v) = \frac{1}{u^2 \cdot (-v)} = -R(u, v)$$

δηλαδή η R είναι περιττή ως προς v . (Προσοχή μην μπερδευτείτε με το ότι η συνάρτηση συνημίτονο είναι άρτια - αυτό δεν έχει σχέση σε αυτό το σημείο.)

Σύμφωνα με τα γνωστά το ολοκλήρωμα $\int R(\sin x, \cos x) dx$ ανάγεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης εφαρμόζοντας την αντικατάσταση $t = \sin x$.

Έχουμε $dt = \cos x dx$ και

$$I = \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{t^2 \cdot (1-t^2)} dt,$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε ότι $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$. Επομένως έχουμε εκφράσει το I ως αόριστο ολοκλήρωμα της ρητής συνάρτησης $f(t) = \frac{1}{t^2 \cdot (1-t^2)}$, $t \neq 0$.

Στο ολοκλήρωμα J παίρνουμε $Q(u, v) = \frac{1}{u^4 \cdot v^2}$, $u, v \neq 0$, έτσι που

$$J = \int Q(\sin x, \cos x) dx.$$

Παρατηρούμε ότι η Q είναι άρτια ως προς το ζεύγος (u, v) , δηλαδή

$$Q(-u, -v) = \frac{1}{(-u)^4 \cdot (-v)^2} = \frac{1}{u^4 \cdot v^2} = Q(u, v).$$

Σύμφωνα με τα γνωστά το ολοκλήρωμα $\int Q(\sin x, \cos x) dx$ ανάγεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης εφαρμόζοντας την αντικατάσταση $t = \tan x$.

Έχουμε $dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$ και

$$J = \int \frac{1}{\sin^4 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx,$$

άρα θέλουμε να εκφράσουμε την ποσότητα $1/\sin^4 x$ συναρτήσει του t . Αφού $t = \tan x$ έχουμε

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= t^2 \cos^2 x \implies \sin^2 x = t^2(1 - \sin^2 x) \\ \implies \sin^2 x &= t^2 - t^2 \sin^2 x \implies \sin^2 x(1 + t^2) = t^2 \\ \implies \sin^2 x &= \frac{t^2}{1 + t^2} \implies \sin^4 x = \frac{t^4}{(1 + t^2)^2} \\ \implies \frac{1}{\sin^4 x} &= \frac{(1 + t^2)^2}{t^4}. \end{aligned}$$

Επομένως

$$J = \int \frac{(1 + t^2)^2}{t^4} dt.$$

(ii) Υπολογίζουμε το $I = \int \frac{1}{t^2(1-t^2)} dt$ ως συνάρτηση του t και μετά αντικαθιστούμε $t = \sin x$.

Παρατηρούμε ότι το κλάσμα είναι έκφραση του t^2 , δηλαδή αν θέσουμε $s = t^2$ τότε το κλάσμα μετατρέπεται σε $\frac{1}{s(1-s)}$, το οποίο διασπάται εύκολα ως εξής:

$$\frac{1}{s(1-s)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2}.$$

Άρα

$$I = \int \frac{1}{t^2(1-t^2)} dt = \int \frac{1}{t^2} dt + \int \frac{1}{1-t^2} dt = -\frac{1}{t} + \int \frac{1}{1-t^2} dt.$$

Για να βρούμε το τελευταίο ολοκλήρωμα κάνουμε ακόμα μία διάσπαση κλάσματος,

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1-t)(1+t)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+t}.$$

Καταλήγουμε

$$I = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{1-t} dt + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{1+t} dt = -\frac{1}{t} - \frac{1}{2} \cdot \ln|1-t| + \frac{1}{2} \cdot \ln|1+t| + c.$$

(Το προτελευταίο ολοκλήρωμα προκύπτει με αντικατάσταση $u = -t$.) Θέτοντας πίσω $t = \sin x$ έχουμε

$$I = \frac{1}{2} \cdot \left(\ln(1 + \sin x) - \ln(1 - \sin x) - \frac{2}{\sin x} \right) + c.$$

Τέλος υπολογίζουμε το J . Εδώ δεν χρειάζεται να διασπάσουμε το κλάσμα γιατί ο παρονομαστής αποτελείται μόνο από έναν όρο, το t^4 .

$$J = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4} dt = \int \frac{1+2t^2+t^4}{t^4} dt = \int \frac{1}{t^4} dt + \int \frac{2}{t^2} dt + \int 1 dt = -\frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t + c.$$

Αφού $t = \tan x$ προκύπτει

$$J = \tan x - \frac{2}{\tan x} - \frac{1}{3 \tan^3 x} + c.$$