Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

11ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου

Άσκηση 1. Δείξτε με τη βοήθεια του Θεωρήματος Ολοκλήρωσης Δυναμοσειρών ότι

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n, \quad |x| < 1.$$

Άσκηση 2.

(i) Βρείτε όλα τα πολυώνυμα Taylor στο 0 της συνάρτησης του ημιτόνου με τη βοήθεια του ακόλουθου τύπου (ο οποίος δείχθηκε σε προηγούμενη άσκηση):

$$\sin^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^j, & k = 2j+1 \\ 0, & k = 2j. \end{cases}$$

(ii) Αποδείξτε τον τύπο της δυναμοσειράς για τη συνάρτηση του ημιτόνου:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}, \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Μπορείτε να πάρετε δεδομένο ότι η πιο πάνω δυναμοσειρά έχει άπειρη ακτίνα σύγκλισης.

Άσκηση 3. Βρείτε όλα τα πολυώνυμα Taylor στο 0 των συναρτήσεων $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = x \cdot e^{-x}, \qquad g(x) = e^{x^2} + \cos x \quad x \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 4.

(i) Βρείτε έναν φυσικό αριθμό n για τον οποίο

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 10^{-4}.$$

(ii) Βρείτε (με απόδειξη) τον ελάχιστο φυσικό αριθμό n με την πιο πάνω ιδιότητα.

Άσκηση 5. Δείξτε με χρήση του Θεωρήματος Taylor ότι

$$\left|\cos(2x) - \left(1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!}\right)\right| \leq \frac{64x^6}{6!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 6. Δείξτε ότι

$$\left|\sin 1 - \left(1 - \frac{1}{3!}\right)\right| < 10^{-2}.$$

Άσκηση 7.

(i) Βρείτε τις σειρές Maclaurin των συναρτήσεων

$$f(x) = e^{-x},\ x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = x \cdot e^{-x},\ x \in \mathbb{R} \qquad h(x) = e^{-x^2},\ x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Να βρείτε τις παραγώγους $f^{(6)}(0)$, $g^{(6)}(0)$, $h^{(6)}(0)$ και $h^{(7)}(0)$.