ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

Γραμμική Άλγεβρα
6. Εύρεση Αντίστροφου Πίνακα με Στοιχειώδεις Πράξεις Γραμμών

Κάλλια Παυλοπούλου

2020-2021

Εύρεση Αντίστροφου πίνακα *(με στοιχειώδεις πράξεις)*

Δίνεται ο τετραγωνικός πίνακας $A = [\alpha_{ij}] \in M_{\mu\times\mu}$.

Αν γράψουμε δίπλα στον πίνακα A τον μοναδιαίο I_μ και εφαρμόσουμε και στους δύο ταυτόχρονα (δηλαδή στον πίνακα $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I_\mu}]$ διαστάσεων $\mu \times 2\mu$) τις ίδιες στοιχειώδεις πράξεις γραμμών, ώστε ο πίνακας A να μετασχηματιστεί σε ανηγμένο κλιμακωτό A_R, δηλαδή

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I_\mu}] \rightarrow \ \ldots \rightarrow [\boldsymbol{A_R}|\boldsymbol{B}]$$

τότε θα ισχύει:

- ❖ Αν $\boldsymbol{A_R = I_\mu}$ τότε ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και $B = A^{-1}$.
- ❖ Αν $\boldsymbol{A_R \neq I_\mu}$ τότε ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, με στοιχειώδεις γραμμοπράξεις.

Λύση:

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I_3}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\gamma_3 \to \gamma_3 - 3\gamma_1]{\gamma_2 \to \gamma_2 - 2\gamma_1}$$

$$\underbrace{}_{\boldsymbol{A}} \quad \underbrace{}_{\boldsymbol{I_3}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_2 \to -1 \cdot \gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_3 \to \gamma_3 + 2 \cdot \gamma_2}$$

Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_2 \to \gamma_2 - 2\cdot\gamma_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\gamma_1 \to \gamma_1 - 2\cdot\gamma_2]{\gamma_1 \to \gamma_1 - 3\cdot\gamma_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] = [\boldsymbol{I_3} | \boldsymbol{B}]$$

$\boldsymbol{A_R}$

Μοναδιαίος $\boldsymbol{3 \times 3}$

Αντίστροφος $\boldsymbol{A^{-1}}$

Ο πίνακας $\boldsymbol{A_R}$ που προέκυψε από τις γραμμοπράξεις είναι ίσος με τον $\boldsymbol{I_3}$.
Δηλαδή, ο $\boldsymbol{A}$ είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον $\boldsymbol{I_3}$.

Άρα ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος με

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2

Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \alpha \end{bmatrix}$ με $\alpha \in \mathrm{R}$. Να εξεταστεί αν υπάρχει ο αντίστροφός τους και αν ναι, να τον υπολογίσετε με τη βοήθεια των γραμμοπράξεων.

Λύση:

α) $$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I_2}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 12 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_2 \to \gamma_2 - 3\gamma_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right].$$

$\boldsymbol{A_R}$

Ο πίνακας που προέκυψε από τις γραμμοπράξεις, <u>ο $\boldsymbol{A_R}$, δεν είναι ίσος με τον $\boldsymbol{I_2}$</u>.
Δηλαδή, ο $\boldsymbol{A}$ δεν είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον $\boldsymbol{I_2}$.

Άρα ο πίνακας A **δεν** είναι αντιστρέψιμος.

Παράδειγμα 2-συνέχεια

β) Για τον πίνακα B έχουμε:

$$[\boldsymbol{B}|\boldsymbol{I_2}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & \alpha & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_2 \to \gamma_2 - 3\gamma_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 6 & -3 & 1 \end{array}\right].$$

Παρατηρούμε ότι

1) αν α-6=0, δηλαδή α=6, τότε ο τελευταίος πίνακας παίρνει τη μορφή:

$\boldsymbol{B_R}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

Ο πίνακας <u>$\boldsymbol{B_R}$, δεν είναι ίσος με τον $\boldsymbol{I_2}$</u>.
Άρα ο $\boldsymbol{B}$ δεν είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον $\boldsymbol{I_2}$.

Άρα ο πίνακας B **δεν** είναι αντιστρέψιμος.

Παράδειγμα 2-συνέχεια

2) Αν όμως $\alpha \neq 6$, τότε ο πίνακας

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha-6 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_2 \to \frac{1}{\alpha-6}\gamma_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{\alpha-6} & \frac{1}{\alpha-6} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\gamma_1 \to \gamma_1 - 2\gamma_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{\alpha}{\alpha-6} & -\frac{2}{\alpha-6} \\ 0 & 1 & \frac{-3}{\alpha-6} & \frac{1}{\alpha-6} \end{array}\right] = [\boldsymbol{I_2} | \boldsymbol{B^{-1}}].$$

$\boldsymbol{B_R = I_2}$

$\boldsymbol{B^{-1}}$

Άρα $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\alpha-6} & -\frac{2}{\alpha-6} \\ \frac{-3}{\alpha-6} & \frac{1}{\alpha-6} \end{bmatrix}, \gamma\iota\alpha\ \alpha \neq 6.$

Υπενθύμιση (για πίνακα $\boldsymbol{A} \in M_{\mu\times\mu}$)

- Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν η ορίζουσά του είναι διάφορη του μηδενός.
- Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν το ομογενές σύστημα ($A \cdot \vec{x} = \vec{0}$) μ εξισώσεων με μ αγνώστους και πίνακα συντελεστών A έχει μία και μοναδική λύση τη μηδενική.
- Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο πίνακας A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον μοναδιαίο I_μ.