ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

# Γραμμική Άλγεβρα

# 3. Αναγωγή σε ανηγμένο κλιμακωτό

Κάλλια Παυλοπούλου

2020-2021

# Αναγωγή πίνακα $A = [\alpha_{ij}] \in M_{\mu \times \nu}$ σε ανηγμένο κλιμακωτό (row reduced echelon form)

Κάθε πίνακας $A = [\alpha_{ij}] \in M_{\mu \times \nu}$ με διαδοχική εφαρμογή στοιχειωδών πράξεων γραμμών ανάγεται αρχικά σε κλιμακωτό και στη συνέχεια σε ανηγμένο κλιμακωτό.

Η διαδικασία αναγωγής είναι αλγοριθμική, ονομάζεται αλγόριθμος Gauss-Jordan και περιγράφεται ως εξής:

# Διαδικασία:

Α) κάνουμε το 1ο στοιχείο της 1ης μη μηδενικής στήλης διάφορο του μηδενός, με εναλλαγή γραμμών και τα ονομάζουμε βασικό στοιχείο ή pivot.

Β) το στοιχείο $\alpha_{11}$ γίνεται ίσο με 1, εφαρμόζοντας:

$$\boldsymbol{\gamma_1 \rightarrow (1/\alpha_{11}) \cdot \gamma_1}$$

$\gamma_1$ η 1η γραμμή του πίνακα

Γ) Μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία της 1ης στήλης εκτός του βασικού.

$$\boldsymbol{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - \alpha_{21} \cdot \gamma_1}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{\gamma_\mu \rightarrow \gamma_\mu - \alpha_{\mu 1} \cdot \gamma_1}$$

Δ) το στοιχείο $\alpha_{22}$ να γίνει ίσο με 1. $\gamma_2 \rightarrow (1/\alpha_{22}) \cdot \gamma_2$

Αγνοώντας την 1η γραμμή και 1η στήλη που έχει προκύψει και με επανάληψη της παραπάνω διαδικασίας κάνουμε το $\alpha_{22}$ να γίνει ίσο με 1 και όλα τα στοιχεία της 2ης στήλης που είναι κάτω από το $\alpha_{22}$ ίσα με 0. Συνεχίζουμε μέχρι ο $A$ να γίνει κλιμακωτός με τα ηγετικά στοιχεία των γραμμών του ίσα με 1.

*Σημ. ως εδώ τα 3 βήματα αποτελούν τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss.*

**Ε) Με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών (βλ. Δ) μετατρέπουμε τα μη μηδενικά στοιχεία κάθε στήλης που περιέχει το ηγετικό στοιχείο 1 μιας γραμμής σε μηδενικά, αρχίζοντας από αυτήν που είναι δεξιότερα.**

***Σημ. Η πλήρης μέθοδος ονομάζεται η μέθοδος απαλοιφής των Gauss-Jordan.***

# Παρατηρήσεις

- Ο κλιμακωτός πίνακας που προκύπτει ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟΣ, αλλά έχει πάντα τον ίδιο αριθμό μη μηδενικών γραμμών! (=βαθμός πίνακα)
- Ο ανηγμένος κλιμακωτός που προκύπτει με τον παραπάνω αλγόριθμό είναι ΜΟΝΑΔΙΚΟΣ.
- Δεν μπορώ στο πρώτο βήμα να εφαρμόσω γραμμοπράξεις και στο επόμενο βήμα να εφαρμόσω στηλοπράξεις. Δουλεύω μόνο με γραμμές ή μόνο με στήλες. Εμείς θα εφαρμόσουμε στη συνέχεια μόνο γραμμοπράξεις.

# Παράδειγμα 1 $(3 \times 3)$

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 - R_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2 \cdot R_1]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -6 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \to (-1) \cdot R_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & -6 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 6 \cdot R_2]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to \frac{1}{11} \cdot R_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2 \cdot R_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 \to R_1 - 3 \cdot R_3]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 \to R_1 - 2 \cdot R_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A_R$$

Ανηγμένος κλιμακωτός

**Λέμε ότι ο πίνακας $A$ είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον πίνακα $A_R$ ο οποίος είναι ανηγμένος κλιμακωτός**

## Παράδειγμα 2 $(4 \times 4)$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -8 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & -5 \\ 3 & 8 & 0 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_3]{} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & -8 & 4 \\ 3 & 8 & 0 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2 \cdot R_1]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & 2 & 18 \\ 0 & 4 & -8 & 4 \\ 3 & 8 & 0 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 3 \cdot R_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & 2 & 18 \\ 0 & 4 & -8 & 4 \\ 0 & 8 & -6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_3]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & -8 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 18 \\ 0 & 8 & -6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \to \frac{1}{4} \cdot R_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 18 \\ 0 & 8 & -6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 4 \cdot R_2]{}$$

# Παράδειγμα 2 (συνέχεια)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 14 \\ 0 & 8 & -6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 8 \cdot R_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 14 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_3]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to \frac{1}{10} \cdot R_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 14/10 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 \to \frac{1}{-14} \cdot R_4]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 14/10 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - \frac{14}{10} \cdot R_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 - R_4]{}$$

# Παράδειγμα 2 (συνέχεια)

$$\begin{bmatrix}1&0&2&-5\\0&1&-2&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow[R_1\to R_1+5\cdot R_4]{} \begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&-2&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow[R_2\to R+2\cdot R_3]{}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow[R_1\to R_1-2\cdot R_3]{} \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} = B_R$$

**Ανηγμένος κλιμακωτός**

**Λέμε ότι ο πίνακας $B$ είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον πίνακα $B_R = I_4$ , τον μοναδιαίο $4 \times 4$, ο οποίος είναι ανηγμένος κλιμακωτός**

# Παράδειγμα 3 $(3 \times 5)$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 12 & 11 & -20 \\ 2 & 8 & 16 & 0 & 12 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_3]{} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & 16 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 12 & 11 & -20 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2 \cdot R_1]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & \boxed{2} & 12 & -6 & 14 \\ 0 & 2 & 12 & 11 & -20 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \to \frac{1}{2} \cdot R_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 6 & -3 & 7 \\ 0 & 2 & 12 & 11 & -20 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2 \cdot R_2]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & -34 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to \frac{1}{17} \cdot R_3]{} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 6 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 + 3 \cdot R_3]{}$$

**Κλιμακωτός με pivots 1**

# Παράδειγμα 3 (συνέχεια)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 \to R_1 - 3\cdot R_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 \to R_1 - 3\cdot R_2]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -16 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = C_R$$

**Ανηγμένος κλιμακωτός**

**Λέμε ότι ο πίνακας $C$ είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον πίνακα $C_R$ ο οποίος είναι ανηγμένος κλιμακωτός**

# **Βαθμός ή τάξη ενός πίνακα** $A = [\alpha_{ij}] \in M_{\mu\times\nu}$ **, συμβολικά** $rank(A)$

Ονομάζουμε **τάξη ή βαθμό του πίνακα** $A = [\alpha_{ij}] \in M_{\mu\times\nu}$, συμβολικά $rank(A)$, το πλήθος όλων των ηγετικών στοιχείων στην κλιμακωτή του μορφή κατά γραμμές.

ή αλλιώς,

το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του όταν τον φέρουμε σε κλιμακωτή μορφή κατά γραμμές.

# Παρατηρήσεις:

- Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό πως η τάξη ενός πίνακα $A = [\alpha_{ij}] \in M_{\mu\times\nu}$ θα ικανοποιεί τη σχέση:

$$\boxed{rank(A) \leq min\{\mu, \nu\}.}$$

- Την τάξη ενός πίνακα μπορούμε να την υπολογίσουμε μετατρέποντας τον πίνακα είτε σε κλιμακωτό είτε σε ανηγμένο κλιμακωτό κατά γραμμές. Το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών θα είναι το ίδιο και τις δύο περιπτώσεις.

- Θεώρημα: Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = [\alpha_{ij}] \in M_{\nu\times\nu}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν ισχύει $\boxed{rank(A) = \nu.}$