ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α1
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1
“ Ακολουθίες και Σειρές ”

Διδάσκων: Γ. Σμυρλής

1. Για κάθε μια από τις παρακάτω ακολουθίες, να βρείτε το όριό της (αν υπάρχει):

$$a_n = \frac{2^n}{n!}, \quad b_n = n - \sqrt{n^2 - n}, \quad c_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad d_n = \sqrt[n]{n^3 + 2n^2 + n + 5}, \quad \epsilon_n = (-1)^n \frac{n}{n+1},$$

$$\zeta_n = \sqrt[n]{5n^2 - 3n - 1}, \quad \eta_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n + 100}, \quad \theta_n = \sqrt[n]{n^2 + n + 5^n}.$$

Απαντήσεις:

$\lim a_n = 0, \quad \lim b_n = 1/2, \quad \lim c_n = 1, \quad \lim d_n = 1, \quad \lim \zeta_n = 1, \quad \lim \eta_n = 7, \quad \lim \theta_n = 5$

το $\lim \epsilon_n$ δεν υπάρχει.

2. Για κάθε μια από τις παρακάτω ακολουθίες, να βρείτε το όριό της (αν υπάρχει):

$$a_n = \frac{5^n + n}{6^n - n}, \quad b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad c_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}},$$

η αναδρομικά οριζόμενη ακολουθία (d_n) με

$$d_1 = 1, \quad d_{n+1} = \sqrt{2d_n + 3}, \ \ \forall n \geq 1,$$

Απαντήσεις:

$$\lim a_n = 0, \quad \lim b_n = 0, \quad \lim c_n = 1, \quad \lim d_n = 3.$$

3. Δίνεται η αναδρομικά οριζόμενη ακολουθία (a_n) με
$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 2}{a_n + 3}, \ \ \forall n \geq 1.$$
Να βρείτε το $\lim a_n$.
[*Υπόδειξη:* Να βρείτε πρώτα ένα άνω φράγμα και στη συνέχεια να δείξετε ότι είναι αύξουσα, παίρνοντας τη διαφορά $a_{n+1} - a_n$.]

Απάντηση: $\lim a_n = \sqrt{3} - 1.$

4. Έστω ακολουθία (a_n) τέτοια ώστε
$$\lim a_{2n} = \lim a_{2n-1} = a \in \mathbb{R}.$$
Να δείξετε ότι και $\lim a_n = a$.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχουν $n_1\,, n_2 \in \mathbb{N}^*$ ώστε
$$|a_{2n} - a| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_1, \tag{1}$$
$$|a_{2n-1} - a| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_2. \tag{2}$$
Θέτουμε $n_0 = \max\{2n_1\,,\ 2n_2 - 1\}$.
Έστω $n \in \mathbb{N}^*$ με $n \geq n_0$.
—Αν n άρτιος, τότε $n = 2k$ για κάποιο $k \geq 1$, οπότε $2k \geq n_0 \geq 2n_1$ και συνεπώς $k \geq n_1$. Από την (1) τώρα προκύπτει ότι $|a_{2k} - a| < \varepsilon$, δηλ.
$$|a_n - a| < \varepsilon.$$
—Αν n περιττός, τότε $n = 2k - 1$ για κάποιο $k \geq 1$, οπότε $2k - 1 \geq n_0 \geq 2n_2 - 1$ και συνεπώς $k \geq n_2$. Από την (2) τώρα προκύπτει ότι $|a_{2k-1} - a| < \varepsilon$, δηλ. και πάλι
$$|a_n - a| < \varepsilon.$$
Από τα παραπάνω έπεται ότι
$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0\,.$$
$\square$

5. Αν κάθε υπακολουθία μιας ακολουθίας (a_n) έχει μια περαιτέρω υπακολουθία που συγκλίνει στον αριθμό a, να δείξετε ότι η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στον a.

   Απόδειξη: Υποθέτουμε αντιθέτως ότι η ακολουθία (a_n) **δεν** συγκλίνει στο a. Τότε (διατυπώνοντας την **άρνηση του ορισμού** του ορίου ακολουθίας),

$$\exists\, \varepsilon > 0 \text{ τέτοιο ώστε: } \forall n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \exists n > n_0 \ \text{ με } \ |a_n \ - \ a| \geq \varepsilon. \tag{3}$$

   –Εφαρμόζοντας την (3) για $n_0 = 1$, μπορούμε να επιλέξουμε φυσικό αριθμό $k_1 > 1$ με $|a_{k_1} \ - \ a| \geq \varepsilon$.

   –Εφαρμόζοντας την (3) για $n_0 = k_1$, μπορούμε να επιλέξουμε φυσικό αριθμό $k_2 > k_1$ με $|a_{k_2} \ - \ a| \geq \varepsilon$.

   –Εφαρμόζοντας την (3) για $n_0 = k_2$, μπορούμε να επιλέξουμε φυσικό αριθμό $k_3 > k_2$ με $|a_{k_3} \ - \ a| \geq \varepsilon$.

   κ.ο.κ. Επαγωγικά μπορούμε με αυτό τον τρόπο να κατασκευάσουμε μια γν. αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ τέτοια ώστε

$$|a_{k_n} \ - \ a| \geq \varepsilon, \quad \forall n \geq 1. \tag{4}$$

   Προφανώς η (a_{k_n}) είναι μια υπακολουθία της (a_n).

   Λόγω της υπόθεσης, η (a_{k_n}) θα έχει μια περαιτέρω υπακολουθία $(a_{k_{p_n}})$ που συγκλίνει στο a [όπου (p_n) γν. αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών].

   Δηλ.

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_{p_n}} = a,$$

   γεγονός που αντιφάσκει με την (4). □

6. (i) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας θετικών όρων (a_n) που δεν είναι αύξουσα και $\lim a_n = +\infty$.

   [**Απ:** Π.χ. $(a_n) = (1,\ 1,\ \sqrt{2},\ 2,\ \sqrt{3},\ 3,\ \sqrt{4},\ 4,\ \sqrt{5},\ 5, \ldots),\ \ n \geq 1$].

   (ii) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας θετικών όρων (a_n) που δεν είναι φραγμένη άνω και $\lim a_n \neq +\infty$.

   [**Απ:** Π.χ. $(a_n) = (1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 4,\ 1,\ 5,\ 1, \ldots),\ \ n \geq 1$].

7. Εάν (a_n) αύξουσα ακολουθία και $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $a_n \leq a$, $\forall\, n \geq 1$.

Απόδειξη: Έστω $n \geq 1$. Επειδή (a_n) αύξουσα, έχουμε

$$a_k \geq a_n\ , \quad \forall k \geq n.$$

Παίρνοντας στην παραπάνω το όριο καθώς $k \to \infty$ προκύπτει ότι $a \geq a_n$. Η τελευταία ισχύει για όλα τα $n \geq 1$. $\square$

8. Να βρείτε το άθροισμα των παρακάτω σειρών:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{4^{n+1}}$ (**Απ.** -3/28)

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{5^n}$ (**Απ.** -1/6)

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ (**Απ.** 1)

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$(**Απ.** 3/4)

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+4n-3}$ (**Απ.** 1/3)

9. Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές με τη χρήση των κριτηρίων του **λόγου ή της ρίζας:**

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ (**Απ.** Συγκλίνει)

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^{n^2}}$ (**Απ.** Συγκλίνει)

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}$ (**Απ.** Αποκλίνει)

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n$ (**Απ.** Συγκλίνει)

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n n^3}{(n+1)!}$ (**Απ.** Συγκλίνει)

(vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \theta^n \frac{n!}{(2n)!}$, $\theta \in \mathbb{R}$ (**Απ.** Συγκλίνει)

(vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \theta^n \frac{(2n)!}{(n!)^2}$, $|\theta| < 1/4$ (**Απ.** Συγκλίνει)

(viii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\theta^n}{n^n}$, $\theta > 0$. (**Απ.** Συγκλίνει για $0 < \theta < e$ και αποκλίνει για $\theta \geq e$.)

(ix) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ (**Απ.** Συγκλίνει)

(x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n^2}}$ (**Απ.** Συγκλίνει)

10. Να δείξετε ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \theta^{\sqrt{n}}$ συγκλίνει, για κάθε $\theta \in (0,1)$.

[*Υπόδειξη:* Είναι $\theta^{\sqrt{n}} = e^{\sqrt{n}\ln\theta}$. Συγκρίνετε με τη σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.]

11. (i) Έστω (a_n) ακολουθία θετικών όρων τέτοια ώστε

$$\lim a_n^{1/\sqrt{n}} = L \in (0,1).$$

Να δείξετε ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. [*Υπόδειξη:* Ορισμός ορίου και άσκ. 10.]

Απόδειξη: Επιλέγουμε $\varepsilon \in (0, 1-L)$. Από τον ορισμό του ορίου, υπάρχει $n_0 \geq 1$ ώστε $\forall n \geq n_0$,

$$0 \leq a_n^{1/\sqrt{n}} < L + \varepsilon = \theta < 1 \implies 0 \leq a_n < \theta^{\sqrt{n}}.$$

Αλλά η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \theta^{\sqrt{n}}$ συγκλίνει (βλ. άσκηση 10), οπότε και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(ii) Να δείξετε ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ συγκλίνει.

12. Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές με το κριτήριο της **άμεσης ή της οριακής σύγκρισης:**

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ (**Απ.** Αποκλίνει)

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3 - n - 8}$ (**Απ.** Συγκλίνει)

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n - 1}$ (**Απ.** Συγκλίνει)

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ (**Απ.** Αποκλίνει)

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$ (**Απ.** Συγκλίνει)

(vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$ (**Απ.** Αποκλίνει)

(vii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ (**Απ.** Συγκλίνει)

(viii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ (**Απ.** Αποκλίνει)

(ix) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{n^3}\right)}{n^2}$ (**Απ.** Συγκλίνει)

(x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)$ (**Απ.** Αποκλίνει)

13. Για τις παρακάτω σειρές να εξετάσετε αν συγκλίνουν απόλυτα, αν συγκλίνουν απλά ή αν αποκλίνουν:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^3 + 1}$ (**Απ.** Συγκλίνει απόλυτα)

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n^2 + 1} - n)$ (**Απ.** Συγκλίνει απλά)

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2 + 2}$ (**Απ.** Συγκλίνει απλά)

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^2 + 2}}$ (**Απ.** Αποκλίνει)

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ (**Απ.** Συγκλίνει απλά)

(vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[1 - \cos\left(\frac{2}{n}\right)\right]$ (**Απ.** Συγκλίνει απόλυτα)

(vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{1}{2n+1}$, $x \in \mathbb{R}$

(**Απ.** Συγκλίνει απόλυτα για $|x| < 1$, συγκλίνει απλά για $x = -1$, και αποκλίνει για $x = 1$).

(vii) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{1}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$

(**Απ.** Συγκλίνει απόλυτα για $|x| \leq 1$ και αποκλίνει για $|x| > 1$).

14. Δίνεται ακολουθία (a_n). Εάν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ συγκλίνουν, να δείξετε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Εξετάστε αν αληθεύει το αντίστροφο.

Απόδειξη: Έστω (σ_n), (τ_n), (s_n) οι ακολουθίες μερικών αθροισμάτων των σειρών

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

αντίστοιχα, δηλ. $\forall n \geq 1$,

$$\sigma_n = a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}, \quad \tau_n = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1}, \quad s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n .$$

Λόγω της υπόθεσης,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} \tau_n = \tau \in \mathbb{R}.$$

Παρατηρούμε ότι $\forall n \geq 1$, ισχύει $s_{2n} = \sigma_n + \tau_n$, οπότε

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \sigma + \tau.$$

Επιπλέον, $\forall n \geq 1$, έχουμε $s_{2n-1} = s_{2n} - a_{2n}$. Αλλά $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0$, επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ συγκλίνει, οπότε

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = \sigma + \tau.$$

Από τα παραπάνω και σε συνδυασμό με την άσκηση 4 προκύπτει ότι και

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sigma + \tau$$

κι επομένως η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει.

Π.χ. αν $a_n = (-1)^n/n,\ n = 1, 2, \ldots,$ τότε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει από το κριτήριο του Leibniz. Ταυτόχρονα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$$

και οι δύο παραπάνω σειρές αποκλίνουν (για τη δεύτερη μπορείτε να εφαρμ. κριτήριο οριακής σύγκρισης). $\square$

15. Δίνεται ακολουθία (a_n) με $a_n \geq 0,\ n \geq 1$. Εάν η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, να δείξετε ότι και η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ συγκλίνει. Εξετάστε αν εξακολουθεί να ισχύει το συμπέρασμα, χωρίς την υπόθεση "$a_n \geq 0,\ n \geq 1$".

Απόδειξη: Εφόσον η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, έχουμε ότι $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Από τον ορισμό του ορίου ακολουθίας και για $\varepsilon = 1$, υπάρχει $n_0 \geq 1$ ώστε

$$0 \leq a_n < \varepsilon = 1, \quad \forall n \geq n_0.$$

Τότε,

$$0 \leq a_n^2 < a_n, \quad \forall n \geq n_0,$$

οπότε και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ συγκλίνει, από το κριτήριο άμεσης σύγκρισης.

Αν παραλειφθεί η υπόθεση "$a_n \geq 0,\ n \geq 1$", το παραπάνω συμπέρασμα δεν ισχύει γενικά.

Π.χ. αν $a_n = (-1)^n/\sqrt{n},\ n = 1, 2, 3, \ldots,$ τότε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει από το κριτήριο του Leibniz, ενώ η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

αποκλίνει. $\square$