ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

2019-20

Κ. Παυλοπούλου

Αναγωγή πίνακα A=$\left(\alpha_{ij}\right) \in \mathbf{M}_{\mu\times\nu}$ σε ανηγμένο κλιμακωτό

Κάθε πίνακας A=$\left(\alpha_{ij}\right) \in \mathbf{M}_{\mu\times\nu}$ με διαδοχική εφαρμογή στοιχειωδών πράξεων γραμμών ανάγεται

αρχικά σε κλιμακωτό και

στη συνέχεια σε ανηγμένο κλιμακωτό.

Η διαδικασία αναγωγής είναι αλγοριθμική και περιγράφεται ως εξής:

ονομάζεται <u>αλγόριθμος Gauss-Jordan</u>

Παρατηρήσεις

- **Ο κλιμακωτός πίνακας που προκύπτει ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟΣ.**
- **Αλλά έχει πάντα τον ίδιο αριθμό μη μηδενικών γραμμών! (rank=βαθμός πίνακα)**
- **Ο ανηγμένος κλιμακωτός που προκύπτει με τον παρακάτω αλγόριθμό είναι ΜΟΝΑΔΙΚΟΣ.**

Διαδικασία:

A) κάνουμε το 1ο στοιχείο της 1ης μη μηδενικής στήλης διάφορο του μηδενός, με εναλλαγή γραμμών. Βασικό (pivot)

B) το στοιχείο α_{11} γίνεται ίσο με 1, εφαρμόζοντας:

$$\gamma_1 \rightarrow \left(1/\alpha_{11}\right) \cdot \gamma_1$$

Μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία της 1ης στήλης εκτός του βασικού.

$$\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - \alpha_{21} \cdot \gamma_1$$

$$\vdots$$

$$\gamma_\mu \rightarrow \gamma_\mu - \alpha_{\mu 1} \cdot \gamma_1$$

Γ) το στοιχείο α_{22} να γίνει ίσο με 1.

Αγνοώντας την 1η γραμμή και 1η στήλη που έχει προκύψει, και με επανάληψη της παραπάνω διαδικασίας κάνουμε το α_{22} να γίνει ίσο με 1 και όλα τα στοιχεία της 2ης στήλης που είναι κάτω από το α_{22} ίσα με 0. Συνεχίζουμε μέχρι ο A να γίνει κλιμακωτός με τα ηγετικά στοιχεία των γραμμών του ίσα με 1.

Σημ. ως εδώ τα 3 βήματα αποτελούν τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss.

Δ) με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών (βλ. Γ) μετατρέπουμε τα μη μηδενικά στοιχεία κάθε στήλης που περιέχει το ηγετικό στοιχείο 1 μιας γραμμής σε μηδενικά, αρχίζοντας από αυτήν που είναι δεξιότερα.

Σημ. Η πλήρης μέθοδος ονομάζεται η μέθοδος απαλοιφής των Gauss-Jordan.

Παράδειγμα

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{4} & -\mathbf{8} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{8} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & -\mathbf{5} \\ \mathbf{3} & \mathbf{8} & \mathbf{0} & -\mathbf{7} \end{bmatrix} \rightarrow \ \ldots . \rightarrow \ \mathbf{I_4}\ ,$

κάνοντας τις γραμμοπράξεις που ακολουθούν.

- **A)** $\gamma_1 \leftrightarrow \gamma_3$
- Β) $\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - 2\gamma_1$, $\gamma_4 \rightarrow \gamma_4 - 3\gamma_1$
- Γ) $\gamma_3 \rightarrow \frac{1}{4} \cdot \gamma_3$, $\gamma_2 \leftrightarrow \gamma_3$
- Δ) $\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 - 4\gamma_2$, $\gamma_4 \rightarrow \gamma_4 - 8\gamma_2$
- Ε) $\gamma_3 \leftrightarrow \gamma_4$, $\gamma_3 \rightarrow \frac{1}{10} \cdot \gamma_3$
- Στ) $\gamma_4 \rightarrow \gamma_4 - 10\gamma_3$, $\gamma_4 \rightarrow \frac{1}{14} \cdot \gamma_4$
- Ζ) $\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - \gamma_4$, $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 + 5\gamma_4$
- Η) $\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 + 2\gamma_3$, $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 - 2\gamma_3$