ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Ασκηση 1. Έστω $a > 0$. Θεωρούμε τυχόν $x_1 > 0$ και για κάθε $n \geq 1$ ορίζουμε

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Αποδείξτε ότι η (x_n), τουλάχιστον από τον δεύτερο όρο της και πέρα, είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από τον $\sqrt{a}$. Βρείτε το $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Υπόδειξη: Αποδείξτε διαδοχικά τα εξής:

1. Η (x_n) ορίζεται καλά. Αρκεί να δείξετε ότι $x_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε με επαγωγή ότι $x_n > 0$ για κάθε n.

2. Για κάθε $n \geq 2$ ισχύει $x_n \geq \sqrt{a}$ (δεν χρειάζεται επαγωγή). Παρατηρήστε ότι

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}$$

   για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

3. Για κάθε $n \geq 2$ ισχύει $x_n \geq x_{n+1}$ (πάλι, δεν χρειάζεται επαγωγή). Παρατηρήστε ότι

$$x_n - x_{n+1} = \frac{x_n^2 - a}{2x_n} \geq 0$$

   για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από το Βήμα 2.

Αφού η $(x_n)_{n\geq 2}$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, συγκλίνει. Το όριο x είναι θετικό (από τα προηγούμενα έχουμε $x \geq \sqrt{a}$) και πρέπει να ικανοποιεί την $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$, δηλαδή $x^2 = a$. Συνεπώς, $x = \sqrt{a}$. □

Ασκηση 2. Έστω $0 < a_1 < b_1$. Ορίζουμε αναδρομικά δύο ακολουθίες θέτοντας

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{και} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

(α) Αποδείξτε ότι η (a_n) είναι αύξουσα και η (b_n) φθίνουσα.
(β) Αποδείξτε ότι οι (a_n), (b_n) συγκλίνουν και έχουν το ίδιο όριο.

Υπόδειξη: Αποδείξτε διαδοχικά τα εξής:

1. $\alpha_n > 0$ και $\beta_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

2. $\alpha_n \leq \beta_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από τον αναδρομικό ορισμό (ανεξάρτητα μάλιστα από το ποιοί είναι οι α_n και β_n) έχετε

$$\alpha_{n+1} = \sqrt{\alpha_n \beta_n} \leq \frac{\alpha_n + \beta_n}{2} = \beta_{n+1}.$$

3. Η (α_n) είναι αύξουσα. Παρατηρήστε ότι $\alpha_{n+1} = \sqrt{\alpha_n \beta_n} \geq \sqrt{\alpha_n^2} = \alpha_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

4. Η (β_n) είναι φθίνουσα. Παρατηρήστε ότι $\beta_{n+1} = \frac{\alpha_n + \beta_n}{2} \leq \frac{2\beta_n}{2} = \beta_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Από τα παραπάνω, η (α_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από τον β_1, ενώ η (β_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από τον α_1 (εξηγήστε γιατί). Επομένως, υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\alpha_n \to \alpha$ και $\beta_n \to \beta$. Από την $\beta_{n+1} = \frac{\alpha_n + \beta_n}{2}$ έπεται ότι $\beta = \frac{\alpha + \beta}{2}$, δηλαδή $\alpha = \beta$. □

Ασκηση 3. Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}, \quad b_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n, \quad c_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

και

$$d_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad e_n = \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^n.$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$. Για παράδειγμα,

(α) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = x_{n-1} \to e$.

(β) $b_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{n+1}{n+2} x_{n+1} x_n \to e^2$.

(γ) $\frac{1}{c_n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \frac{n}{n-1} x_{n-1} \to e$, άρα $c_n \to \frac{1}{e}$.

(δ) $d_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e} \cdot e = 1$.

(ε) $e_n^3 = \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{3n} \to e^2$ (γιατί;), άρα $e_n \to \sqrt[3]{e^2}$. □

Ασκηση 4. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακολουθίες:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \quad \text{και} \quad b_n = \frac{1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n}{n^n}.$$

Υπόδειξη: (α) Παρατηρήστε ότι

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Αφού $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$, συμπεραίνουμε ότι $\alpha_n \to 1$.

(β) Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n \leq 1 + n^2 + n^3 + \cdots + n^n \leq 1 + n + n^2 + n^3 + \cdots + n^n.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ για $x = n$, παίρνουμε

$$1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n \leq 1 + n + n^2 + \cdots + n^n = \frac{n^{n+1}-1}{n-1}.$$

Συνεπώς,

$$\beta_n = \frac{1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n}{n^n} \leq \frac{n^{n+1}-1}{n^n(n-1)} = \frac{n^{n+1}-1}{n^{n+1}-n^n} = \frac{1 - \frac{1}{n^{n+1}}}{1 - \frac{1}{n}}.$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\beta_n = \frac{1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n}{n^n} \geq \frac{n^n}{n^n} = 1.$$

Δηλαδή,

$$1 \leq \beta_n \leq \frac{1 - \frac{1}{n^{n+1}}}{1 - \frac{1}{n}}.$$

Από το κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι $\beta_n \to 1$. □

Ασκηση 5. (α) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε μια δεύτερη ακολουθία (b_n) θέτοντας $b_n = \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$. Αποδείξτε ότι: αν $a_n \to a$ τότε $b_n \to a$. Ισχύει το αντίστροφο;
(β) Αποδείξτε ότι: αν $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_n \to a > 0$ τότε

$$\gamma_n := \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \to a \quad \text{και} \quad \delta_n := \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \to a.$$

Υπόδειξη: (α) Κάνουμε πρώτα την επιπλέον υπόθεση ότι $a = 0$ και δείχνουμε ότι $b_n \to 0$. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $n \geq n_1$ ισχύει $|a_n| < \varepsilon/2$. Τότε, για κάθε $n > n_1$ έχουμε

$$|b_n| \leq \frac{|a_1 + \cdots + a_{n_1}|}{n} + \frac{|a_{n_1+1}| + \cdots + |a_n|}{n} \leq \frac{|a_1 + \cdots + a_{n_1}|}{n} + \frac{n - n_1}{n}\frac{\varepsilon}{2} < \frac{|a_1 + \cdots + a_{n_1}|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ο αριθμός $A := |a_1 + \cdots + a_{n_1}|$ εξαρτάται από το ε (αφού ο n_1 εξαρτάται από το ε) όχι όμως από το n. Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα, υπάρχει $n_2(A) = n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $n \geq n_2$ έχουμε

$$\frac{|a_1 + \cdots + a_{n_1}|}{n} = \frac{A}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αν λοιπόν πάρουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ τότε, για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει η

$$|b_n| \leq \frac{A}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Με βάση τον ορισμό, $b_n \to 0$.

Για τη γενική περίπτωση, θεωρήστε την ακολουθία $a'_n := a_n - a$. Τότε, $a'_n \to 0$. Συνεπώς,

$$b_n - a = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - a = \frac{(a_1 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} = \frac{a'_1 + \cdots + a'_n}{n} \to 0.$$

Έπεται ότι $b_n \to a$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει: αν $a_n = (-1)^{n-1}$ τότε $b_n = \frac{1}{n}$ αν ο n είναι περιττός και $b_n = 0$ αν ο n είναι άρτιος, άρα $b_n \to 0$ (εξηγήστε αυτούς τους ισχυρισμούς). Όμως, η (a_n) δεν συγκλίνει.
(β) Αφού $\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$, το (α) δείχνει ότι

$$\frac{1}{\gamma_n} = \frac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} \to \frac{1}{a}.$$

Αρα, $\gamma_n \to a$. Για την δ_n, παρατηρήστε ότι $\gamma_n \leq \delta_n \leq b_n$ από την ανισότητα αρμονικού-γεωμετρικού-αριθμητικού μέσου, και αφού $\lim \gamma_n = \lim b_n = a$ το ζητούμενο έπεται από το κριτήριο παρεμβολής. □

Ασκηση 6. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι: αν $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a$ τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$. Ισχύει το αντίστροφο;

Υπόδειξη: Γράφουμε

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{a_1 \frac{a_2}{a_1} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n},$$

όπου $b_1 = a_1$ και $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, $n = 2, 3, \ldots$. Από την υπόθεση έχουμε $b_n \to a$.

- Αν $a > 0$ τότε από την Άσκηση 5 η ακολουθία των γεωμετρικών μέσων της (b_n) συγκλίνει στον a. Δηλαδή, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.
- Αν $a = 0$ τότε από την ανισότητα αριθμητικού γεωμετρικού μέσου και την Άσκηση 5 (α) έχουμε ότι

$$0 \leq \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n} \leq \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} \to 0$$

  και από το κριτήριο παρεμβολής βλέπουμε ότι $\sqrt[n]{a_n} \to 0$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει: αν $a_n = 2$ για n άρτιο και $a_n = 1$ για n περιττό, ελέγξτε ότι $\sqrt[n]{a_n} \to 1$ αλλά η ακολουθία $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ δεν συγκλίνει. $\square$

Ασκηση 7. (α) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι $a_n \to a$ αν και μόνο αν οι υπακολουθίες (a_{2n}) και (a_{2n-1}) συγκλίνουν στο a.

(β) Έστω (a_n) μια ακολουθία. Υποθέτουμε ότι οι υπακολουθίες (a_{2n}), (a_{2n-1}) και (a_{3n}) συγκλίνουν. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} a_{3n}$. Συμπεράνατε από αυτό ότι η (a_n) συγκλίνει.

Υπόδειξη: (α) Υποθέτουμε ότι οι υπακολουθίες (a_{2k}) και (a_{2k-1}) συγκλίνουν στον a.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $k \geq n_1$ ισχύει $|a_{2k} - a| < \varepsilon$. Επίσης, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $k \geq n_2$ ισχύει $|a_{2k-1} - a| < \varepsilon$. Αν θέσουμε $n_0 = \max\{2n_1, 2n_2 - 1\}$ τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|a_n - a| < \varepsilon$.

[Πράγματι, παρατηρήστε ότι αν ο n είναι άρτιος τότε $n = 2k$ για κάποιον $k \geq n_1$ ενώ αν ο n είναι περιττός τότε $n = 2k - 1$ για κάποιον $k \geq n_2$.]

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $a_n \to a$.

Το αντίστροφο είναι απλό: έχουμε δει ότι αν μια ακολουθία (a_n) συγκλίνει στον $a \in \mathbb{R}$ τότε κάθε υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) συγκλίνει στον a.

(β) Ας υποθέσουμε ότι $a_{2k} \to x$, $a_{2k-1} \to y$ και $a_{3k} \to z$. Παρατηρήστε ότι:

(i) Η (a_{6k}) είναι ταυτόχρονα υπακολουθία της (a_{2k}) και υπακολουθία της (a_{3k}). Άρα, η (a_{6k}) συγκλίνει και $x = \lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} a_{6k} = \lim_{k\to\infty} a_{3k} = z$.

(ii) Η (a_{6k-3}) είναι ταυτόχρονα υπακολουθία της (a_{2k-1}) και υπακολουθία της (a_{3k}). Άρα, η (a_{6k-3}) συγκλίνει και $y = \lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} a_{6k-3} = \lim_{k\to\infty} a_{3k} = z$.

Έπεται ότι $x = y = z$. Αφού οι (a_{2k}) και (a_{2k-1}) έχουν το ίδιο όριο, από το (α) συμπεραίνουμε ότι η (a_n) συγκλίνει. $\square$