Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωσης (2024–25)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 2

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 24 Νοεμβρίου 2024)

1. Έστω X ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο. Ορίζουμε $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ με $\varphi(A) = 0$ αν το $A \subseteq X$ είναι αριθμήσιμο και $\varphi(A) = 1$ αν το $A \subseteq X$ είναι υπεραριθμήσιμο. Αποδείξτε ότι το φ είναι εξωτερικό μέτρο και προσδιορίστε την σ-άλγεβρα των $\mathcal{M}_\varphi$ των φ-μετρήσιμων υποσυνόλων του X.

2. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει εξωτερικό μέτρο φ στο $\mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε

$$\varphi(\{q \in \mathbb{Q} : a \leqslant q \leqslant b\}) = b - a$$

για κάθε $a, b \in \mathbb{Q}$ με $a < b$.

3. Έστω φ εξωτερικό μέτρο στο μη κενό σύνολο X. Αποδείξτε ότι αν $E \in \mathcal{M}_\varphi$ τότε για κάθε $F \subseteq X$ ισχύει ότι

$$\varphi(E) + \varphi(F) = \varphi(E \cup F) + \varphi(E \cap F).$$

4. Έστω φ εξωτερικό μέτρο στο μη κενό σύνολο X και $A \subseteq C \subseteq X$. Αποδείξτε ότι αν $B \in \mathcal{M}_\varphi$ και ισχύουν οι $A \subseteq B$ και $\varphi(A) = \varphi(B)$ τότε $\varphi(C) = \varphi(B \cup C)$.

5. (α) Έστω $B \subseteq \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $B \subseteq E$ και $\lambda^*(E \setminus B) < \varepsilon$. Αποδείξτε ότι το B είναι Lebesgue μετρήσιμο.
(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(A) < +\infty$. Αν $B \subseteq A$ και

$$\lambda^*(B) + \lambda^*(A \setminus B) = \lambda(A)$$

αποδείξτε ότι το B είναι Lebesgue μετρήσιμο.
(γ) Έστω $B \subseteq \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το B είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$\lambda^*((-n,n) \cap B) + \lambda^*((-n,n) \setminus B) = 2n.$$

6. Έστω E το σύνολο των $x \in [0,1]$ που το δεκαδικό τους ανάπτυγμα περιέχει άπειρες φορές την τετράδα ψηφίων 2024 με αυτή τη σειρά. Αποδείξτε ότι το E είναι μετρήσιμο και υπολογίστε το μέτρο του.

7. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in A$, $x \neq y$, τέτοια ώστε $\dfrac{x+y}{2} \in A$.

8. Αποδείξτε ότι υπάρχει διαμέριση $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ του $[0,1]$ και ακολουθία (x_n) πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $\mathbb{R} = \displaystyle\bigcup_{n=1}^\infty (x_n + A_n)$, όπου $x_n + A_n$ είναι η μεταφορά του A_n κατά x_n.

9. Έστω C το σύνολο Cantor και $f : [0,1] \to [0,1]$ η συνάρτηση Cantor-Lebesgue.

(α) Είναι το $C \cap \mathbb{Q}$ πυκνό στο C;

(β) Αποδείξτε ότι $C + C = [0,2]$, δηλαδή κάθε $x \in [0,2]$ γράφεται ως άθροισμα $x = t + s$ δύο αριθμών $t, s \in C$.

(γ) Αποδείξτε ότι αν ο $q \in [0,1]$ είναι ρητός τότε $f(q) \in \mathbb{Q}$.

(δ) Αποδείξτε ότι αν $x \in C$ και $f(x) \in \mathbb{Q}$ τότε $x \in \mathbb{Q}$.

(ε) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα Riemann $\int_0^1 f(x)\,dx$.

10. Για A, B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ ορίζουμε $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

(α) Έστω A, B μη κενά Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε το $A + B$ να είναι Lebesgue μετρήσιμο. Αποδείξτε ότι $\lambda(A + B) \geqslant \lambda(A) + \lambda(B)$.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχουν μη κενά $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = \lambda(B) = 0$ τέτοια ώστε $A + B = \mathbb{R}$.

Ερώτηση (όχι για παράδοση): Έστω A, B μη κενά Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Είναι απαραίτητα σωστό ότι το $A + B$ είναι Lebesgue μετρήσιμο;