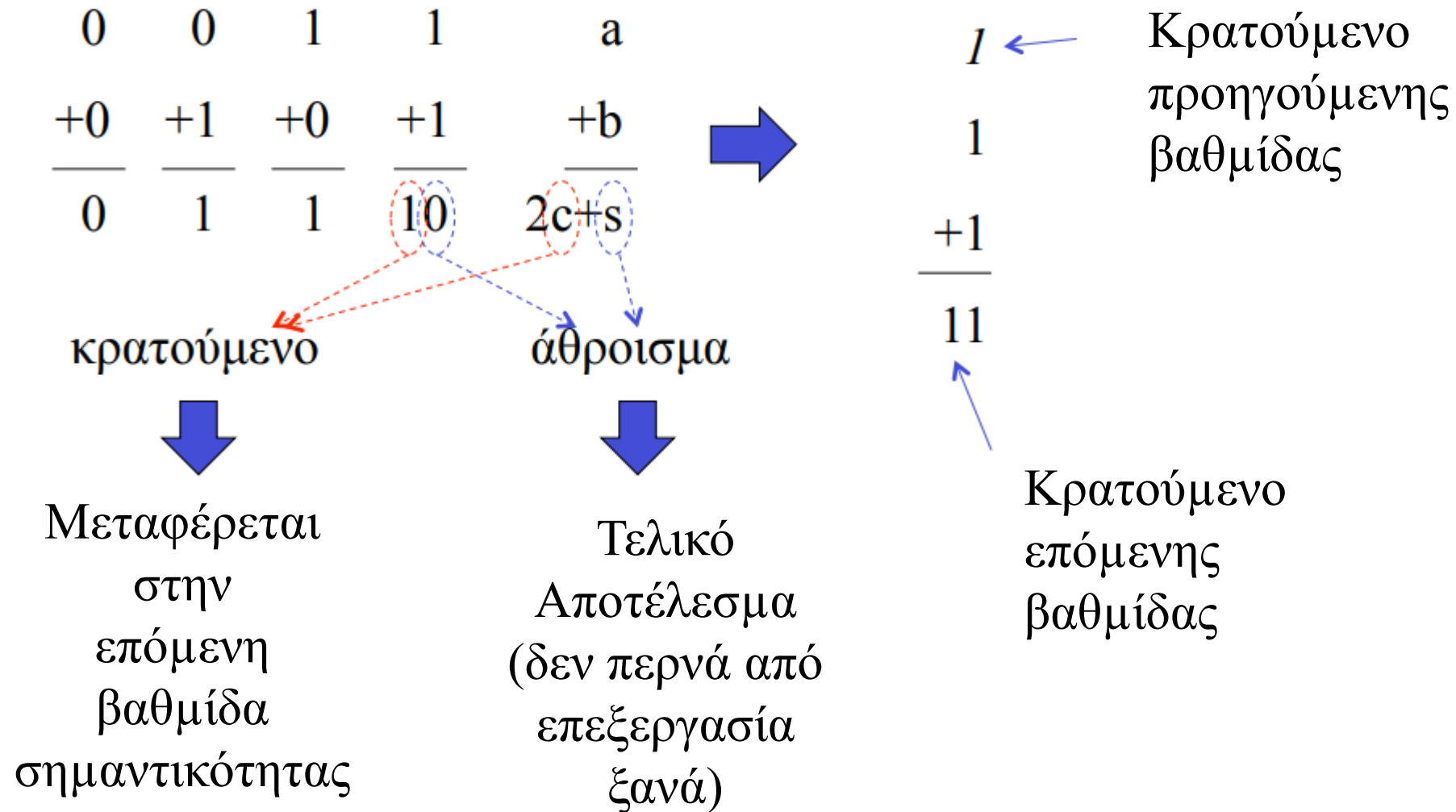


Σύνθετα Αριθμητικά Κυκλώματα

Άθροιση



Ημι-Αθροιστής (Half Adder)

1. Καθορισμός προβλήματος: κύκλωμα που να προσθέτει δύο δυαδικά ψηφία.
2. Πλήθος εισόδων/εξόδων: 2 είσοδοι – 2 έξοδοι.
3. Ονομασία εισόδων/εξόδων: έστω x , y οι δύο είσοδοι (προσθετέοι) και C (κρατούμενο), S (άθροισμα) οι δύο έξοδοι.

4. Πίνακας αλήθειας:

x	y	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

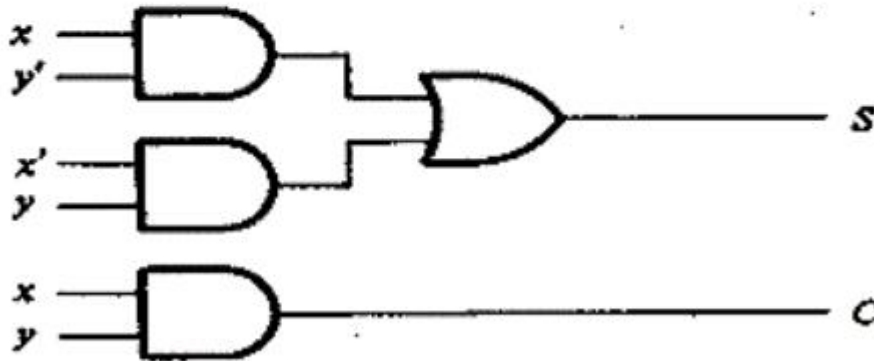
Ημι-Αθροιστής

x	y	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

(α)

$$S = x'y + xy'$$

$$C = xy$$



(α) $S = xy' + x'y$
 $C = xy$

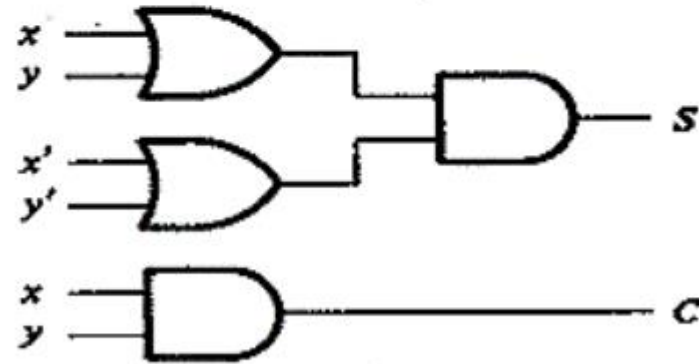
(β)

$$S' = xy + x'y'$$

$$S'' = S = (xy + x'y')' =$$

$$(x' + y')(x + y)$$

$$C = xy$$



(β) $S = (x + y)(x' + y')$
 $C = xy$

Ημι-Αθροιστής

x	y	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

(γ)

$$S'' = S = (xy + x'y')'$$

$$S = (C + x'y')'$$

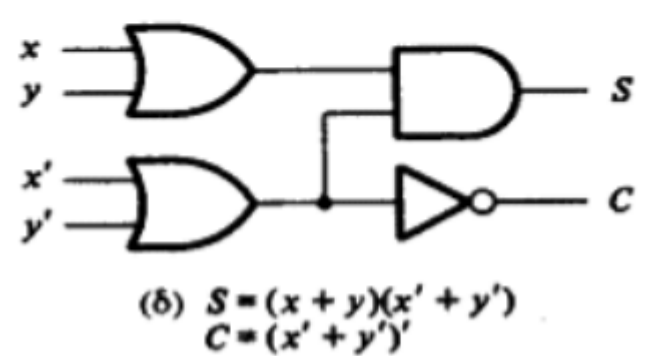
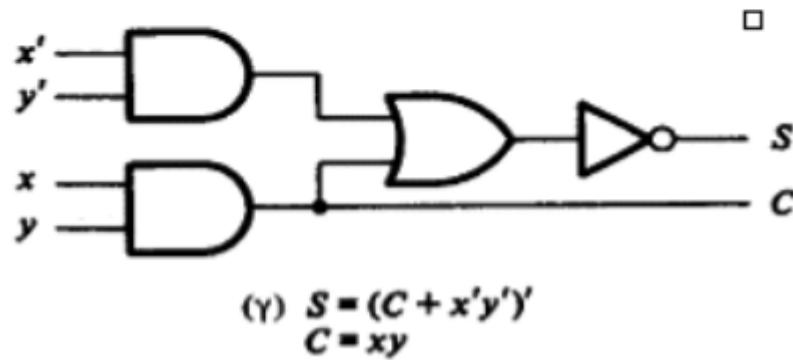
$$C = xy$$

(δ)

$$C = (xy)'' = (x' + y)'$$

$$S = (C + x'y')'$$

$$S = C'(x + y) = (x' + y')(x + y)$$



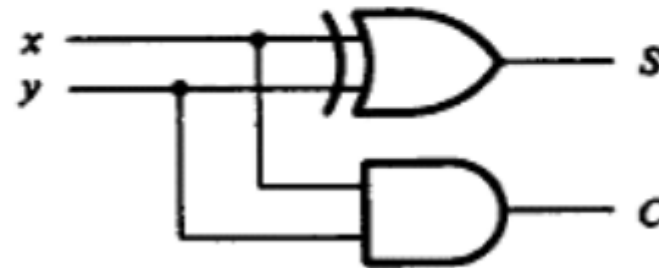
Ημι-Αθροιστής

x	y	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

(ε)

$$S = x \oplus y$$

$$C = xy$$



(ε) $S = x \oplus y$
 $C = xy$

Πλήρης Αθροιστής (Full Adder)

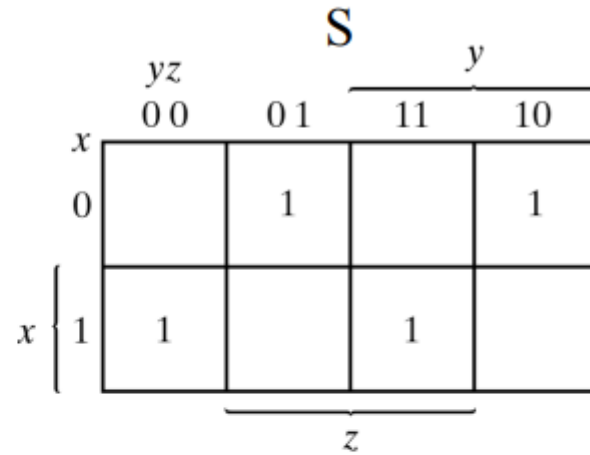
1. Καθορισμός προβλήματος: κύκλωμα που να προσθέτει τρία δυαδικά ψηφία.
2. Πλήθος εισόδων/εξόδων: 3 είσοδοι – 2 έξοδοι.
3. Ονομασία εισόδων/εξόδων: έστω x, y οι δύο είσοδοι (προσθετέοι), z το κρατούμενο της προηγούμενης βαθμίδας και C (κρατούμενο), S (άθροισμα) οι δύο έξοδοι.

4. Πίνακας αλήθειας:

x	y	z	C	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Πλήρης-Αθροιστής

x	y	z	C	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

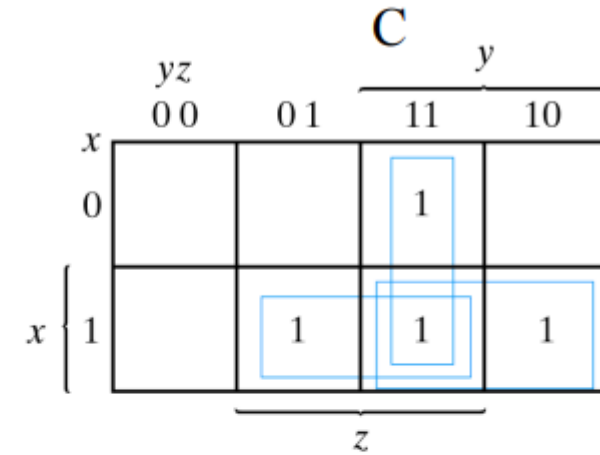


$$S = x'y'z + x'yz' + xy'z' + xyz \Rightarrow$$

$$S = (x'y' + xy)z + (x'y + xy')z' \Rightarrow$$

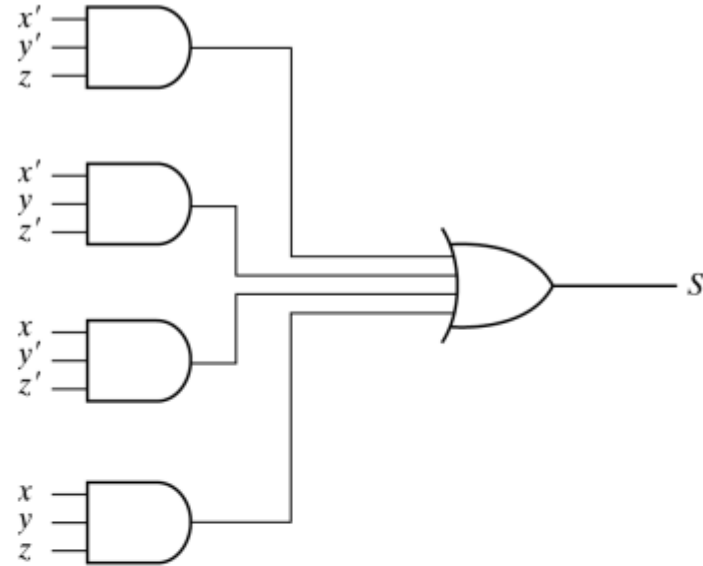
$$S = (x \oplus y)'z + (x \oplus y)z' \Rightarrow$$

$$S = x \oplus y \oplus z$$

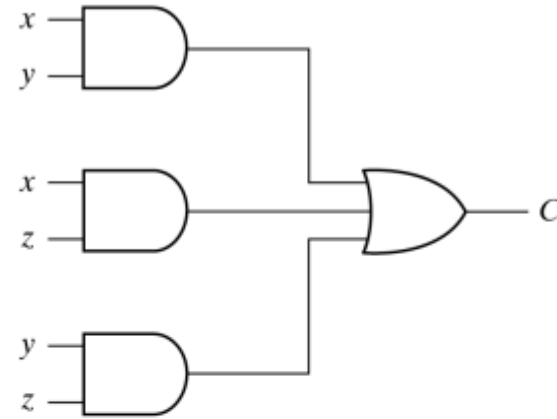


$$C = xy + yz + xz$$

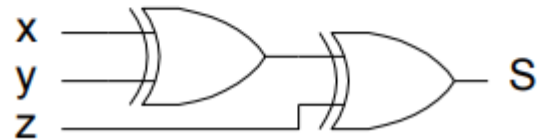
Πλήρης-Αθροιστής



$$S = x'y'z + x'yz' + xy'z' + xyz$$



$$C = xy + yz + xz$$



$$S = x \oplus y \oplus z$$

Πλήρης-Αθροιστής

Ένας πλήρης αθροιστής μπορεί να υλοποιηθεί με δύο ημιαθροιστές και μία πύλη Η

$$S = x \oplus y \oplus z \quad C = xy + yz + xz$$

Οι συναρτήσεις που υλοποιεί ο ημιαθροιστής HA_1 είναι εξ ορισμού:

$$S_1 = x \oplus y \quad C_1 = xy \quad (HA_1 \text{ με εισόδους } x, y, \text{ εξόδους } S_1, C_1)$$

Το γενικό άθροισμα πρέπει να είναι $S = x \oplus y \oplus z = \underline{S_1} \oplus z$

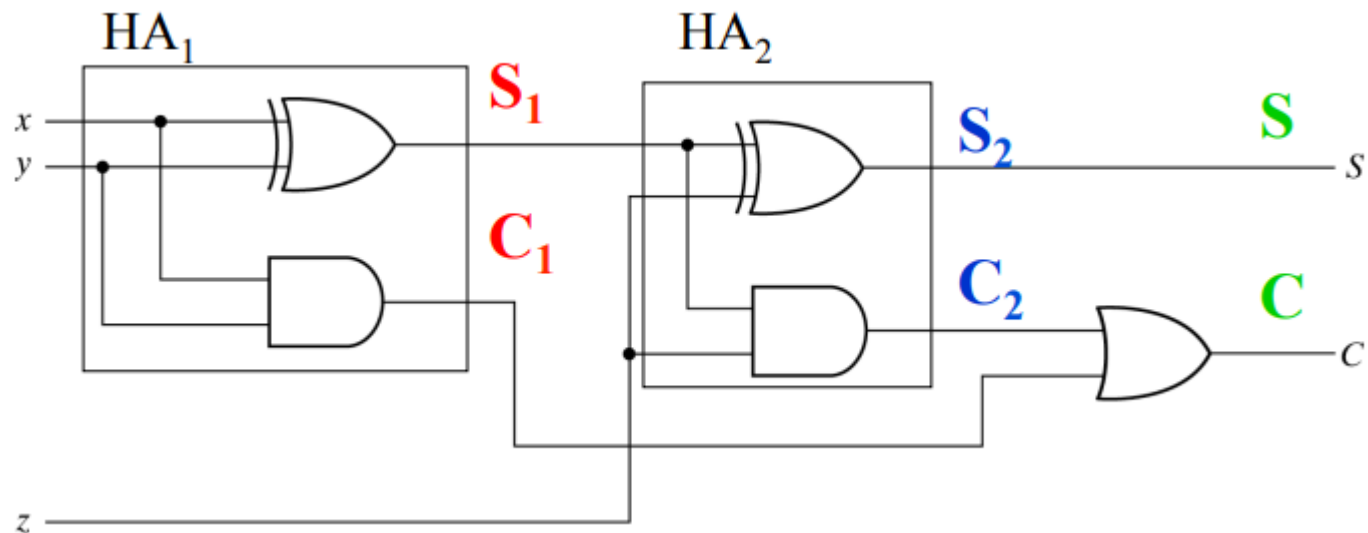
Το γενικό κρατούμενο πρέπει να είναι

$$\begin{aligned} C &= xy + yz + xz = xy + (x + x')yz + x(y + y')z = xy + xyz + x'yz + xyz + xy'z = \\ &= xy + xyz + (x'yz + xy'z) + xyz = xy + xyz + (x \oplus y)z = xy(1 + z) + (x \oplus y)z = \\ &= xy + (x \oplus y)z = C_1 + \underline{S_1}z. \end{aligned}$$

Πλήρης-Αθροιστής

$$\begin{array}{c|c|c} \mathbf{S_1 = x \oplus y} & \mathbf{S_2 = S_1 \oplus z} & \mathbf{S = S_2} \\ \mathbf{C_1 = xy} & \mathbf{C_2 = S_1 z} & \mathbf{C = C_1 + C_2} \end{array}$$

Αν ο 2ος ημιαθροιστής έχει εισόδους S_1 , z , και εξόδους S_2 , C_2 τότε το S_2 είναι το γενικό άθροισμα αφού $S_2 = S_1 \oplus z = S$, ενώ το κρατούμενο του είναι $C_2 = S_1 z$ οπότε το γενικό κρατούμενο γίνεται $C = C_1 + C_2$ (HA2 με εισόδους S_1, z , εξόδους S_2, C_2)

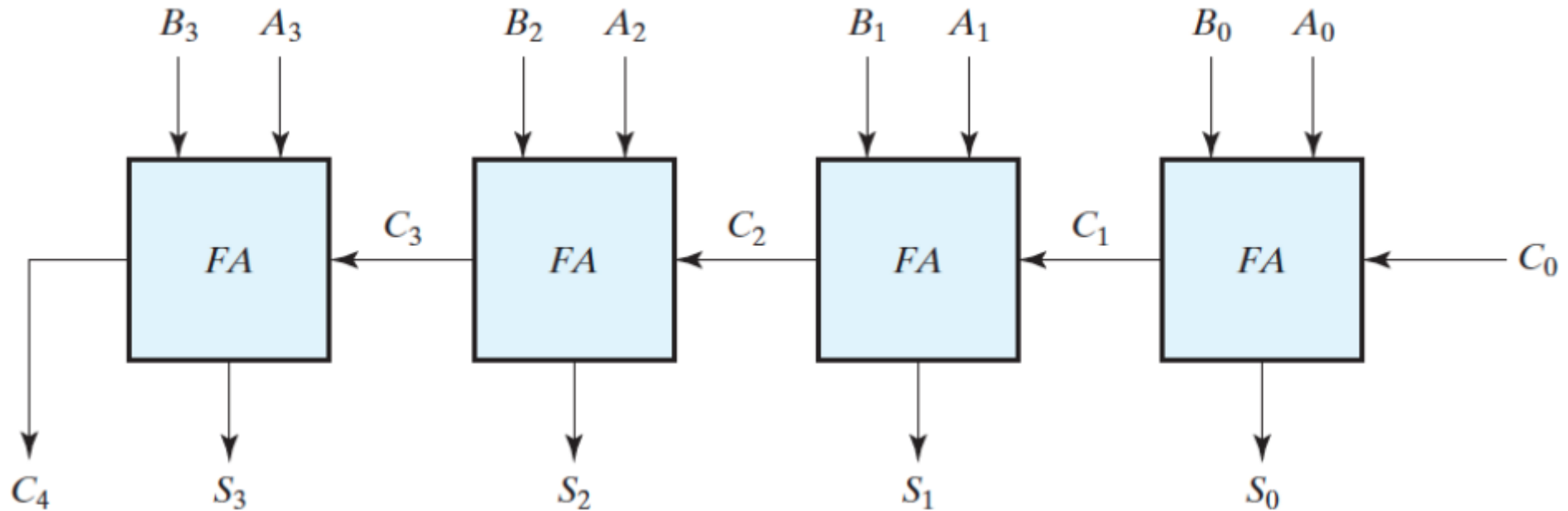


Δυαδικός Αθροιστής

Δείκτης i	4	3	2	1	
Κρατούμενο εισόδου	0	1	1	0	C_i
Προσθετέος	1	0	1	1	A_i
Προσθετέος	0	0	1	1	B_i
Άθροισμα	1	1	1	0	S_i
Κρατούμενο εξόδου	0	0	1	1	C_{i+1}

Το άθροισμα δύο δυαδικών αριθμών των n bits μπορεί να παραχθεί είτε σειριακά είτε παράλληλα.

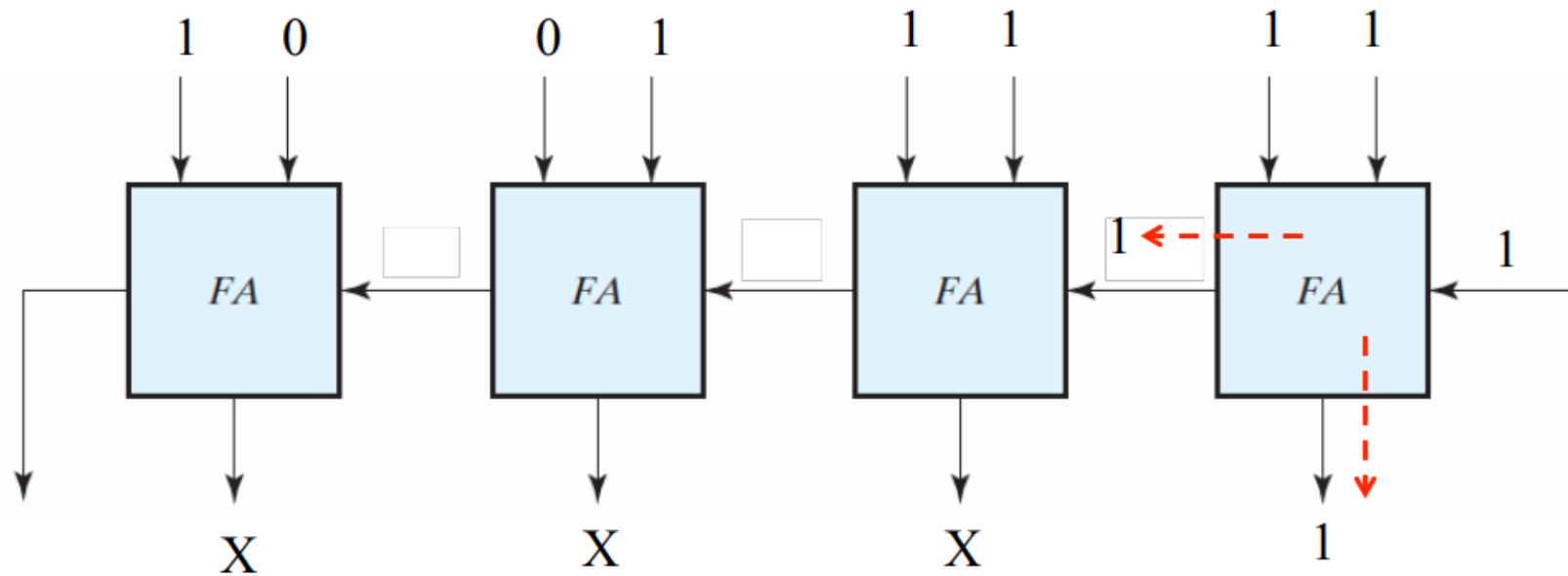
Παράλληλος Δυαδικός Αθροιστής



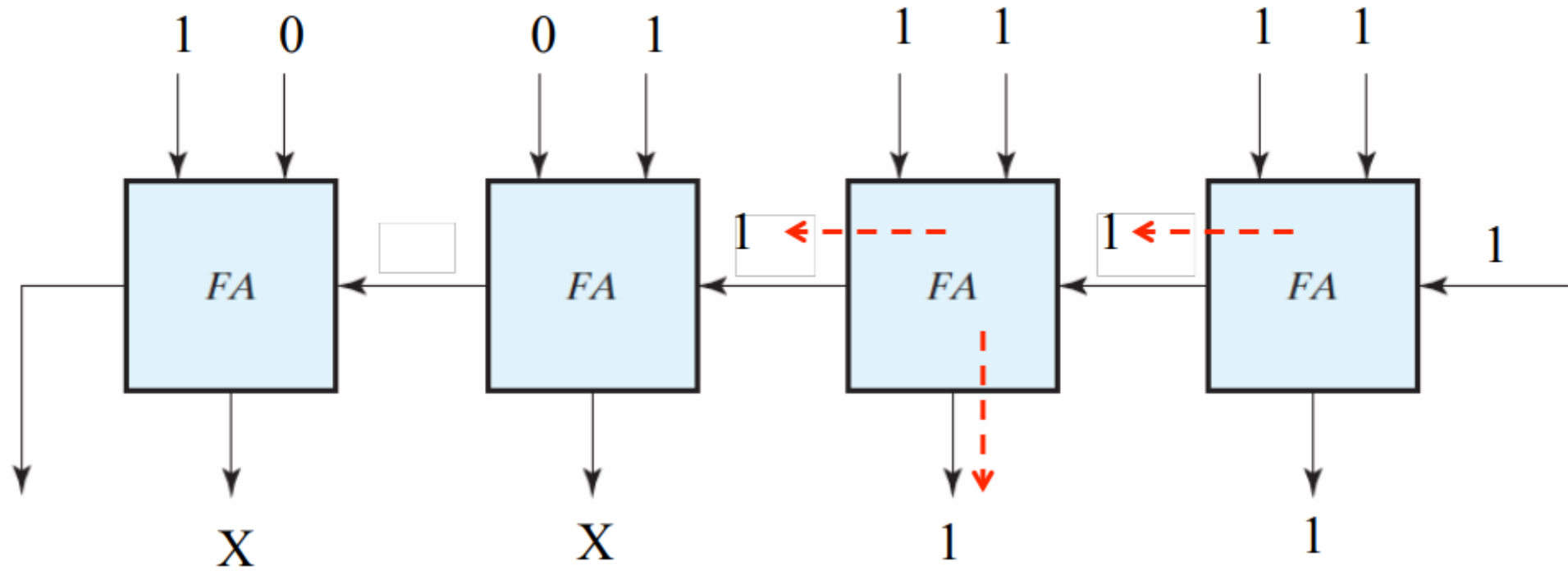
Ο Παράλληλος Αθροιστής αποτελείται από η πλήρεις αθροιστές και παράγει το αποτέλεσμα σε 1 κύκλο ρολογιού.

Υλοποίηση με συναρτήσεις: Πίνακας αλήθειας με 9 εισόδους και $2^9=512$ καταστάσεις.

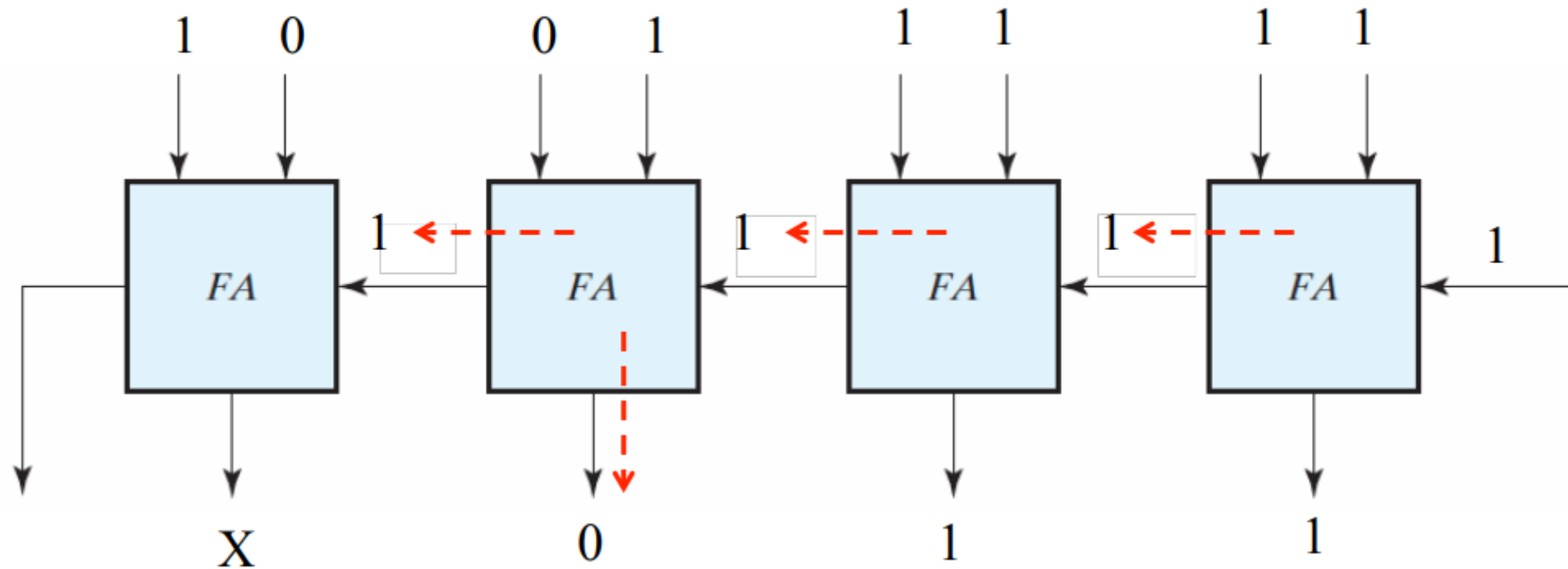
Παράδειγμα



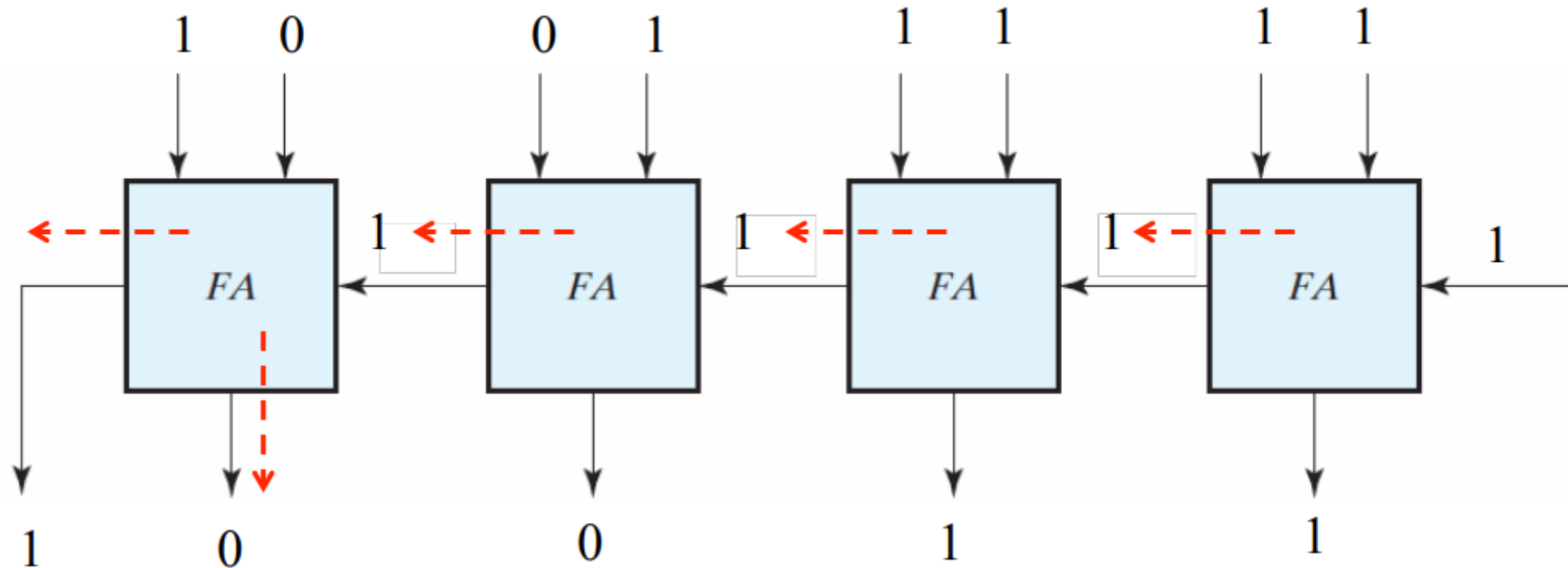
Παράδειγμα



Παράδειγμα

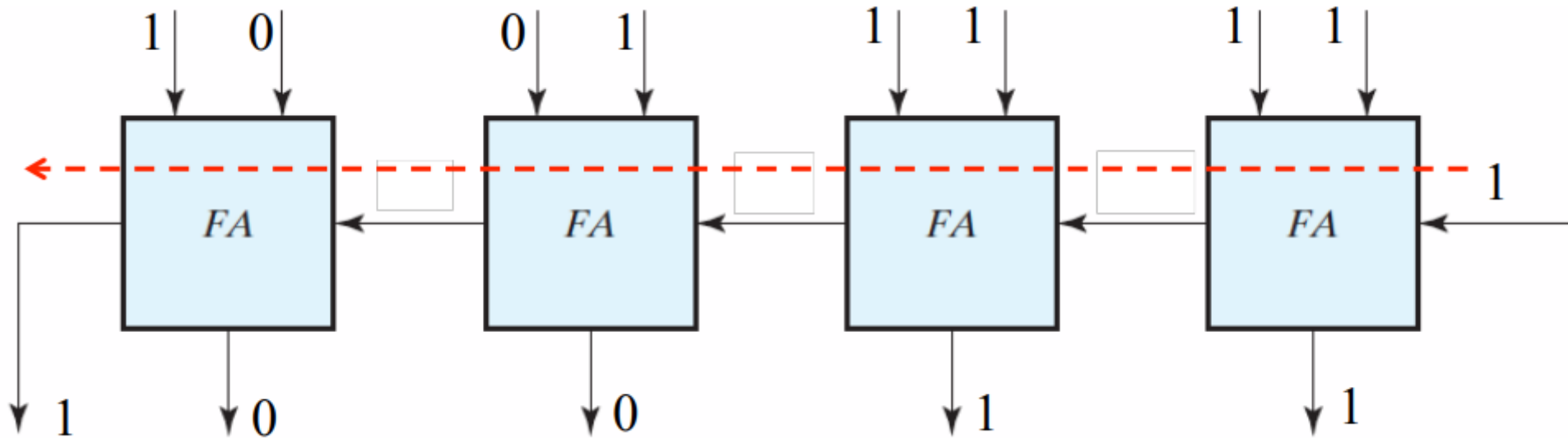


Παράδειγμα



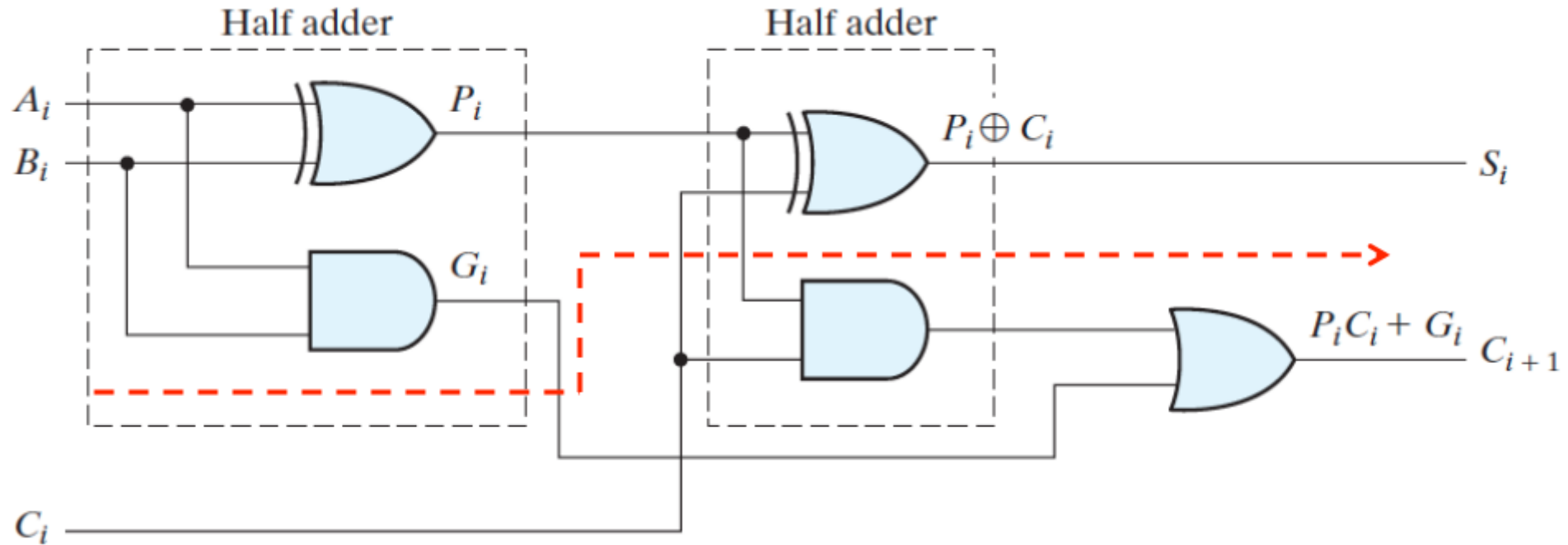
Διάδοση Κρατουμένου

Η διάδοση του κρατουμένου έχει καθυστέρηση η οποία αυξάνει με την αύξηση των βαθμίδων



Χρόνος Διάδοσης: Επίπεδα Πυλών × Καθυστέρηση Πύλης

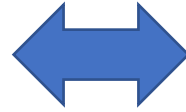
Διάδοση Κρατουμένου



- 2 επίπεδα πυλών για κάθε διάδοση κρατουμένου.
- $2 \times n$ επίπεδα για τον παράλληλο αθροιστή n bits.

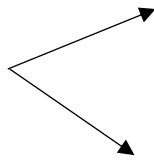
Διάδοση Κρατουμένου

Ο χρόνος διάδοσης κρατουμένου είναι πολύ μεγάλος.



Η πρόσθεση είναι η συχνότερη πράξη.

Μείωση χρόνου διάδοσης κρατουμένου.



Χρήση γρηγορότερων πυλών (άνω όριο).

Αύξηση πολυπλοκότητας κυκλώματος (πρόβλεψη κρατουμένου).

Χρειαζόμαστε γρήγορους αθροιστές

Πρόβλεψη Κρατούμενου (Carry Look-Ahead)

a_i	b_i	c_i	c_{i+1}	s_i		
0	0	0	0	0	Διαγραφή	$d = a_i \cdot b_i$
0	0	1	0	1		
0	1	0	0	1	Διάδοση	$p = a_i \oplus b_i$
0	1	1	1	0		
1	0	0	0	1		
1	0	1	1	0		
1	1	0	1	0	Παραγωγή	$g = a_i \cdot b_i$
1	1	1	1	1		

$$c_{i+1} = a_i b_i + c_i (a_i \oplus b_i)$$

$$c_{i+1} = g_i + p_i c_i \quad s_i = p_i \oplus c_i$$

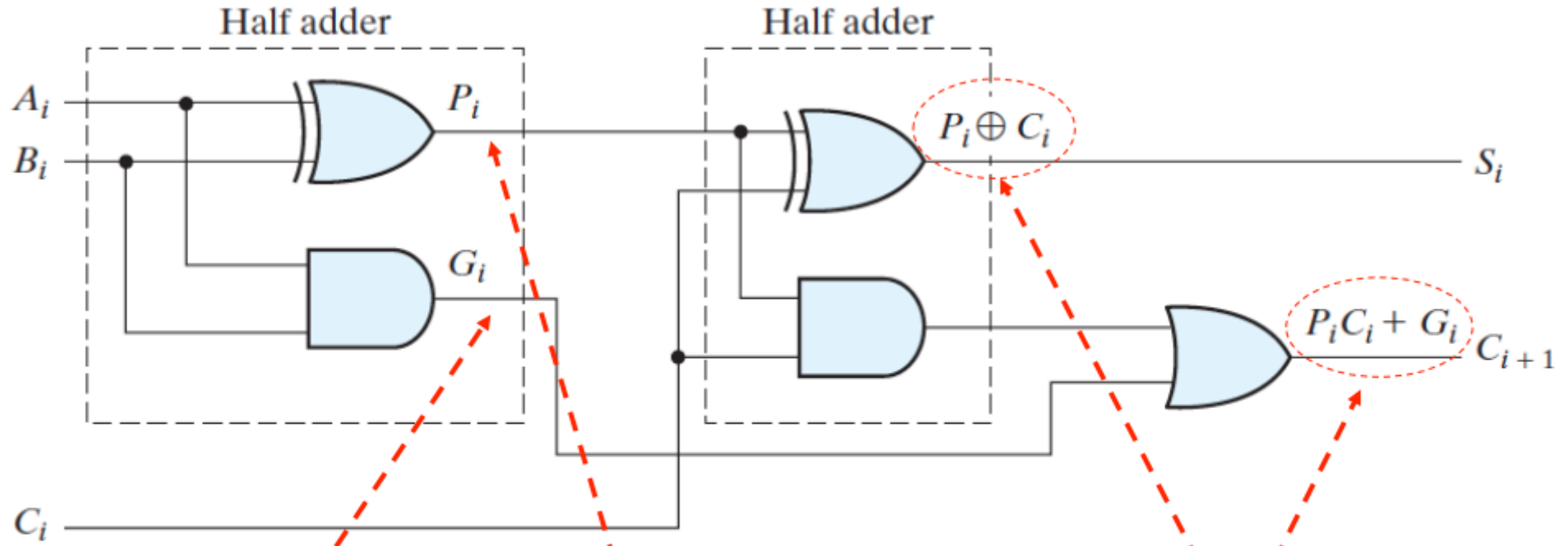
Παρατήρηση:

Όταν $a_i = b_i$ τότε $p = 0$ και το κρατούμενο είτε διαγράφεται είτε παράγεται



Δεν χρειάζεται αναμονή για το προηγούμενο κρατούμενο

Πρόβλεψη Κρατουμένου (Carry Look-Ahead)



$G_i = A_i B_i$
↓
Γεννητής
Κρατουμένου

$P_i = A_i \oplus B_i$
↓
Διαδοτής
Κρατουμένου

Άθροισμα και
κρατούμενο παράγονται
από τα P, G και το
προηγούμενο κρατούμενο

Πρόβλεψη Κρατουμένου (Carry Look-Ahead)

$$C_2 = G_1 + P_1 C_1$$

$$C_3 = G_2 + P_2 C_2 = G_2 + P_2(G_1 + P_1 C_1) = G_2 + P_2 G_1 + P_2 P_1 C_1$$

$$C_4 = G_3 + P_3 C_3 = \dots = G_3 + P_3 G_2 + P_3 P_2 G_1 + P_3 P_2 P_1 C_1$$



Η αναδρομικότητα
εισάγει την καθυστέρηση
και την αναμονή των
κρατουμένων



Χωρίς αναδρομικότητα
έχουμε περισσότερο υλικό
αλλά δεν υπάρχει αναμονή
κρατουμένου

Πρόβλεψη Κρατουμένου (Carry Look-Ahead)

$$C_3 = G_2 + P_2 G_1 + P_2 P_1 G_0 + P_2 P_1 P_0 C_0$$

Παραγωγή
κρατουμένου στην
βαθμ. 2

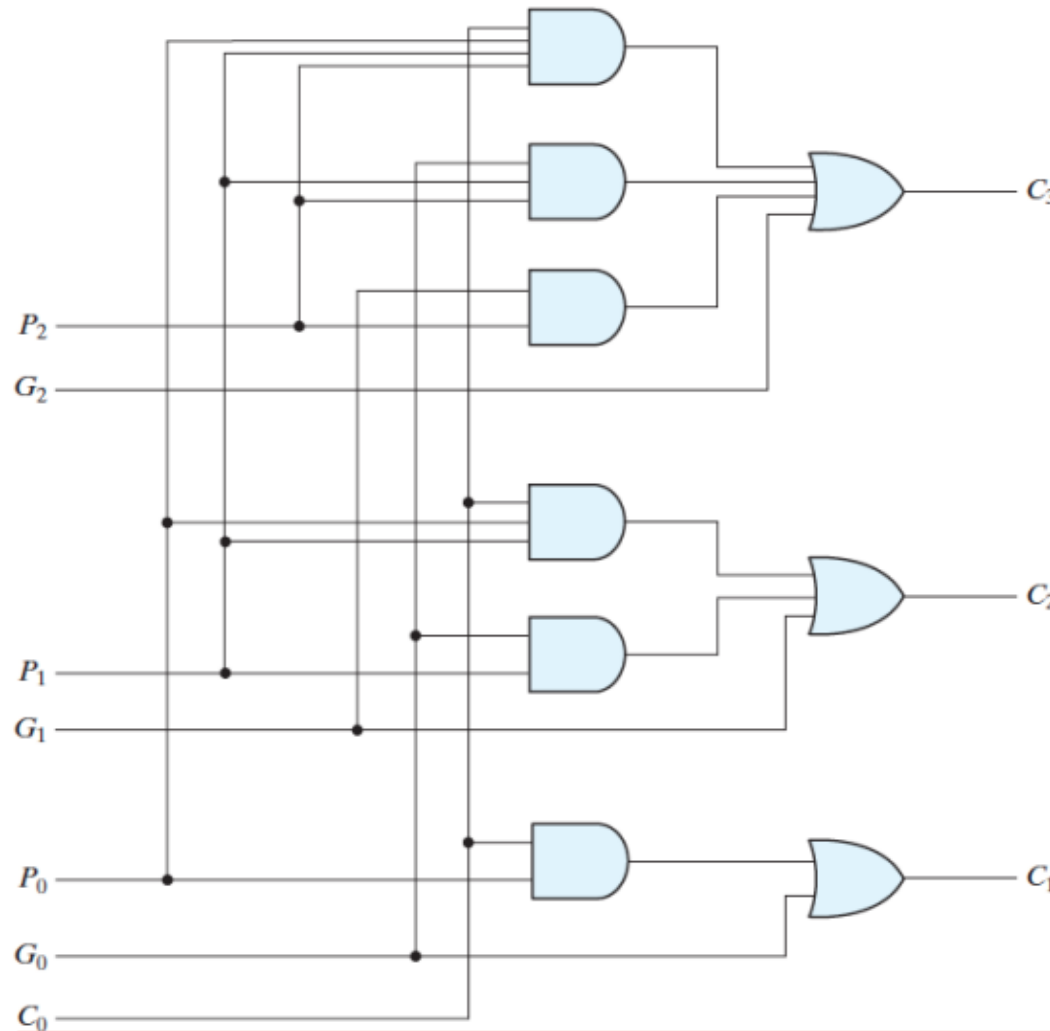
Διάδοση του κρατουμένου
εισόδου από τις βαθμ. 0, 1, 2

Παραγωγή κρατουμένου στην βαθμ.
0 και διάδοση από τις βαθμ. 1, 2

Παραγωγή κρατουμένου
στην βαθμ. 1 και διάδοση
από την βαθμ. 2

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε
να εκφράσουμε οποιοδήποτε
κρατούμενο.

Γεννήτρια Πρόβλεψης Κρατούμενου



Τα ενδιάμεσα κρατούμενα χρειάζονται για την παραγωγή των αθροισμάτων

$$S_i = P_i \oplus C_i$$

Αθροιστής Πρόβλεψης Κρατουμένου

