Άλγεβρα Boole
και Λογικές Πύλες

Η δίτιμη άλγεβρα Boole

- Σύνολο στοιχείων: B = {0, 1}
- Δυαδικοί τελεστές: + (λογική πράξη Η),
- (λογική πράξη ΚΑΙ), και τελεστής συμπληρώματος (λογική πράξη ΟΧΙ)

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	x'
0	1
1	0

- Ισχύουν τα αξιώματα Huntington

Η δίτιμη άλγεβρα Boole

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$x+y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	x'
0	1
1	0

1. Η κλειστότητα προφανώς ισχύει.

2. Τα ουδέτερα στοιχεία είναι 0 για το + και 1 για το • : (0+0=0,0+1=1+0=1) και (1 • 1=1, 1 • 0=0 • 1=0)

3. Οι αντιμεταθετικοί νόμοι είναι προφανείς από τη συμμετρία.

4. Από τον πίνακα συμπληρώματος έχουμε x+x΄=1: 0+0΄=0+1=1, 1+1΄=1+0=1 και x • x΄=0: 0 • 0΄=0 • 1=0, 1 • 1΄=1 • 0=0

5. Η άλγεβρα έχει τουλάχιστον 2 στοιχεία αφού 1≠0.

6. Ο επιμεριστικός νόμος φαίνεται από τον παρακάτω πίνακα

Ο επιμεριστικός νόμος

x	y	z	$y + z$	$x \cdot (y + z)$	$x \cdot y$	$x \cdot z$	$(x \cdot y)+(x \cdot z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Δύο συναρτήσεις που δίνουν τις ίδιες λογικές τιμές για όλες τις πιθανές τιμές των μεταβλητών τους είναι ισοδύναμες

Δυισμός

Δυισμός: Ότι ισχύει από τα αξιώματα Huntigton για το + (•) μπορεί να προκύψει από το • (+) με εναλλαγή τελεστών και ουδέτερων στοιχείων.

Μια αληθής αλγεβρική έκφραση παραμένει αληθής αν εναλλάξω τελεστές και ουδέτερα στοιχεία (ΚΑΙ-Η, 0-1)

Η αρχή δυισμού αποτελεί απόδειξη ισχύος μίας λογικής έκφρασης και αξιοποιείται στα βασικά αξιώματα-θεωρήματα

Βασικά θεωρήματα και ιδιότητες

ΠΙΝΑΚΑΣ 2-1
Αξιώματα και θεωρήματα της άλγεβρας Boole

Αξίωμα 2	(a) $x+0=x$	(b) $x \cdot 1 = x$
Αξίωμα 5	(a) $x+x'=1$	(b) $x \cdot x' = 0$
Θεώρημα 1	(a) $x+x=x$	(b) $x \cdot x = x$
Θεώρημα 2	(a) $x+1=1$	(b) $x \cdot 0 = 0$
Θεώρημα 3, (δύο αρνήσεις)	$(x')'=x$	
Αξίωμα 3, αντιμεταθετική	(a) $x+y=y+x$	(b) $xy=yx$
Θεώρημα 4, προσεταιριστική	(a) $x+(y+z)=(x+y)+z$	(b) $x(yz)=(xy)z$
Αξίωμα 4, επιμεριστική	(a) $x(y+z)=xy+xz$	(b) $x+yz=(x+y)(x+z)$
Θεώρημα 5, De Morgan	(a) $(x+y)'=x'y'$	(b) $(xy)'=x'+y'$
Θεώρημα 6, απορρόφηση	(a) $x+xy=x$	(b) $x(x+y)=x$

Τα θεωρήματα αποδεικνύονται:
(α) με χρήση των αξιωμάτων και των θεωρημάτων που έχουν ήδη αποδειχθεί, ή
(β) με τη βοήθεια των πινάκων αλήθειας

Αξιώματα

Αξίωμα 2: x + 0 = x

OR

x	y	$x+y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Για y = 0 αποδεικνύεται
<u>Δυϊκο</u>: x * 1 = x

Αξίωμα 5: x + x΄ = 1

OR

x	y	$x+y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Για y = x΄ αποδεικνύεται
<u>Δυϊκο</u>: x * x' = 0

Απόδειξη Θεωρημάτων

Θεώρημα 1a: $x+x=x$

$x+x = (x+x)\cdot 1 =$	αξίωμα $a\cdot 1 = a$
$(x+x)\cdot(x+x') =$	αξίωμα $a+a' = 1$
$x+xx'=$	αξίωμα $a+bc = (a+b)(a+c)$
$x+0 =$	αξίωμα $a\cdot a' = 0$
x	αξίωμα $a+0 = a$

Απόδειξη Θεωρημάτων

Θεώρημα 1b: $x \cdot x = x$ (δυικό του 1a)

$x \cdot x =$

$xx+0 =$	αξίωμα $a+0 = a$
$xx+xx' =$	αξίωμα $a \cdot a' = 0$
$x(x+x')=$	αξίωμα $a(b+c) = ab+ac$
$x \cdot 1 =$	αξίωμα $a+a' = 1$
x	αξίωμα $a \cdot 1 = a$

Απόδειξη Θεωρημάτων

Θεώρημα 2a: $x+1=1$

$x+1 =$

$1\cdot(x+1) =$	αξίωμα $a\cdot 1 = a$
$(x+x')\cdot(x+1) =$	αξίωμα $a+a' = 1$
$x+x'\cdot 1 =$	αξίωμα $a+bc =(a+b)\cdot(a+c)$
$x+x' =$	αξίωμα $a\cdot 1 = a$
1	αξίωμα $a+a' = 1$

<u>Θεώρημα 2b</u>: $x\cdot 0=0$ (δυικό του 2a)

Απόδειξη Θεωρημάτων

Θεώρημα 6a: $x+xy=x$

$x+xy =$

$x\cdot 1+x\cdot y =$	αξίωμα $a\cdot 1 = a$
$x\cdot(1+y) =$	αξίωμα $a(b+c) = ab+ac$
$x\cdot(y+1) =$	αξίωμα $a+b = b+a$
$x\cdot 1 =$	θεώρημα $a+1 = 1$
x	αξίωμα $a\cdot 1 = a$

Θεώρημα 6b: $x\cdot(x+y) = x$ (δυικό του 6a)

Απόδειξη Θεωρημάτων

Θεώρημα 5a (De Morgan): $(x+y)' = x'y'$

x	y	$x + y$	$(x + y)'$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

x'	y'	$x'y'$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Θεώρημα 5b (De Morgan): $(xy)' = x' + y'$

Προτεραιότητα Τελεστών

1. Παρένθεση
2. ΌΧΙ
3. ΚΑΙ
4. Η

<u>Παραδείγματα</u>

(x + y)΄ : 1) υπολογίζουμε το x + y.
2) παίρνουμε το συμπλήρωμα του αποτελέσματος.

x΄y΄ : 1) παίρνουμε τα συμπληρώματα των x και y.
2) παίρνουμε το ΚΑΙ των συμπληρωμάτων.

Συναρτήσεις Boole

Συνάρτηση: Έκφραση από δυαδικές μεταβλητές, τους δύο δυαδικούς τελεστές Η και ΚΑΙ, τον τελεστή ΌΧΙ, παρενθέσεις και ένα ίσον.

$F_1 = x + y'z$ είναι αληθής (1) μόνο αν (x=1) ή (y=0 και z=1).

Πίνακας Αλήθειας

n

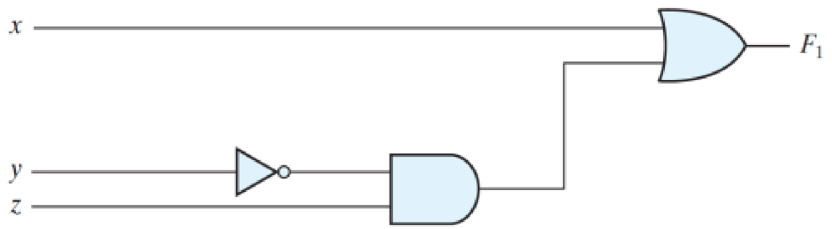
2^n συνδυασμοί σε αύξουσα δυαδική αρίθμηση

x	*y*	*z*	F_1
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Αλγεβρική έκφραση

$F_1 = x + y'z$

Κυκλωματικη Υλοποίηση

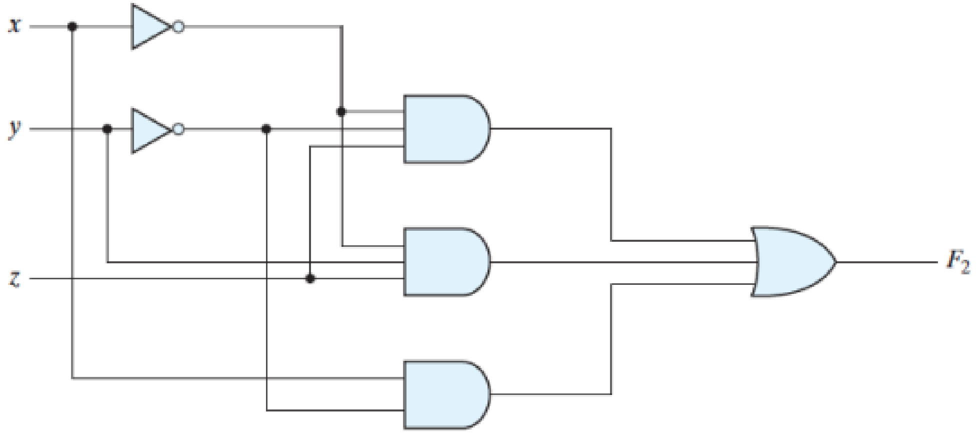


Συναρτήσεις Boole

Ο πίνακας αλήθειας είναι ΜΟΝΑΔΙΚΟΣ, ενώ υπάρχουν πολλαπλές αλγεβρικές εκφράσεις και κυκλωματικές υλοποιήσεις

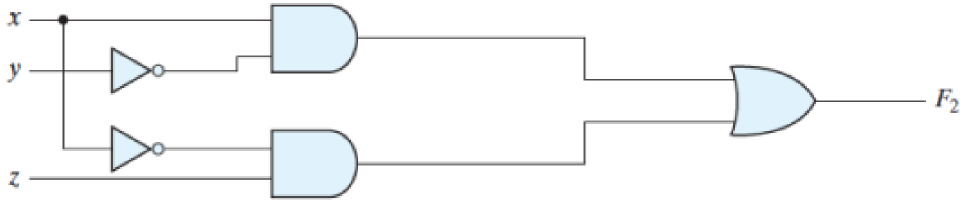
Πίνακας Αλήθειας

x	y	z	F_2
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0



(a) $F_2 = x'y'z + x'yz + xy'$

ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ!!!



(b) $F_2 = xy' + x'z$

Απλοποίηση Συναρτήσεων Boole

$$F_3 = x'y'z + x'yz + xy'$$

term literal

Εύρεση απλούστερων εκφράσεων μιας συνάρτησης με χρήση αλγεβρικών μετασχηματισμών.

<u>Παράδειγμα</u>

$$\begin{aligned}
F_3 &= x'y'z + x'yz + xy' \\
&= x'z\,(y' + y) + xy' \\
&= x'z1 + xy' \\
&= x'z + xy' \\
&= F_4
\end{aligned}$$

Απλοποίηση Συναρτήσεων Boole

1. $x(x' + y) = xx' + xy = 0 + xy = xy.$

2. $x + x'y = (x + x')(x + y) = 1(x + y) = x + y.$

3. $(x + y)(x + y') = x + xy + xy' + yy' = x(1 + y + y') = x.$

4.
$$\begin{aligned} xy + x'z + yz &= xy + x'z + yz(x + x') \\ &= xy + x'z + xyz + x'yz \\ &= xy(1 + z) + x'z(1 + y) \\ &= xy + x'z. \end{aligned}$$

5. $(x + y)(x' + z)(y + z) = (x + y)(x' + z)$, by duality from function 4.

Συμπλήρωμα Συνάρτησης Boole

Το συμπλήρωμα F΄ μιας συνάρτησης F είναι η συνάρτηση εκείνη που ισούται με 0 όταν F = 1 και 1 όταν F = 0.

Το συμπλήρωμα μιας συνάρτησης προκύπτει εφαρμόζοντας τα γενικευμένα θεωρήματα DeMorgan

$$(A + B + C + D + \ldots + F)' = A' B' C' D' \ldots F'$$

$$(ABCD\ldots F)' = A' + B' + C' + D' + \ldots + F'$$

εάν αλλάξουμε τα ΚΑΙ με τα Η και συμπληρώσουμε κάθε παράγοντα.

Το συμπλήρωμα προκύπτει εύκολα εάν πάρουμε το δυϊκό της συνάρτησης και συγχρόνως το συμπλήρωμα κάθε παράγοντα.

Συμπλήρωμα Συνάρτησης Boole

$$F_1' = (x'yz' + x'y'z)' = (x'yz')'(x'y'z)' = (x + y' + z)(x + y + z')$$

$$\begin{aligned} F_2' = [x(y'z' + yz)]' &= x' + (y'z' + yz)' = x' + (y'z')'(yz)' \\ &= x' + (y + z)(y' + z') \\ &= x' + yz' + y'z \end{aligned}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ:
Το θεώρημα De Morgan πρέπει να εφαρμόζεται σταδιακά και ακολουθώντας την προτεραιότητα των τελεστών ανάποδα

Ελαχιστόροι και Μεγιστόροι

Minterm (Ελαχιστόρος): Το ΚΑΙ n μεταβλητών στην κανονική ή συμπληρωματική τους μορφή.

Παραδείγματα ελαχιστόρων με 4 μεταβλητές:

$$xyzw, \quad x'yz'w, \quad xy'zw$$

Maxterm (Μεγιστόρος): Το Η΄ n μεταβλητών στην κανονική ή συμπληρωματική τους μορφή.

Παραδείγματα μεγιστόρων με 4 μεταβλητές:

$$x + y + z + w, \qquad x' + y + z' + w, \qquad x + y' + z + w$$

Ελαχιστόροι και Μεγιστόροι

			Ελαχιστόροι		Μεγιστόροι	
x	y	z	Όρος	Ονομασία	Όρος	Ονομασία
0	0	0	$x'y'z'$	m_0	$x+y+z$	M_0
0	0	1	$x'y'z$	m_1	$x+y+z'$	M_1
0	1	0	$x'yz'$	m_2	$x+y'+z$	M_2
0	1	1	$x'yz$	m_3	$x+y'+z'$	M_3
1	0	0	$xy'z'$	m_4	$x'+y+z$	M_4
1	0	1	$xy'z$	m_5	$x'+y+z'$	M_5
1	1	0	xyz'	m_6	$x'+y'+z$	M_6
1	1	1	xyz	m_7	$x'+y'+z'$	M_7

Για n μεταβλητές έχουμε 2^n ελαχιστόρους και μεγιστόρους. Οι μεταβλητές έχουν ανεστραμένες τιμές στους αντίστοιχους ελαχιστόρους / μεγιστόρους

Κάθε ελαχιστόρος είναι το συμπλήρωμα του αντίστοιχου μεγιστόρου και αντίστροφα, π.χ. $m_0=x'y'z'$, $M_0=x+y+z$

Ελαχιστόροι και Μεγιστόροι

x	y	z	Function f_1	Function f_2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

$$f_1 = x'y'z + xy'z' + xyz = m_1 + m_4 + m_7$$

$$f_2 = x'yz + xy'z + xyz' + xyz = m_3 + m_5 + m_6 + m_7$$

Ελαχιστόροι και Μεγιστόροι

x	y	z	F	F'
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

$F = \Sigma(0, 1, 4, 6, 7)$

$F' = \Sigma(2, 3, 5)$

Όσοι ελαχιστόροι λείπουν από την F υπάρχουν στην συμπληρωματική της F'

$F' = m_2 + m_3 + m_5$ όμως $F = (F')' = m_2' m_3' m_5' = M_2 M_3 M_5$

$F = \Sigma(0, 1, 4, 6, 7) = \Pi(2, 3, 5)$

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

Κανονικές Μορφές

$$f_1 = x'y'z + xy'z' + xyz \quad \begin{cases} f_1 = m_1 + m_4 + m_7 \quad f_1' = m_0 + m_2 + m_3 + m_5 + m_6 \\ f_1 = M_0 M_2 M_3 M_5 M_6 \quad f_1' = M_1 M_4 M_7 \end{cases}$$

x	*y*	*z*	Function f_1
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Οι συναρτήσεις Boole που είναι εκφρασμένες ως άθροισμα ελαχιστόρων ή ως γινόμενο μεγιστόρων λέμε ότι είναι σε **κανονική μορφή**.

Συνάρτηση Boole σε Αθροισμα Ελαχιστόρων

1. Αναπτύσσουμε τη συνάρτηση σε άθροισμα γινομένων.
2. Συμπληρώνουμε κάθε γινόμενο με τις μεταβλητές που λείπουν πολ/ ζοντας με μία παράσταση $(x + x')$ για κάθε μεταβλητή που λείπει.

ή εναλλακτικά

1. Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας της συνάρτησης κατ’ευθείαν από την αλγεβρική έκφραση.
2. Παίρνουμε τους ελαχιστόρους από τον πίνακα αλήθειας.

<u>Παράδειγμα</u>

$F = A + B'C =$

$A(B + B')(C + C') + (A + A')B'C =$

$ABC + ABC' + AB'C + AB'C' + AB'C + A'B'C =$

$A'B'C + AB'C' + AB'C + ABC' + ABC = m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 = \Sigma(1, 4, 5, 6, 7)$

Συνάρτηση Boole σε Γινόμενο Μεγιστόρων

1. Αναπτύσσουμε τη συνάρτηση σε γινόμενο αθροισμάτων χρησιμοποιώντας τον επιμεριστικό κανόνα: $x + yz = (x + y)(x + z)$.
2. Συμπληρώνουμε κάθε άθροισμα με τις μεταβλητές που λείπουν προσθέτοντας τον όρο (xx') για κάθε μεταβλητή που λείπει.

ή εναλλακτικά

1. Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας της συνάρτησης κατ’ευθείαν από την αλγεβρική έκφραση.
2. Παίρνουμε τους μεγιστόρους από τον πίνακα αλήθειας.

<u>Παράδειγμα</u>

$F = xy + x'z = (xy + x')(xy + z) =$

$(x + x')(y + x')(x + z)(y + z) =$

$(x' + y)(x + z)(y + z) = (x' + y + zz')(x + z + yy')(y + z + xx') =$

$(x' + y + z)(x' + y + z')(x + y + z)(x + y' + z)(x + y + z)(x' + y + z) =$

$(x + y + z)(x + y' + z)(x' + y + z)(x' + y + z') = M_0 M_2 M_4 M_5 = \Pi(0, 2, 4, 5)$

Μετατροπή μεταξύ Κανονικών Μορφών

Βήματα μετατροπής από άθροισμα ελαχιστόρων σε γινόμενο μεγιστόρων:

1. Εκφράζω την F σε άθροισμα ελαχιστόρων. Έστω $F(A,B,C)=\Sigma(1,4,5,6,7)$.
2. Βρίσκω την $F'=\Sigma(0,2,3)=m_0+m_2+m_3$.
3. Βρίσκω την F'' ως εξής: $F''=(m_0+m_2+m_3)'= m_0'm_2'm_3'=M_0M_2M_3=\Pi(0,2,3)$

Πίνακας Αληθείας για την $F = xy + x'z$

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Μεγιστόροι

Ελαχιστόροι

$F(x,y,z)=\Sigma(1,3,6,7)$

$F(x,y,z)=\Pi(0,2,4,5)$

Εναλλάσσουμε τα σύμβολα Σ και Π και χρησιμοποιούμε εκείνους τους δείκτες που λείπουν από την αρχική μορφή.

Πρότυπες Μορφές

Πρότυπες μορφές: Οι συναρτήσεις όπου οι όροι μπορούν να περιέχουν λιγότερους από n παράγοντες.

Άθροισμα γινομένων: μια έκφραση Boole που περιέχει όρους ΚΑΙ που ονομάζονται γινόμενα με έναν ή περισσότερους παράγοντες ο κάθε ένας. «Άθροισμα» λέμε το λογικό Η όλων αυτών των γινομένων.

Παράδειγμα:

$$F_1 = y' + xy + x'yz'$$

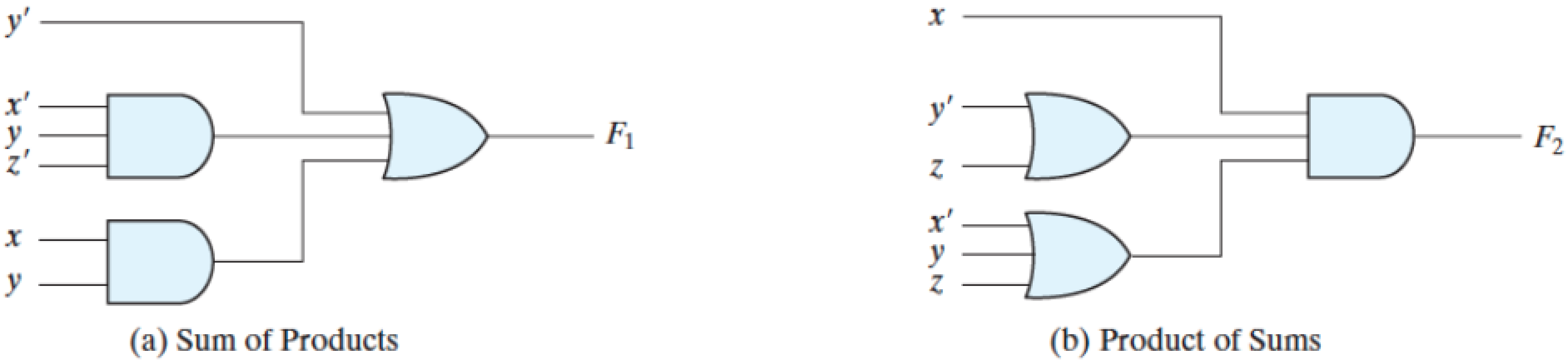
Γινόμενο Αθροισμάτων: μια έκφραση Boole που περιέχει όρους Η που ονομάζονται αθροίσματα. Κάθε άθροισμα περιέχει έναν ή περισσότερους παράγοντες. Το γινόμενο αποτελεί το λογικό ΚΑΙ των αθροισμάτων.

Παράδειγμα:

$$F_2 = x(y' + z)(x' + y + z' + w)$$

Υλοποίηση Δύο Επιπέδων

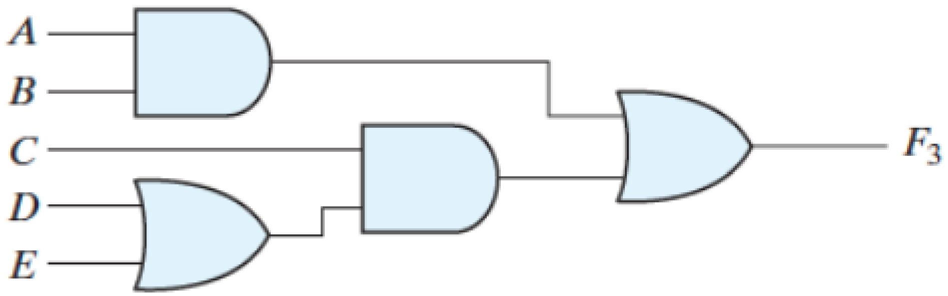
Οι συναρτήσεις σε πρότυπη μορφή υλοποιούνται σε δύο επίπεδα λογικής



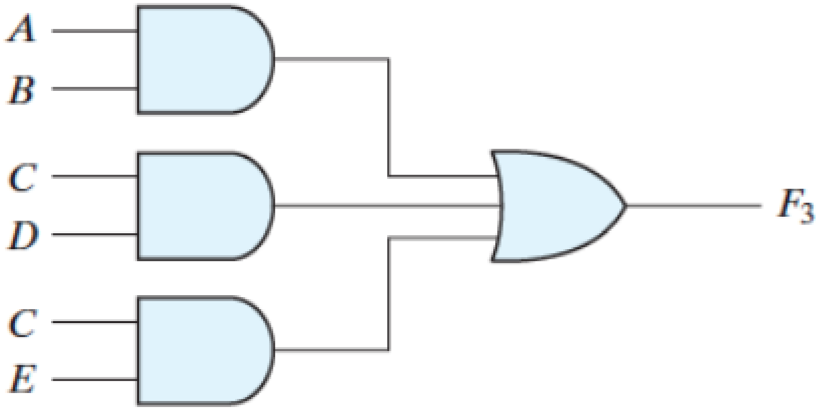
Η απλοποίηση κυκλωμάτων δύο επιπέδων αποτελεί έναν από τους βασικότερους στόχους της Ψηφιακής Σχεδίασης

Υλοποίηση Πολλαπλών Επιπέδων

Η διεπίπεδη υλοποίηση δεν είναι η φθηνότερη καθώς δεν εκμεταλλεύεται κοινούς παράγοντες



(a) $AB + C(D + E)$



(b) $AB + CD + CE$

Το κόστος ενός κυκλώματος σε υλικό εξαρτάται από τον αριθμό των πυλών και τον αριθμό των εισόδων τους.