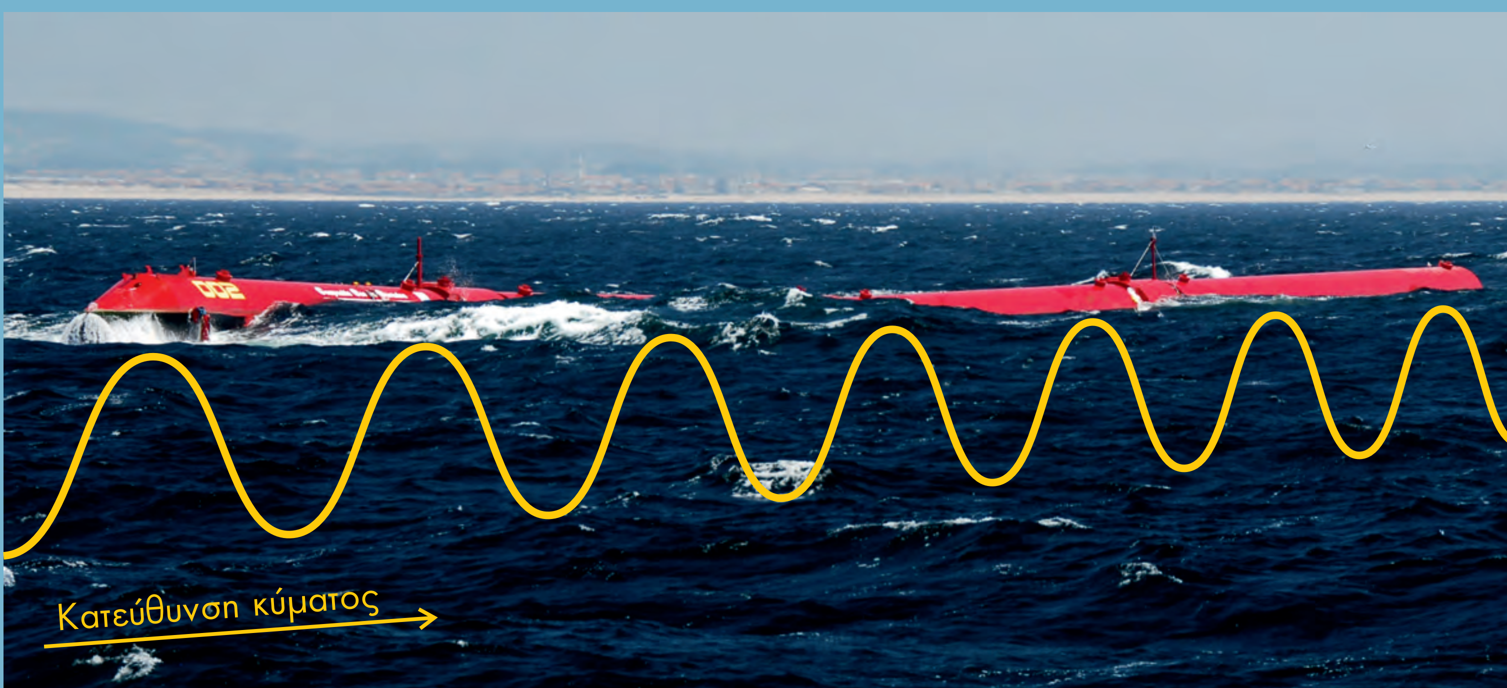
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Φυσική



ΤΕΥΧΟΣ Γ΄

Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Σπουδών Υγείας

$E = mc^2$

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ
«ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Φυσική

Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Σπουδών Υγείας

ΤΕΥΧΟΣ Γ΄

Γ΄ τάξη
Γενικού Λυκείου

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΑΛΕΚΟΣ ΙΩΑΝΝΟΥ - ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΤΑΝΟΣ
ΑΓΓΕΛΟΣ ΠΗΤΤΑΣ - ΣΤΑΥΡΟΣ ΡΑΠΤΗΣ

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε
υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Φυσική

Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Σπουδών Υγείας

ΤΕΥΧΟΣ Γ΄

Γ΄ τάξη
Γενικού Λυκείου

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

Συγγραφείς:

Αλέκος Ιωάννου
Γιάννης Ντάνος
Άγγελος Πήττας
Σταύρος Ράπτης

Κριτές:

Αντωνίου Νικόλαος, καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών, ως πρόεδρος
Ευθυμιόπουλος Θωμάς, Αν. Καθηγητής Πανεπιστημίου Κρήτης
Αρναουτάκης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ04 Δ/θμιας Εκ/σης
Καρανίκας Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ04 Δ/θμιας Εκ/σης
Πρίντζας Γεώργιος, Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ04 Δ/θμιας Εκ/σης
Κοτρόζου Αικατερίνη, Φυσικός, M.Sc. Καθηγήτρια Δ/θμιας Εκ/σης
Φωτάκης Ιωάννης, Καθηγητής ΠΕ04 Δ/θμιας Εκ/σης».

Ε.Π.Ε.Α.Ε.Κ.

Υποπρόγραμμα 1: ΓΕΝΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Μέτρο 1.1: ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Ενέργεια 1.1α: Προγράμματα - βιβλία

ΕΡΓΟ: ΑΝΑΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΚΑΙ ΕΚΣΥΓΧΡΟΝΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΜΕ ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΥΛΙΚΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο που κρατάτε στα χέρια σας έχει γραφτεί σύμφωνα με το νέο αναλυτικό πρόγραμμα της Γ΄ Λυκείου για τη θετική και τεχνολογική κατεύθυνση, που εκπονήθηκε από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

Η ύλη περιλαμβάνει τις μηχανικές και ηλεκτρομαγνητικές ταλαντώσεις, τα κύματα, τα ιδανικά ρευστά, τη μηχανική του στερεού σώματος, τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς, τις κρούσεις και το φαινόμενο Doppler. Στη συνέχεια στα δύο τελευταία κεφάλαια εισάγονται κάποιες πρώτες γνώσεις σύγχρονης φυσικής με τη θεωρία της σχετικότητας και την κβαντομηχανική.

Βασική μας επιδίωξη ήταν να γραφτεί ένα βιβλίο όσο το δυνατόν πιο φιλικό στο μαθητή. Προσπαθήσαμε να διαπραγματευτούμε τα θέματα με καθαρότητα και λιτότητα και να μην ανοίξουμε δρόμους που το επίπεδο της τάξης δεν επιτρέπει να ακολουθήσουμε μέχρι τέλους. Έγινε προσπάθεια να συνδεθούν τα θέματα φυσικής που πραγματευόμαστε με την καθημερινή εμπειρία των μαθητών. Τα μαθηματικά του βιβλίου είναι απλά, αντίστοιχα του επιπέδου της τάξης στην οποία απευθύνεται.

Για το συμβολισμό ακολουθήσαμε τις προδιαγραφές που τέθηκαν από το παιδαγωγικό ινστιτούτο. Τα διανύσματα παριστάνονται με παχιά μαύρα γράμματα ενώ τα μέτρα τους με κανονικούς χαρακτήρες. Έτσι το σύμβολο $\mathbf{F}$ παριστάνει το διάνυσμα της δύναμης, ενώ το σύμβολο F το μέτρο της. Στα χειρόγραφα χρησιμοποιείται το σύμβολο $\vec{F}$.

Κάθε κεφάλαιο ξεκινάει με μια ή δυο εισαγωγικές παραγράφους που περιγράφουν το αντικείμενο με το οποίο θα ασχοληθούμε και υπενθυμίζουν κάποιες προγενέστερες βασικές γνώσεις. Οι βασικές σχέσεις κάθε κεφαλαίου είναι τονισμένες με γαλάζιο κουτί. Τα λυμένα παραδείγματα υπηρετούν δύο στόχους. Φέρνουν το μαθητή σε επαφή με τις πραγματικές διαστάσεις των μεγεθών και υποδεικνύουν ένα τρόπο εργασίας για την επίλυση των ασκήσεων. Στο τέλος της θεωρίας κάθε κεφαλαίου υπάρχει σύνοψη που περιλαμβάνει τα βασικά συμπεράσματα του κεφαλαίου. Ακολουθούν οι δραστηριότητες, οι ερωτήσεις, οι ασκήσεις και τα προβλήματα.

Οι δραστηριότητες είναι απλά πειράματα ή εργασίες που ο μαθητής μπορεί να κάνει στο σπίτι του. Οι ερωτήσεις διαφόρων τύπων προσφέρονται για έλεγχο των γνώσεων στη θεωρία και για κριτική σκέψη πάνω στα θέματα του κεφαλαίου. Οι ασκήσεις είναι απλές και αναφέρονται σε μια από τις έννοιες που πραγματεύεται το κεφάλαιο. Τα προβλήματα συνήθως είναι συνθετικά και κάποια από αυτά αυξημένης δυσκολίας.

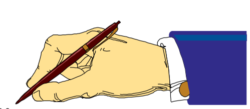
Στο τέλος κάθε κεφαλαίου θα βρείτε ένα ή δύο ένθετα που δεν αποτελούν μέρος της εξεταστέας ύλης και απευθύνονται σε όσους μαθητές θέλουν να διευρύνουν τις γνώσεις τους.

Στα παραρτήματα του βιβλίου θα συναντήσετε ένα πίνακα με τις βασικές σταθερές που χρησιμοποιήθηκαν, ένα αλφαβητικό ευρετήριο καθώς και ένα λεξιλόγιο όρων.

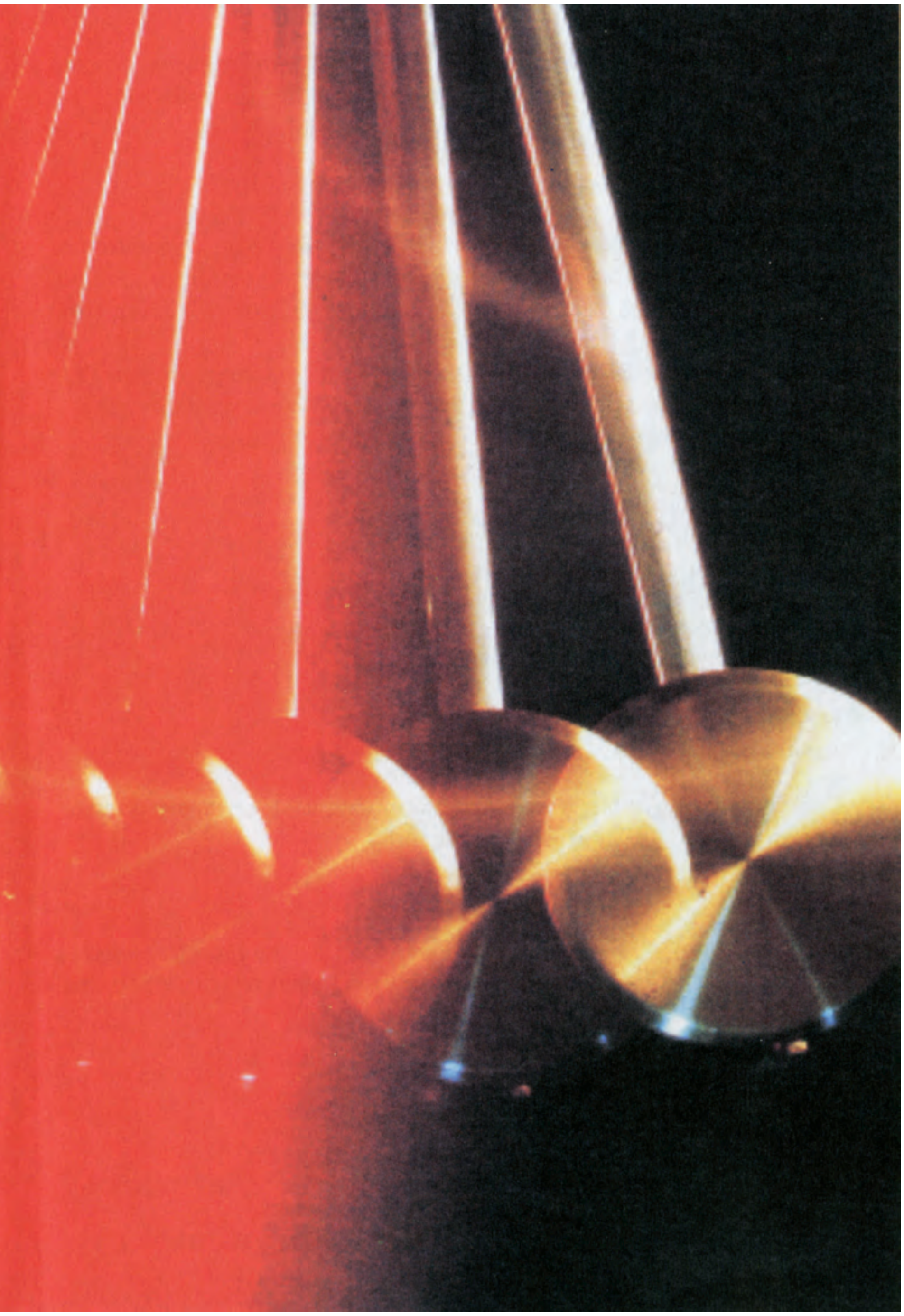
Ελπίζουμε ότι θα μας δοθεί η ευκαιρία να έρθουμε σε επαφή με την κριτική των συναδέλφων που θα διδάξουν το βιβλίο και αξιοποιώντας την να το βελτιώσουμε.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 1999

Οι συγγραφείς.......



1 ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ - ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ



1.1. Εισαγωγή

Σε προηγούμενες τάξεις ασχοληθήκαμε με δυο περιοδικά φαινόμενα, την ομαλή κυκλική κίνηση και την απλή αρμονική ταλάντωση.

Στην ενότητα αυτή θα επεκτείνουμε την έννοια «ταλάντωση» για να συμπεριλάβουμε και τις ηλεκτρικές ταλαντώσεις.

Θα εξετάσουμε επίσης τις ταλαντώσεις των οποίων το πλάτος ελαττώνεται -τις φθίνουσες ταλαντώσεις- και τις ταλαντώσεις στις οποίες προσφέρουμε ενέργεια στο σώμα που ταλαντώνεται -τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις.

Τέλος θα ασχοληθούμε και με την περίπτωση που το σώμα συμμετέχει σε περισσότερες από μια ταλαντώσεις (σύνθετες ταλαντώσεις).

1.2. Περιοδικά φαινόμενα

Περιοδικά φαινόμενα ονομάζονται τα φαινόμενα που εξελίσσονται και επαναλαμβάνονται αναλλοίωτα σε σταθερά χρονικά διαστήματα. Τέτοια φαινόμενα είναι η κίνηση της Γης γύρω από τον Ήλιο, η κίνηση του εκκρεμούς, το άναμμα και το σβήσιμο του φάρου κ.ά.

Κάθε περιοδικό φαινόμενο χαρακτηρίζεται από την **περίοδό** του (T), το χρόνο δηλαδή που απαιτείται για να ολοκληρωθεί. Αν σε χρόνο t γίνονται N επαναλήψεις του φαινομένου, η περίοδος είναι ίση με το πηλίκο

$$T = \frac{t}{N}$$

Το αντίστροφο πηλίκο $f = \frac{N}{t}$

του αριθμού των επαναλήψεων του φαινομένου προς τον αντίστοιχο χρόνο ονομάζουμε **συχνότητα** του περιοδικού φαινομένου.

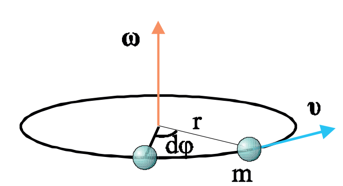
Μονάδα μέτρησης της περιόδου είναι το $1\ \text{s}$
και της συχνότητας το $1s^{-1}$ ή $1\ κύκλος/s$ ή $1\ Hz$.

Από τον ορισμό τους, τα μεγέθη **περίοδος και συχνότητα είναι αντίστροφα,** συνδέονται δηλαδή με τη σχέση $f = \frac{1}{T}$

Ένα τρίτο μέγεθος που αναφέρεται σε όλα τα περιοδικά φαινόμενα, χωρίς άμεση φυσική σημασία, είναι η **γωνιακή συχνότητα** *(ω)* για την οποία ισχύει

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Μονάδα μέτρησης της γωνιακής συχνότητας είναι το 1 *rad/s*.



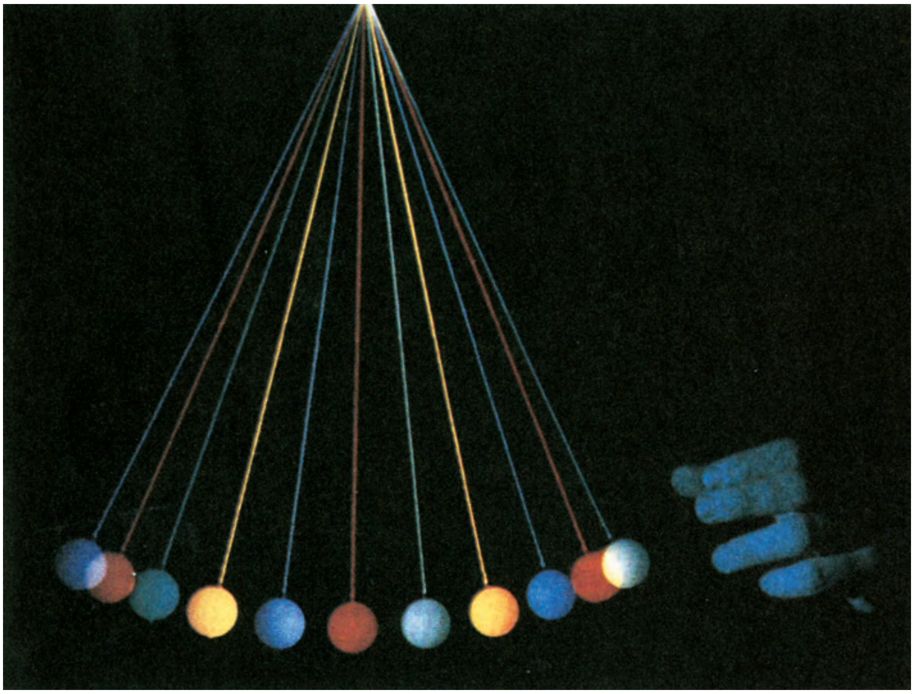
Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας στην κυκλική κίνηση.
Σχήμα 1-1.

Παρατήρηση : Στην κυκλική κίνηση ορίζεται το διανυσματικό μέγεθος γωνιακή ταχύτητα με μέτρο $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$. Στην ομαλή κυκλική κίνηση το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας που έχει ως κυκλική κίνηση είναι ίσο με τη γωνιακή συχνότητα που έχει ως περιοδική κίνηση.

1.3. Απλή αρμονική ταλάντωση

α) Κινηματική προσέγγιση

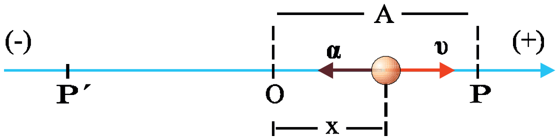
Μια περιοδική παλινδρομική κίνηση ονομάζεται **ταλάντωση**. Η ταλάντωση που γίνεται σε ευθεία τροχιά ονομάζεται **γραμμική ταλάντωση**.



Η κίνηση του εκκρεμούς είναι μια ταλάντωση. Στη φωτογραφία απεικονίζονται διαδοχικά στιγμιότυπα της κίνησης στη διάρκεια μισής περιόδου.
Εικόνα 1-1.

Η απλή αρμονική ταλάντωση είναι μια ειδική περίπτωση γραμμικής ταλάντωσης.

Έστω ένα σώμα που κινείται παλινδρομικά πάνω σε ένα άξονα γύρω από το σημείο Ο, που είναι το μέσο της τροχιάς του.



Το σώμα του σχήματος εκτελεί γραμμική ταλάντωση κινούμενο παλινδρομικά γύρω από το σημείο Ο, που είναι το μέσο της τροχιάς του.
Σχήμα 1-2.

Αν η απομάκρυνση x του σώματος δίνεται από τη σχέση

$$\boxed{x = A\eta\mu\omega t} \quad (1.1)$$

η κίνηση του σώματος ονομάζεται **απλή αρμονική ταλάντωση**. Το A είναι η μέγιστη απομάκρυνση, δηλαδή η μέγιστη απόσταση από το σημείο Ο στην οποία φτάνει το κινητό, και ονομάζεται **πλάτος** της ταλάντωσης.

Η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος κάθε στιγμή δίνονται από τις σχέσεις

$$\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\omega t \quad (1.2)$$

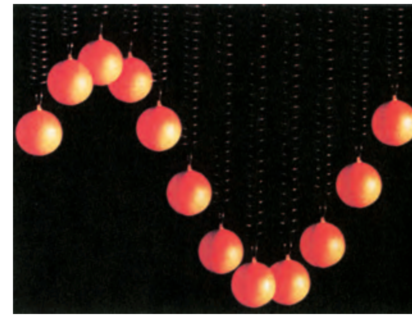
και

$$a = -a_{max}\eta\mu\omega t \quad (1.3)$$

όπου υ_{max} και a_{max}, αντίστοιχα η μέγιστη τιμή της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σώματος. Το σώμα έχει μέγιστη ταχύτητα όταν περνά από τη θέση Ο ($x = 0$) και μέγιστη επιτάχυνση όταν περνάει από τα ακραία σημεία Ρ και Ρ΄ ($x = A$ και $x = -A$ αντίστοιχα).

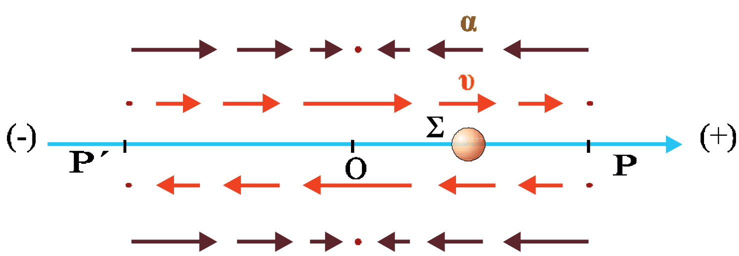
Για τη μέγιστη ταχύτητα και τη μέγιστη επιτάχυνση ισχύει

$$\boxed{\upsilon_{max} = \omega A} \quad \text{και} \quad \boxed{a_{max} = \omega^2 A}$$



Διαδοχικά στιγμιότυπα της ταλάντωσης σφαίρας εξαρτημένης από ελατήριο. Το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δύο διαδοχικά στιγμιότυπα είναι σταθερό. Στη διάρκεια της φωτογράφησης η φωτογραφική πλάκα μετατοπίζεται οριζόντια με σταθερή ταχύτητα. Έτσι η φωτογραφία δείχνει πως μεταβάλλεται η κατακόρυφη απομάκρυνση σε συνάρτηση με το χρόνο.

Εικόνα 1-2.

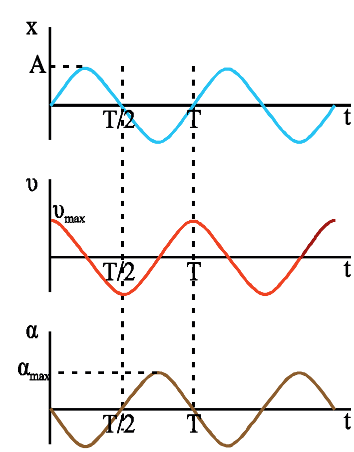


Το σώμα Σ κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Δίνονται σχηματικά τα διανύσματα της ταχύτητας (κόκκινο χρώμα) και της επιτάχυνσης (καφέ χρώμα), στις διάφορες θέσεις, κατά την κίνησή του. Η ταχύτητα του σώματος είναι μέγιστη τη στιγμή που το σώμα διέρχεται από το σημείο Ο, ενώ η επιτάχυνση είναι μέγιστη όταν το σώμα βρίσκεται στις ακραίες θέσεις Ρ και Ρ΄.

Σχήμα 1-4.

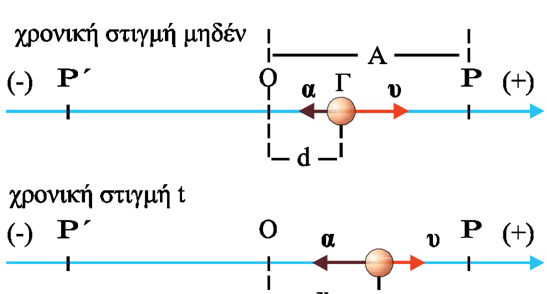
Οι σχέσεις (1.1), (1.2) και (1.3) ισχύουν σε κάθε απλή αρμονική ταλάντωση, με την προϋπόθεση ότι τη χρονική στιγμή μηδέν το κινητό βρίσκεται στο σημείο Ο και κινείται κατά τη θετική φορά.

Αν τη χρονική στιγμή μηδέν το κινητό περνά από κάποιο άλλο σημείο, έστω το Γ (σχ. 1.5), που βρίσκεται σε απόσταση d από το Ο.



Στα διαγράμματα φαίνεται πώς μεταβάλλεται με το χρόνο η απομάκρυνση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση ενός σώματος που κάνει γραμμική αρμονική ταλάντωση.

Σχήμα 1-3.



Το σώμα του σχήματος κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με αρχική φάση. Τη στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση Γ.

Σχήμα 1-5.

οι σχέσεις (1.1), (1.2) και (1.3) διαφοροποιούνται και γίνονται:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi) \qquad (1.4)$$

$$\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi)$$

$$a = -a_{max}\eta\mu(\omega t + \varphi)$$

Η γωνία φ βρίσκεται από την (1.4) αν λάβουμε υπόψη ότι τη χρονική στιγμή μηδέν το κινητό βρίσκεται στο Γ. Για $t = 0$ είναι $x = d$ και η σχέση

(1.4) γίνεται $d = A\eta\mu\varphi$ επομένως $\eta\mu\varphi = \dfrac{d}{A}$

Η γωνία φ ονομάζεται **αρχική φάση**. Μια τέτοια ταλάντωση λέμε ότι έχει αρχική φάση.

Η γωνία $(\omega t + \varphi)$ ονομάζεται **φάση** της ταλάντωσης.

Στη φωτογραφία φαίνονται παιδιά να κάνουν κούνια. Όταν η απομάκρυνση είναι μέγιστη, η ταχύτητα είναι μηδενική.
Εικόνα 1-3.

β) Δυναμική προσέγγιση

Αν ένα κινητό μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση όπως αναφέραμε, σε μια τυχαία θέση έχει επιτάχυνση α, ανεξάρτητη από τη φορά της ταχύτητας. Η συνολική δύναμη που δέχεται το σώμα και είναι υπεύθυνη για την επιτάχυνσή του είναι

$$\Sigma F = ma \qquad (1.5)$$

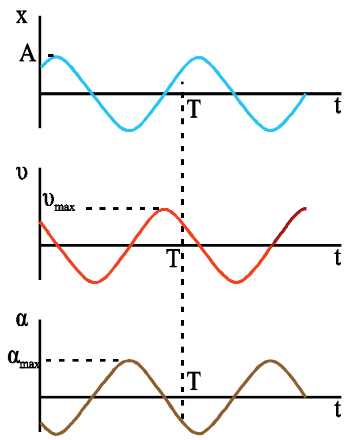
Η (1.5) γίνεται από την (1.3)

$$\Sigma F = -ma_{max}\eta\mu\omega t \quad \text{ή} \quad \Sigma F = -m\omega^2 A\eta\mu\omega t \qquad (1.6)$$

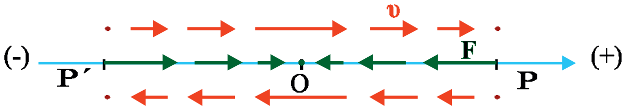
και επειδή $x = A\eta\mu\omega t$ η (1.6) γίνεται

$$\Sigma F = -m\omega^2 x \qquad (1.7)$$

Από τη σχέση αυτή φαίνεται ότι όταν ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση η συνολική δύναμη που δέχεται είναι ανάλογη με την απομάκρυνση του σώματος από το μέσο O της τροχιάς του και έχει αντίθετη φορά από αυτήν. Όταν το σώμα περνά από το σημείο O η συνολική δύναμη που δέχεται ισούται με μηδέν. Για το λόγο αυτό, το σημείο O ονομάζεται **θέση ισορροπίας** της ταλάντωσης.



Τα διαγράμματα της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης σε μια ταλάντωση με αρχική φάση.
Σχήμα 1-6.



Στο σχήμα δίνονται σχηματικά τα διανύσματα της ταχύτητας (κόκκινο χρώμα) και της δύναμης (πράσινο χρώμα), στις διάφορες θέσεις, κατά την ταλάντωση ενός σώματος.
Σχήμα 1-7.

Αν συμβολίσουμε με D το γινόμενο $m\omega^2$ η (1.7) γράφεται

$$\boxed{\Sigma F = -Dx}$$

Η παραπάνω σχέση είναι γνωστή και σαν συνθήκη για την παραγωγή απλής αρμονικής ταλάντωσης. Η δύναμη ΣF ονομάζεται **δύναμη επαναφοράς** (γιατί τείνει να επαναφέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας) και η σταθερά αναλογίας D **σταθερά επαναφοράς**.

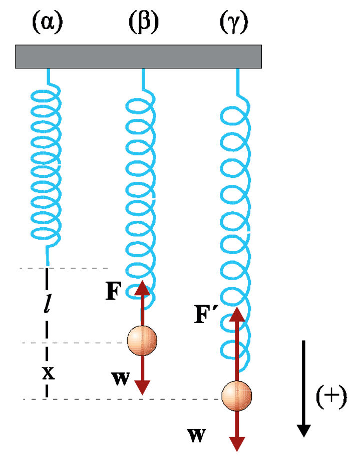
Αν σε κάποια ταλάντωση είναι γνωστή η σταθερά επαναφοράς, μπορούμε να υπολογίσουμε την περίοδό της.

Από τη σχέση $D = m\omega^2 = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$ προκύπτει

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}} \qquad (1.8)$$

Παράδειγμα 1.1

Σώμα μάζας m έχει προσδεθεί στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Απομακρύνουμε το σώμα κατακόρυφα και το αφήνουμε ελεύθερο. Να υπολογιστεί η περίοδος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει.



Σχήμα 1-8.

Απάντηση :

Δεν είναι δυνατόν να εφαρμόσουμε τη σχέση $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ (1.8), που ισχύει μόνο στις αρμονικές ταλαντώσεις, αν πρώτα δεν αποδείξουμε ότι η κίνηση του σώματος είναι απλή αρμονική ταλάντωση. Για να γίνει αυτό θα αποδείξουμε ότι η συνισταμένη δύναμη σε μια τυχαία θέση του σώματος είναι ανάλογη της απομάκρυνσής του από τη θέση ισορροπίας και αντίθετης φοράς.

Το σώμα αρχικά ισορροπεί έχοντας επιμηκύνει το ελατήριο κατά l (σχ. 1.8.β). Κατά την ισορροπία του σώματος ισχύει

$$F = w \qquad (1.9)$$

Έστω μια τυχαία θέση στην οποία θα βρεθεί το σώμα κάποια στιγμή κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής του. Θεωρώντας θετική φορά τη φορά της απομάκρυνσης x από τη θέση ισορροπίας του θα ισχύει:

$$\Sigma F = w - F'$$

ή, λόγω της (1.9),

$$\Sigma F = F - F' \qquad (1.10)$$

Σύμφωνα με το νόμο του Hooke $F = Kl$ και $F' = K(l+x)$, οπότε η (1.10) γίνεται

$$\Sigma F = -Kx \qquad (1.11)$$

Από την (1.11) παρατηρούμε ότι η συνισταμένη δύναμη είναι ανάλογη της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας και αντίθετης φοράς.

Επομένως η κίνηση είναι αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς τη σταθερά K του ελατηρίου. Η σχέση (1.8) ισχύει και γίνεται

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

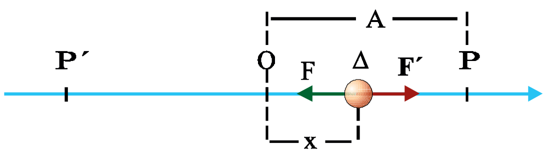
γ) Ενεργειακή προσέγγιση

Έστω και πάλι το σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Το σώμα, σε μια τυχαία θέση, έχει κινητική ενέργεια

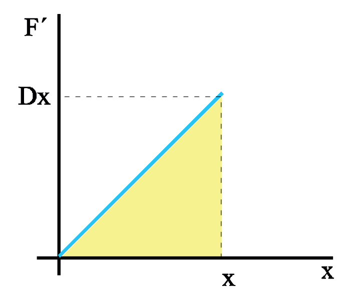
$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2 \sigma\upsilon\nu^2\omega t = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sigma\upsilon\nu^2\omega t \qquad (1.12)$$

Αν δεχτούμε ότι στη θέση O το σώμα έχει δυναμική ενέργεια μηδέν, σε κάθε άλλη θέση θα έχει δυναμική ενέργεια που υπολογίζεται ως εξής :

Εάν το σώμα βρίσκεται στο σημείο O και είναι ακίνητο, για να μετακινηθεί στη θέση Δ, που απέχει απόσταση x από τη θέση ισορροπίας, πρέπει να του ασκηθεί δύναμη $\mathbf{F'}$ τέτοια ώστε να εξουδετερώνει τη δύναμη επαναφοράς $\mathbf{F}$. Το μέτρο αυτής της δύναμης, σε κάθε θέση, θα είναι $F' = Dx$.



Σχήμα 1-9.



Για να μετατοπιστεί κατά x, στο σώμα ασκούμε δύναμη $F' = Dx$. Το εμβαδόν της επιφάνειας μεταξύ του διαγράμματος και του άξονα των x είναι αριθμητικά ίσο με το έργο που απαιτήθηκε για τη μετατόπιση.
Σχήμα 1-10.

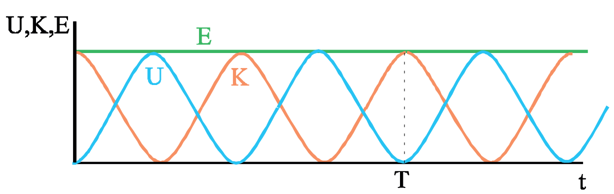
Το έργο της δύναμης $\mathbf{F'}$ υπολογίζεται από τη γραφική παράσταση $F' = f(x)$, (σχ. 1.10) και είναι $W = \frac{1}{2}Dx^2$. Το έργο της δύναμης F' αποθηκεύεται ως δυναμική ενέργεια στο σύστημα, επομένως

$$\boxed{U = \frac{1}{2}Dx^2} \qquad (1.13)$$

Όμως $D = m\omega^2$ και $x = A\eta\mu\omega t$, οπότε η (1.13) γίνεται

$$U = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \eta\mu^2\omega t \qquad (1.14)$$

Από τις σχέσεις (1.12) και (1.14) προκύπτει ότι η κινητική και η δυναμική ενέργεια στην απλή αρμονική ταλάντωση μεταβάλλονται περιοδικά με το χρόνο (σχ. 1.11).



Στο διάγραμμα παριστάνονται η κινητική, η δυναμική και η συνολική ενέργεια της ταλάντωσης, σε συνάρτηση με το χρόνο.
Σχήμα 1-11.

Η ενέργεια ταλάντωσης του συστήματος σε μια τυχαία θέση δίνεται από τη σχέση $E = K + U$

η οποία από τις (1.12) και (1.14) γίνεται

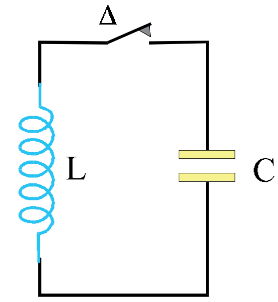
$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2(\sigma\upsilon\nu^2\omega t + \eta\mu^2\omega t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

$$E = \frac{1}{2}DA^2 \quad \text{ή} \quad \boxed{E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2}$$

Η ενέργεια στην απλή αρμονική ταλάντωση είναι σταθερή και ανάλογη με το τετράγωνο του πλάτους.

1.4. Ηλεκτρικές Ταλαντώσεις

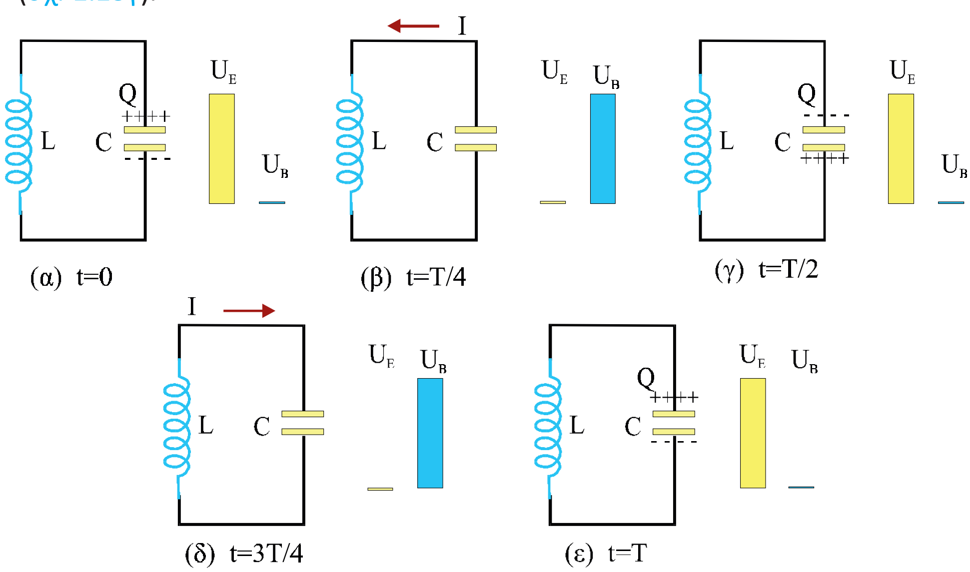
Στους οπλισμούς πυκνωτή χωρητικότητας C (σχ. 1.12) συνδέουμε πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L. Το πηνίο και οι αγωγοί δεν έχουν αντίσταση.



Στους οπλισμούς πυκνωτή έχει συνδεθεί μέσω διακόπτη ιδανικό πηνίο. Ένα τέτοιο κύκλωμα ονομάζεται κύκλωμα LC.
Σχήμα 1-12.

Φορτίζουμε τον πυκνωτή (π.χ. φέρνοντας σε επαφή τους οπλισμούς του με τους πόλους πηγής συνεχούς τάσης) με φορτίο Q και κλείνουμε το διακόπτη Δ (σχ. 1.13α). Αρχίζει τότε η εκφόρτιση του πυκνωτή και το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα. Η ένταση του ρεύματος, λόγω της αυτεπαγωγής του πηνίου, αυξάνεται σταδιακά και γίνεται μέγιστη (I) τη στιγμή της πλήρους εκφόρτισης του πυκνωτή (σχ. 1.13β).

Το ρεύμα, εξαιτίας του φαινομένου της αυτεπαγωγής στο πηνίο, δε μηδενίζεται αμέσως μετά την εκφόρτιση του πυκνωτή. Το κύκλωμα συνεχίζει για λίγο χρόνο να διαρρέεται από ρεύμα που συνεχώς ελαττώνεται. Η κίνηση αυτή των φορτίων έχει ως αποτέλεσμα ο πυκνωτής να φορτιστεί πάλι, τώρα όμως με αντίθετη πολικότητα. Όταν το ρεύμα μηδενιστεί ο πυκνωτής θα έχει αποκτήσει πάλι φορτίο Q (σχ. 1.13γ).



Τη στιγμή μηδέν, που ο πυκνωτής έχει φορτίο Q, κλείνουμε το διακόπτη. Στο σχήμα φαίνονται διάφορες φάσεις της ηλεκτρικής ταλάντωσης του κυκλώματος κατά τη διάρκεια μιας περιόδου.
Σχήμα 1-13.

Στη συνέχεια η διαδικασία επαναλαμβάνεται αντίστροφα. Ο πυκνωτής αρχίζει να εκφορτίζεται, το πηνίο διαρρέεται από ρεύμα και το κύκλωμα επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση (σχ. 1.13δ-ε).

Στην ιδανική περίπτωση που δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας η διαδικασία επαναλαμβάνεται συνέχεια. Το φαινόμενο ονομάζεται **ηλεκτρική ταλάντωση**.

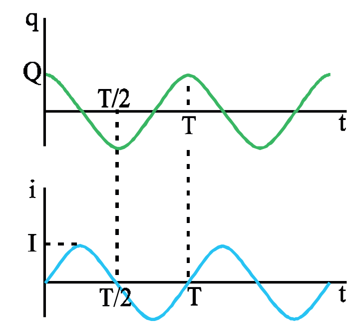
Αποδεικνύεται ότι το φορτίο του πυκνωτή μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση

$$\boxed{q = Q\sigma\upsilon\nu\omega t} \qquad (1.15)$$

και η ένταση του ρεύματος στο πηνίο, σύμφωνα με τη σχέση

$$\boxed{i = -I\eta\mu\omega t} \qquad (1.16)$$

όπου $I = Q\omega$



Οι γραφικές παραστάσεις του φορτίου στον πυκνωτή και του ρεύματος σε συνάρτηση με το χρόνο, σε κύκλωμα LC.
Σχήμα 1-14.

Στις σχέσεις αυτές, χρονική στιγμή μηδέν θεωρείται η στιγμή που κλείνουμε το διακόπτη. Θετική θεωρείται η φορά του ρεύματος όταν αυτό κατευθύνεται προς τον οπλισμό του πυκνωτή που για $t = 0$ ήταν θετικά φορτισμένος.

Από ενεργειακή άποψη, η αρχική ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή $U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ με την εκφόρτισή του ελαττώνεται και μετατρέπεται σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου στο πηνίο $U_B = \frac{1}{2}Li^2$. Όταν ο πυκνωτής εκφορτιστεί εντελώς η ενέργειά του είναι μηδενική και όλη η ενέργειά του έχει μετατραπεί σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου στο πηνίο, η οποία τώρα έχει αποκτήσει τη μέγιστη τιμή της $U_E = \frac{1}{2}LI^2$. Στη συνέχεια αυτή η διαδικασία γίνεται αντίστροφα, μειώνεται η ενέργεια στο πηνίο και αυξάνεται στον πυκνωτή, μέχρι την πλήρη φόρτισή του οπότε το κύκλωμα επανέρχεται ενεργειακά στην αρχική του κατάσταση. Η όλη διαδικασία επαναλαμβάνεται.

Οι ενέργειες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου κάποια στιγμή είναι, αντίστοιχα

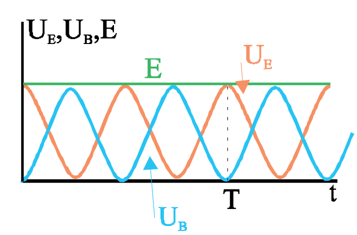
$$U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \qquad (1.17)$$

και

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2 \qquad (1.18)$$

Η ολική ενέργεια του κυκλώματος στην ιδανική περίπτωση όπου δεν υπάρχουν απώλειες, θεωρείται σταθερή και είναι

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}LI^2}$$



Η ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή, μετατρέπεται περιοδικά σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου στο πηνίο.
Σχήμα 1-15.

Η σχέση (1.17) γίνεται από την (1.15)

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\sigma\upsilon\nu^2\omega t = E\sigma\upsilon\nu^2\omega t \qquad (1.19)$$

και η (1.18) από τη (1.16)

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2\eta\mu^2\omega t = E\eta\mu^2\omega t \qquad (1.20)$$

Από τις σχέσεις (1.19) και (1.20) φαίνεται αυτό που προηγουμένως περιγράψαμε ποιοτικά, ότι δηλαδή η ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή μετατρέπεται περιοδικά σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου στο πηνίο και αντίστροφα. Στο σχήμα 1.15 βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις των U_E και U_B σε συνάρτηση με το χρόνο. Να σημειωθεί ότι το άθροισμα U_E και U_B διατηρείται σταθερό.

Περιγράψαμε την ηλεκτρική ταλάντωση με την προϋπόθεση ότι η ενέργεια του συστήματος διατηρείται. Η κατάσταση αυτή, όμως, είναι ιδανική. Στην πραγματικότητα υπάρχουν δυο λόγοι για τους οποίους η ενέργεια του συστήματος μειώνεται. Πρώτον, οι αγωγοί του συστήματος έχουν αντίσταση κι επομένως ένα μέρος της ενέργειας μετατρέπεται σε θερμότητα. Δεύτερον, τα κυκλώματα ηλεκτρικών ταλαντώσεων εκπέμπουν ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, δηλαδή χάνουν ενέργεια.

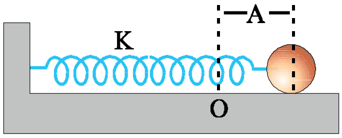
Η περίοδος T ενός τέτοιου ιδανικού κυκλώματος είναι

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{LC}} \qquad (1.21)$$

Αξιοσημείωτο είναι ότι η περίοδος εξαρτάται μόνο από τη χωρητικότητα και την αυτεπαγωγή του κυκλώματος.

Παρατήρηση

Η ηλεκτρική ταλάντωση ενός τέτοιου κυκλώματος, παρουσιάζει αναλογίες με την απλή αρμονική ταλάντωση που εκτελεί σώμα μάζας m προσδεμένο σε ιδανικό ελατήριο σταθεράς K. Αν το σώμα στο σχήμα 1.16 απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας και αφεθεί ελεύθερο να κινηθεί, χωρίς τριβές, θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση. Αν ως χρονική στιγμή μηδέν θεωρηθεί η στιγμή κατά την οποία αφέθηκε ελεύθερο, η ταλάντωση θα έχει αρχική φάση $\pi/2$.



Η ηλεκτρική ταλάντωση παρουσιάζει αναλογίες με την ταλάντωση που εκτελεί το σώμα του σχήματος.
Σχήμα 1-16.

Οι σχέσεις που περιγράφουν την απομάκρυνση και την ταχύτητα του σώματος κάθε στιγμή είναι

$$x = A\eta\mu(\omega t + \pi / 2) = A\sigma\upsilon\nu\omega t$$

$$\upsilon = \upsilon_{\max}\ \sigma\upsilon\nu(\omega t + \pi / 2) = -\upsilon_{\max}\ \eta\mu\omega t$$

Στην ηλεκτρική ταλάντωση το φορτίο στον πυκνωτή και το ρεύμα στο κύκλωμα μεταβάλλονται όπως η απομάκρυνση και η ταχύτητα στη μηχανική ταλάντωση που περιγράψαμε.

Στο μηχανικό σύστημα, η αρχική δυναμική ενέργεια $\frac{1}{2}KA^2$ μετατρέπεται περιοδικά σε κινητική, ενώ η συνολική ενέργεια - μηχανική ενέργεια - διατηρείται. Αντίστοιχα στο κύκλωμα LC, η αρχική ενέργεια $E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ -ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου - μετατρέπεται περιοδικά σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου, ενώ η συνολική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή.

Παράδειγμα 1.2

Κύκλωμα LC αποτελείται από πηνίο συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 2\text{mH}$, και πυκνωτή χωρητικότητας $C = 5\mu\text{F}$. Φέρουμε στιγμιαία τους οπλισμούς του πυκνωτή σε επαφή με πηγή τάσης $V = 20\text{V}$.

α) Να υπολογιστεί η συχνότητα των ηλεκτρικών ταλαντώσεων στο κύκλωμα.

β) Να γραφούν οι σχέσεις που δίνουν το φορτίο στον πυκνωτή και το ρεύμα στο κύκλωμα σε συνάρτηση με το χρόνο.

Απάντηση:

α) Η περίοδος των ηλεκτρικών ταλαντώσεων στο κύκλωμα είναι

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Επομένως η συχνότητα $f = 1/T$ είναι

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 16\times 10^{2}\,Hz$$

β) Αν στιγμή μηδέν θεωρηθεί η στιγμή κατά την οποία φορτίστηκε ο πυκνωτής από την πηγή, το φορτίο που απέκτησε ο πυκνωτής εκείνη τη στιγμή είναι

$$Q = CV = (5\times 10^{-6}F)\cdot(20V) = 10^{-4}C$$

Η γωνιακή συχνότητα είναι $\omega = 2\pi f = 10^{4}\,rad/s$

Επομένως η σχέση που δίνει το φορτίο στον πυκνωτή σε συνάρτηση με το χρόνο είναι

$$q = Q\text{συν}\omega t = 10^{-4}\,\text{συν}10^{4}t \qquad (\text{S.I.})$$

Αν θεωρήσουμε ότι η ενέργεια στο κύκλωμα διατηρείται, η μέγιστη ενέργεια μαγνητικού πεδίου στο πηνίο είναι ίση με τη μέγιστη ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή, επομένως

$$\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}LI^2 \quad \text{άρα} \quad I = \frac{Q}{\sqrt{LC}} = 1A$$

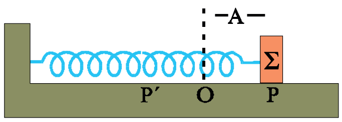
Η σχέση που δίνει το ρεύμα στο κύκλωμα σε συνάρτηση με το χρόνο είναι

$$i = -I\text{ημ}\omega t = -\text{ημ}10^{4}t \qquad (\text{S.I.})$$

(1.5.) Φθίνουσες Ταλαντώσεις

α. Μηχανικές Ταλαντώσεις

Το σώμα Σ του σχήματος 1.17 απομακρύνεται κατά Α από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο στη θέση Ρ. Όταν ολοκληρώσει μια ταλάντωση, όσο μικρή και αν είναι η τριβή του με το δάπεδο, δε θα επιστρέψει στο σημείο P. Αν το σώμα συνεχίσει την ταλάντωσή του, χωρίς εξωτερική επέμβαση, το πλάτος της ταλάντωσης συνεχώς θα μειώνεται και μετά από ορισμένο χρόνο θα σταματήσει. Μια τέτοια ταλάντωση ονομάζεται **φθίνουσα ή αποσβεννύμενη ταλάντωση.** Φθίνουσα είναι η ταλάντωση που κάνει ένα σώμα όταν είναι κρεμασμένο από ελατήριο και κινείται μέσα στον αέρα, όπως και η ταλάντωση του εκκρεμούς. Όλες οι ταλαντώσεις στο μακρόκοσμο είναι φθίνουσες γιατί καμιά κίνηση δεν είναι απαλλαγμένη από τριβές και αντιστάσεις.

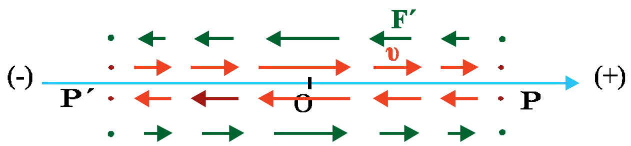


Απομακρύνουμε το σώμα Σ από τη θέση ισορροπίας Ο και το αφήνουμε ελεύθερο στο σημείο P. Το σώμα λόγω τριβών δεν επιστρέφει στο P.
Σχήμα 1-17.

Η **απόσβεση** (ελάττωση του πλάτους) οφείλεται σε δυνάμεις που αντιτίθενται στην κίνηση. Οι δυνάμεις αυτές μεταφέρουν ενέργεια από το ταλαντούμενο σύστημα στο περιβάλλον. Έτσι, η μηχανική ενέργεια του συστήματος με την πάροδο του χρόνου ελαττώνεται και το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται.

Ιδιαίτερη σημασία έχουν οι φθίνουσες ταλαντώσεις στις οποίες η αντιτιθέμενη δύναμη είναι ανάλογη της ταχύτητας.

$$F' = -b\upsilon$$



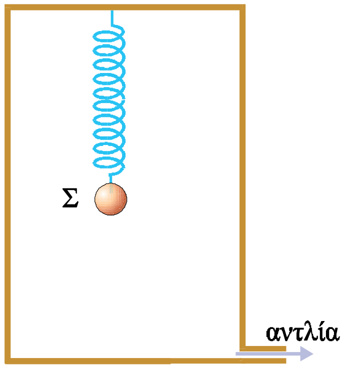
Στο σχήμα παριστάνονται σχηματικά τα διανύσματα της ταχύτητας (κόκκινο χρώμα) και της δύναμης F΄ που αντιτίθεται στην κίνηση (πράσινο χρώμα) στις διάφορες θέσεις κατά την ταλάντωση ενός σώματος.
Σχήμα 1-18.

Ο καταδύτης θέτει σε ταλάντωση το βατήρα. Το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται, λόγω τριβών.
Εικόνα 1-4.

Τέτοια δύναμη είναι η δύναμη αντίστασης που ασκείται σε μικρά αντικείμενα που κινούνται μέσα στον αέρα ή μέσα σε υγρό.

Το b είναι μια σταθερά που ονομάζεται **σταθερά απόσβεσης** και εξαρτάται από τις ιδιότητες του μέσου καθώς και από το σχήμα και το μέγεθος του αντικειμένου που κινείται. Ο ρυθμός με τον οποίο μειώνεται το πλάτος μιας ταλάντωσης εξαρτάται από την τιμή της σταθεράς b.

Πειραματικά ο ρόλος της σταθεράς b σε μια φθίνουσα ταλάντωση μπορεί να φανεί με τον εξής τρόπο: Με τη χρήση μιας αεραντλίας μπορούμε να μεταβάλουμε την πίεση του αέρα στο εσωτερικό του δοχείου (σχ. 1.19), μέσα στο οποίο ταλαντώνεται η σφαίρα Σ. Η μεταβολή της πίεσης μέσα στο δοχείο μεταβάλλει τη σταθερά απόσβεσης b. Στην περίπτωση που το ελατήριο είναι ιδανικό, αν αφαιρούσαμε όλο τον αέρα -κάτι που στην πράξη είναι αδύνατο- η σταθερά απόσβεσης θα ήταν μηδέν και η ταλάντωση αμείωτη (σχ. 1.20α). Όταν αυξάνεται η πίεση αυξάνεται η τιμή της σταθεράς b και η απόσβεση είναι ταχύτερη.

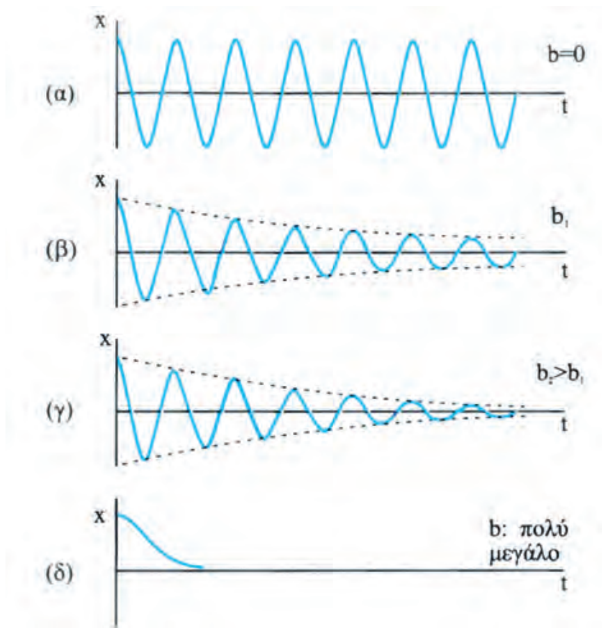


Μεταβάλλοντας την πίεση μέσα στο δοχείο μεταβάλλουμε τη σταθερά απόσβεσης του ταλαντούμενου συστήματος. **Σχήμα 1-19.**

Μελετώντας φθίνουσες ταλαντώσεις αυτής της κατηγορίας διαπιστώνουμε ότι:

α) Η περίοδος, για ορισμένη τιμή της σταθεράς b, διατηρείται σταθερή και ανεξάρτητη από το πλάτος (σχ.1.20β). Όταν η σταθερά b μεγαλώνει το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται πιο γρήγορα (σχ.1.20γ) και η περίοδος παρουσιάζει μια μικρή αύξηση που στα πλαίσια αυτού του βιβλίου θεωρείται αμελητέα.

β) Σε ακραίες περιπτώσεις στις οποίες η σταθερά απόσβεσης παίρνει πολύ μεγάλες τιμές, η κίνηση γίνεται απεριοδική, δηλαδή, ο ταλαντωτής, επιστρέφει στη θέση ισορροπίας χωρίς ποτέ να την υπερβεί (σχ. 1.20δ). Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να συμβεί αν το σύστημα ελατήριο σώμα βρισκόταν μέσα σ' ένα παχύρρευστο υγρό.



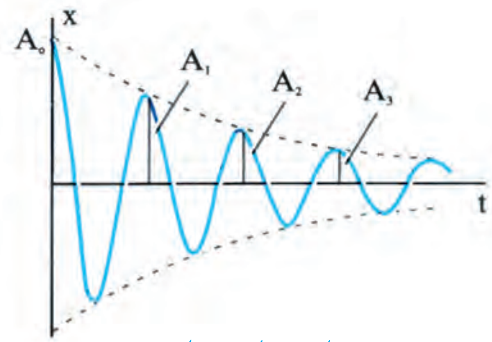
(α) Όταν η σταθερά απόσβεσης είναι μηδέν η ταλάντωση είναι αμείωτη.
(β) Φθίνουσα ταλάντωση. Η περίοδος διατηρείται σταθερή και ανεξάρτητη του πλάτους.
(γ) Όταν ο συντελεστής απόσβεσης μεγαλώνει, το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται πιο γρήγορα.
(δ) Όταν ο συντελεστής απόσβεσης είναι πολύ μεγάλος η κίνηση είναι απεριοδική.
Σχήμα 1-20.

γ) Το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο. Ισχύει δηλαδή η σχέση

$$A = A_o e^{-\Lambda t}$$

Το Λ είναι μια σταθερά που εξαρτάται από τη σταθερά απόσβεσης και τη μάζα του ταλαντούμενου σώματος.

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι ο λόγος δύο διαδοχικών μέγιστων απομακρύνσεων προς την ίδια κατεύθυνση διατηρείται σταθερός, δηλαδή



Σε μια φθίνουσα ταλάντωση ο λόγος των διαδοχικών μέγιστων είναι σταθερός.
Σχήμα 1-21.

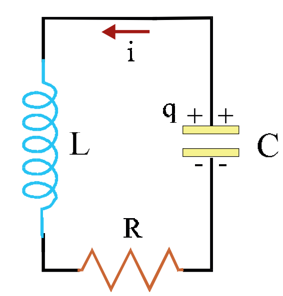
$$\frac{A_o}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = ... = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Το σύστημα ανάρτησης του αυτοκινήτου είναι ένα σύστημα αποσβεννύμενων ταλαντώσεων. Τα αμορτισέρ εξασφαλίζουν δύναμη απόσβεσης -που εξαρτάται από την ταχύτητα- τέτοια, ώστε όταν το αυτοκίνητο περνά από ένα εξόγκωμα του δρόμου, να μη συνεχίζει να ταλαντώνεται για πολύ χρόνο. Καθώς τα αμορτισέρ παλιώνουν και φθείρονται, η τιμή του b ελαττώνεται και η ταλάντωση διαρκεί περισσότερο. Η φθορά αυτή μειώνει την ασφάλεια, επειδή οι ρόδες έχουν λιγότερη επαφή με το έδαφος.

Ενώ όμως στην περίπτωση του αυτοκινήτου είναι επιθυμητή η μεγάλη απόσβεση, σε άλλα συστήματα, όπως σε ένα εκκρεμές ρολόι, επιδιώκεται η ελαχιστοποίηση της απόσβεσης.

β. Ηλεκτρικές Ταλαντώσεις

Για να είναι σε ένα κύκλωμα LC (σχ. 1.22) η ηλεκτρική ταλάντωση αμείωτη δεν πρέπει να υπάρχει απώλεια ενέργειας, κάτι που πρακτικά είναι αδύνατο. Οι ηλεκτρικές ταλαντώσεις είναι φθίνουσες. Το πλάτος του ρεύματος καθώς και το μέγιστο φορτίο στον πυκνωτή μικραίνουν και τελικά το κύκλωμα παύει να ταλαντώνεται.

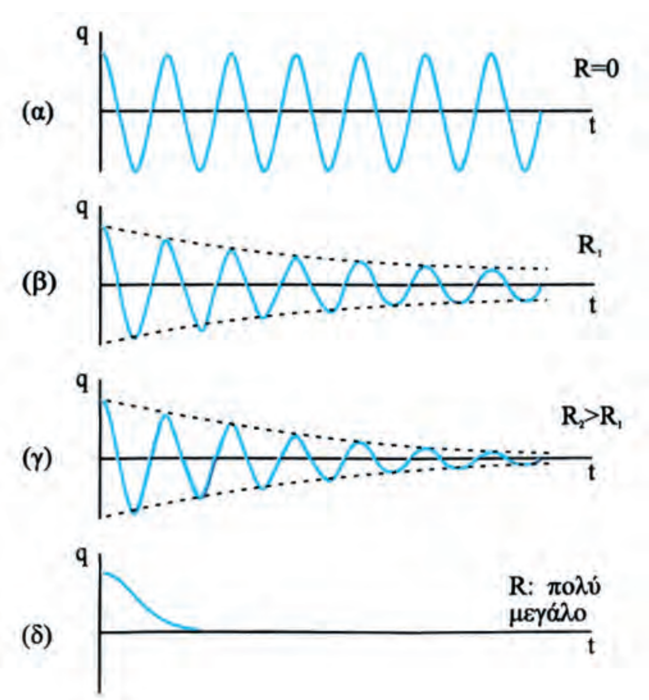


Κύκλωμα φθινουσών ηλεκτρικών ταλαντώσεων.
Σχήμα 1-22.

Στην περίπτωση των ηλεκτρικών ταλαντώσεων, ο κύριος λόγος της απόσβεσης είναι η ωμική αντίσταση, η αύξηση της οποίας συνεπάγεται πιο γρήγορη απόσβεση της ταλάντωσης και μικρή αύξηση της περιόδου της. Τα κυκλώματα LC που χρησιμοποιούνται στην πράξη παρουσιάζουν μικρή αντίσταση και η αύξηση της περιόδου μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα.

Για ορισμένη τιμή της αντίστασης, η περίοδος είναι σταθερή.

Αν η τιμή της αντίστασης υπερβεί κάποιο όριο η ταλάντωση γίνεται απεριοδική.



(α) Αμείωτη ηλεκτρική ταλάντωση. (β) και (γ) Φθίνουσες ηλεκτρικές ταλαντώσεις. (δ) Όταν η αντίσταση είναι πολύ μεγάλη το φαινόμενο δεν είναι περιοδικό.
Σχήμα 1-23.

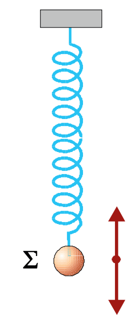
1.6. Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

α. Μηχανικές Ταλαντώσεις

Αν το σφαιρίδιο του σχήματος 1.24 εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας του και αφεθεί ελεύθερο θα εκτελέσει κατακόρυφη ταλάντωση. Αν δεν υπάρχουν αντιστάσεις η ταλάντωση θα είναι αμείωτη, με συχνότητα

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

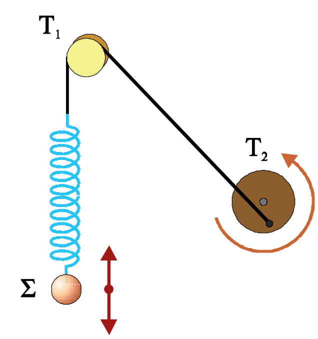
Στην πραγματικότητα η ταλάντωση θα είναι φθίνουσα. Η συχνότητά της θα είναι λίγο μικρότερη, στην πράξη όμως μπορούμε να τη θεωρήσουμε ίση με την f_0.



Το σώμα Σ απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο. Η ταλάντωσή του είναι ελεύθερη.
Σχήμα 1-24.

Μια τέτοια ταλάντωση λέγεται **ελεύθερη ταλάντωση** και η συχνότητα με την οποία πραγματοποιείται λέγεται **ιδιοσυχνότητα** (f_0) της ταλάντωσης.

Αν θέλουμε να διατηρείται σταθερό το πλάτος της ταλάντωσης πρέπει να ασκήσουμε στο σύστημα μια περιοδική δύναμη. Αυτή την πρόσθετη δύναμη την ονομάζουμε **διεγείρουσα δύναμη**.



Το σώμα Σ εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση.
Σχήμα 1-25.

Στη διάταξη του σχήματος 1.25 το ελατήριο είναι δεμένο με σχοινί, το άλλο άκρο του οποίου προσδένεται στον τροχό T_2 ο οποίος, με κατάλληλη διάταξη, μπορεί να περιστρέφεται. Η περιστροφή του τροχού αναγκάζει το σφαιρίδιο να εκτελεί κατακόρυφη ταλάντωση. Η συχνότητα της ταλάντωσης συμπίπτει με τη συχνότητα περιστροφής του τροχού. Η κίνηση του σφαιριδίου ονομάζεται **εξαναγκασμένη ταλάντωση** και το σώμα που προκαλεί την ταλάντωση με την περιοδική δύναμη που ασκεί (διεγείρουσα δύναμη) -στο παράδειγμά μας ο τροχός- **διεγέρτης**.

Το φαινόμενο της παλίρροιας στον κόλπο του Fundy στον Καναδά. Η βαρυτική έλξη της Σελήνης εξαναγκάζει τη μάζα του νερού στην επιφάνεια της Γης σε ταλάντωση.
Εικόνα 1-5.

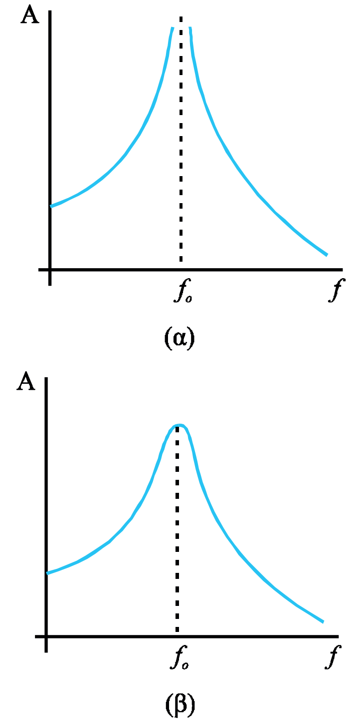
Σ' ένα κουρδιστό ρολόι η αποθηκευμένη ενέργεια στο σπειροειδές ελατήριο αντισταθμίζει τις απώλειες λόγω τριβών και διατηρεί το πλάτος των ταλαντώσεων αμείωτο. Κάποτε η ενέργεια τελειώνει και το ρολόι θέλει κούρδισμα.
Εικόνα 1-6.

Όπως είπαμε, η συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης που εκτελεί το σφαιρίδιο Σ είναι f και όχι f_0, δηλαδή ο διεγέρτης επιβάλλει στην ταλάντωση τη συχνότητά του.

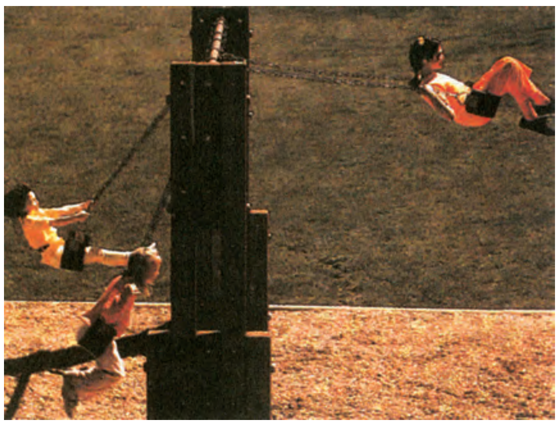
Το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης εξαρτάται από τη συχνότητα f του διεγέρτη. Συγκεκριμένα, αν μεταβληθεί η συχνότητα f

του διεγέρτη μεταβάλλεται και το πλάτος της εκτελούμενης ταλάντωσης. Οι τιμές του πλάτους είναι γενικά μικρές, εκτός αν η συχνότητα f πλησιάζει στην ιδιοσυχνότητα f_0, οπότε το πλάτος παίρνει μεγάλες τιμές και γίνεται μέγιστο όταν η συχνότητα f γίνει ίση με την ιδιοσυχνότητα f_0. Τότε λέμε ότι έχουμε **συντονισμό**.

Στην ιδανική περίπτωση που η ταλάντωση δεν έχει απώλειες ενέργειας (πρακτικά αυτό είναι αδύνατο), $f = f_0$, το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης γίνεται άπειρο.



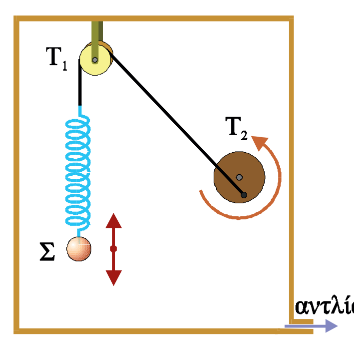
Τα διαγράμματα του πλάτους μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης, σε συνάρτηση με τη συχνότητα του διεγέρτη.
(α) Ταλάντωση χωρίς απόσβεση. (β) Ταλάντωση με απόσβεση.
Σχήμα 1-26.



Τα παιδιά, από πολύ μικρή ηλικία, μαθαίνουν ότι οι κινήσεις που κάνουν με τα πόδια τους όταν κάνουν κούνια πρέπει να έχουν μια συγκεκριμένη συχνότητα. Τότε επιτυγχάνεται συντονισμός και το πλάτος της αιώρησης γίνεται μέγιστο.
Εικόνα 1-7.

Με τη διάταξη του σχήματος 1.27 μπορούμε να παρατηρήσουμε το πλάτος της ταλάντωσης σε συνάρτηση με τη συχνότητα του διεγέρτη, για διάφορες τιμές της σταθεράς απόσβεσης. Στο σχήμα 1.28 παριστάνεται το πλάτος της ταλάντωσης για διάφορες τιμές της σταθεράς απόσβεσης. Το πλάτος της ταλάντωσης κατά το συντονισμό εξαρτάται από τη σταθερά απόσβεσης. Αύξηση της σταθεράς απόσβεσης, συνεπάγεται μείωση του πλάτους της εξαναγκασμένης ταλάντωσης.

Το σημείο από το οποίο ξεκινούν όλες οι καμπύλες στο διάγραμμα, απέχει από την αρχή των αξόνων όσο απέχει το σημείο πρόσδεσης του σχοινιού από το κέντρο του τροχού T_2.



Το σώμα Σ εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση, μέσα σε δοχείο στο οποίο μπορούμε να μεταβάλλουμε την πίεση του αέρα.
Σχήμα 1-27.

Ενεργειακή μελέτη

Στις ελεύθερες ταλαντώσεις κατά τη διέγερση του συστήματος δίνεται σε αυτό κάποια μηχανική ενέργεια, η οποία διατηρείται σταθερή -αν η ταλάντωση είναι αμείωτη- ή μετατρέπεται σταδιακά σε θερμότητα -αν είναι φθίνουσα. Στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις, στο σύστημα προσφέρεται συνεχώς ενέργεια με συχνότητα f μέσω της διεγείρουσας δύναμης.

Η ενέργεια που προσφέρεται στο σύστημα αντισταθμίζει τις απώλειες και έτσι το πλάτος της ταλάντωσης διατηρείται σταθερό.

Ο τρόπος με τον οποίο το ταλαντούμενο σύστημα αποδέχεται την ενέργεια είναι εκλεκτικός και έχει να κάνει με τη συχνότητα υπό την οποία προσφέρεται. Κατά το συντονισμό η ενέργεια μεταφέρεται στο σύστημα κατά το βέλτιστο τρόπο, γι' αυτό και το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται μέγιστο.

β. Ηλεκτρικές Ταλαντώσεις

Ένα κύκλωμα LC αν διεγερθεί (π.χ. με στιγμιαία επαφή των οπλισμών του πυκνωτή με τους πόλους πηγής συνεχούς τάσης) εκτελεί ελεύθερη ηλεκτρική ταλάντωση με συχνότητα ταλάντωσης $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

Αν το κύκλωμα δεν παρουσιάζει αντίσταση η ταλάντωση είναι αμείωτη. Αν όμως η αντίσταση του κυκλώματος είναι διάφορη του μηδενός η ταλάντωση είναι φθίνουσα.

Το κύκλωμα μπορεί να εκτελέσει εξαναγκασμένη ταλάντωση. Ως διεγέρτης μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια πηγή εναλλασσόμενης τάσης (σχ. 1.29). Το κύκλωμα τότε διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα, με συχνότητα f ίδια με τη συχνότητα της τάσης. Αν μεταβάλουμε τη συχνότητα της τάσης, το πλάτος του ρεύματος μεταβάλλεται και παίρνει τη μέγιστη τιμή του όταν $f = f_0$. Τότε έχουμε συντονισμό.

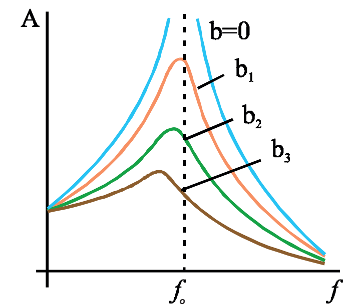
Στο σχήμα 1.30 παριστάνεται το πλάτος του ρεύματος I σε συνάρτηση με τη συχνότητα f, για διάφορες τιμές της ωμικής αντίστασης.

Όταν η συχνότητα ενός ηχητικού κύματος γίνει ίση με την ιδιοσυχνότητα του κρυστάλλινου ποτηριού, το ποτήρι ταλαντώνεται με το μέγιστο δυνατό πλάτος και τελικά σπάει.
Εικόνα 1-8.

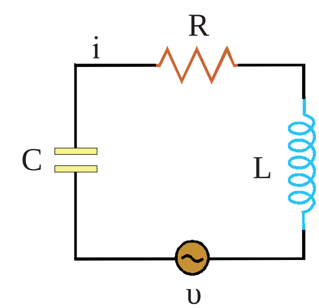
Εφαρμογές του συντονισμού

Τα παραδείγματα του συντονισμού στη φυσική είναι πολλά. Ο συντονισμός λαμβάνεται πολύ σοβαρά υπόψη σε πολλές εφαρμογές που αφορούν στην καθημερινή μας ζωή.

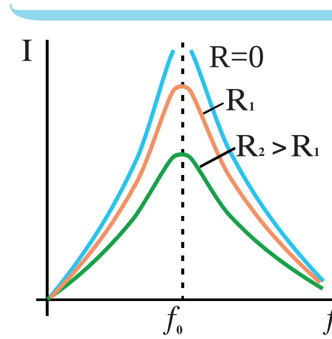
Το ΑΒ (σχ. 1.31) είναι ένα μεταλλικό έλασμα, στερεωμένο στο κάτω άκρο του Β σε ακλόνητο δάπεδο (σχ. 1.31α). Αν τραβήξουμε το άκρο Α του ελάσματος και το αφήσουμε ελεύθερο, θα εκτελέσει ταλάντωση, με συχνότητα ίση με την ιδιοσυχνότητά του (σχ. 1.31β). Θεωρητικά ένα κτίριο (σχ. 1.31γ), αν διεγερθεί, έχει τη δυνατότητα να εκτελέσει ελεύθερη ταλάντωση, παρόμοια με αυτή του ελάσματος με ιδιοσυχνότη-



Το διάγραμμα του πλάτους μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης σε συνάρτηση με τη συχνότητα του διεγέρτη για διάφορες τιμές του b ($b_1<b_2$). Στις ταλαντώσεις με απόσβεση η συχνότητα συντονισμού είναι λίγο μικρότερη από την f_0. Όσο αυξάνεται η απόσβεση η μείωση της συχνότητας συντονισμού γίνεται μεγαλύτερη. Αυτή η μετατόπιση της συχνότητας συντονισμού είναι πολύ μικρή και στην κλίμακα του διαγράμματος δε φαίνεται.
Σχήμα 1-28.

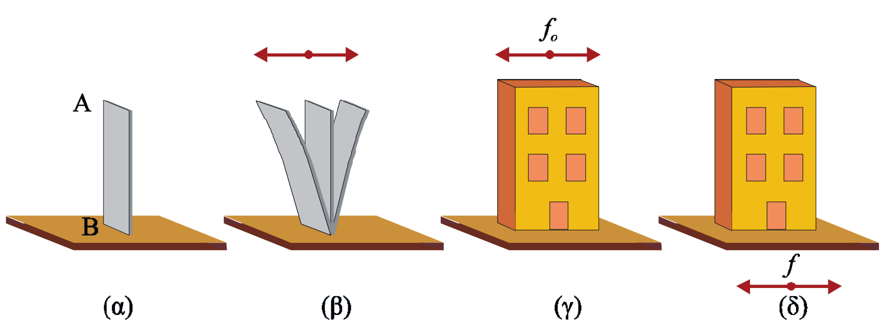


Στο κύκλωμα LC δημιουργείται εξαναγκασμένη ηλεκτρική ταλάντωση.
Σχήμα 1-29.



Τα διαγράμματα του πλάτους της έντασης του ρεύματος I σε ένα κύκλωμα LC που εκτελεί εξαναγκασμένη ηλεκτρική ταλάντωση σε συνάρτηση με τη συχνότητα του διεγέρτη, για διάφορες τιμές της αντίστασης του κυκλώματος ($R_1<R_2$).
Σχήμα 1-30.

τα f_0. Στη διάρκεια ενός σεισμού, το έδαφος πάλλεται με συχνότητα f (σχ. 1.31δ) και τα κτίρια εξαναγκάζονται να εκτελέσουν ταλάντωση. Αν η συχνότητα f με την οποία πάλλεται το έδαφος (διεγέρτης) είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα f_0 του κτιρίου, το πλάτος της ταλάντωσης του κτιρίου θα γίνει μεγάλο, γεγονός που μπορεί να οδηγήσει στην κατάρρευσή του.

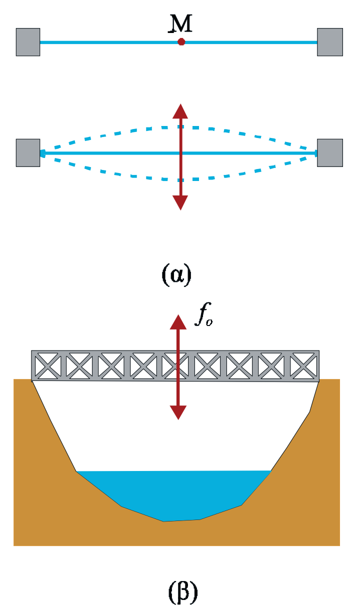


Το κτίριο συμπεριφέρεται όπως το μεταλλικό έλασμα. Όταν ταλαντώνεται το έδαφος (σεισμός) το κτίριο κάνει εξαναγκασμένη ταλάντωση.
Σχήμα 1-31.

Η χορδή του σχήματος 1.32α έχει στερεωμένα τα άκρα της σε ακλόνητα σημεία. Αν την τραβήξουμε από το μέσον της Μ και την αφήσουμε ελεύθερη, θα εκτελέσει ταλάντωση με τη φυσική της συχνότητα (ιδιοσυχνότητα). Παρόμοια κίνηση μπορεί να εκτελέσει και η γέφυρα του σχήματος 1.32β αν διεγερθεί.

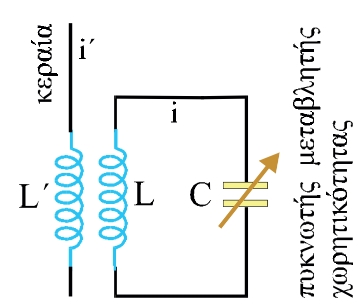
Αν μια ομάδα ανθρώπων κινηθεί με βηματισμό πάνω στη γέφυρα, η γέφυρα διεγείρεται και εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση. Αν η συχνότητα βηματισμού είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα της γέφυρας, έχουμε συντονισμό, η γέφυρα ταλαντώνεται με μεγάλο πλάτος και υπάρχει κίνδυνος κατάρρευσης.

Ένα τέτοιο ατύχημα συνέβη στη Γαλλία το 1850. Μια γέφυρα κατέρρευσε και 226 στρατιώτες σκοτώθηκαν. Από τότε, όταν ένα τμήμα στρατού περνάει πάνω από γέφυρα, οι στρατιώτες προχωρούν με ελεύθερο βηματισμό.



Μια γέφυρα συμπεριφέρεται όπως η χορδή. Μια ομάδα ανθρώπων που κινείται πάνω στη γέφυρα με βηματισμό μπορεί να την κάνει να ταλαντώνεται με μεγάλο πλάτος.
Σχήμα 1-32.

Κάθε ραδιοφωνικός σταθμός εκπέμπει σε ορισμένη συχνότητα. Στην κεραία ενός ραδιοφώνου κάθε στιγμή φτάνουν πολλά ηλεκτρομαγνητικά κύματα, με διαφορετικές συχνότητες. Η επιλογή ενός σταθμού στο ραδιόφωνο στηρίζεται στο φαινόμενο του συντονισμού. Όταν γυρίζουμε το κουμπί επιλογής των σταθμών μεταβάλλουμε τη χωρητικότητα ενός μεταβλητού πυκνωτή. Ο πυκνωτής αυτός είναι μέρος ενός κυκλώματος LC, το οποίο βρίσκεται σε επαγωγική σύζευξη με την κεραία του ραδιοφώνου. Στην κεραία τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που φτάνουν αναγκάζουν τα ηλεκτρόνιά της να εκτελέσουν ταλάντωση. Η κίνηση των ηλεκτρονίων στην κεραία δημιουργεί σ' αυτή ένα πολύ ασθενές μεταβαλλόμενο ρεύμα. Εξαιτίας της επαγωγικής σύζευξης το κύκλωμα LC εξαναγκάζεται να εκτελέσει ηλεκτρική ταλάντωση. Το πλάτος της ηλεκτρικής ταλάντωσης (πλάτος του ρεύματος) είναι ασήμαντο εκτός εάν έχουμε συντονισμό. Μεταβάλλοντας όμως τη χωρητικότητα του πυκνωτή στο κύκλωμα LC, μεταβάλλουμε

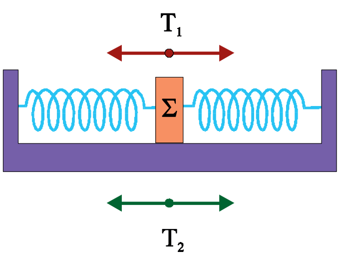


Το κύκλωμα επιλογής σταθμών στο ραδιόφωνο είναι ένα κύκλωμα LC, που εξαναγκάζεται σε ηλεκτρική ταλάντωση από την κεραία.
Σχήμα 1-33.

την ιδιοσυχνότητά του. Όταν η ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος συμπέσει με κάποια από τις συχνότητες με τις οποίες ταλαντώνονται τα ηλεκτρόνια της κεραίας (δηλαδή με κάποια από τις συχνότητες των κυμάτων τα οποία φτάνουν στην κεραία), το κύκλωμα συντονίζεται και διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα μέγιστου πλάτους. Αυτό το σχετικά μεγάλο ρεύμα, περιέχει το ηλεκτρικό σήμα, το οποίο, ενισχυμένο, οδηγείται στο μεγάφωνο του ραδιοφώνου και το διεγείρει.

1.7. Σύνθεση Ταλαντώσεων

Το σώμα Σ του σχήματος 1.34 βρίσκεται πάνω σε οριζόντια βάση και είναι δεμένο στις άκρες δύο ελατηρίων, οι άλλες άκρες των οποίων είναι στερεωμένες σε ακίνητα σημεία. Το σώμα μπορεί να κινείται χωρίς τριβές. Αν το σώμα απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας του και αφεθεί ελεύθερο θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση (με περίοδο T_1) . Αν και η βάση πάνω στην οποία βρίσκεται το σώμα -με κατάλληλο μηχανισμό- εκτελεί αρμονική ταλάντωση (με περίοδο T_2), το σώμα Σ κάνει ταυτόχρονα δυο αρμονικές ταλαντώσεις. Η ταλάντωση της βάσης δεν είναι απαραίτητο να γίνεται στη διεύθυνση της ταλάντωσης του σώματος.



Το σώμα Σ εκτελεί ταυτόχρονα δυο ταλαντώσεις.
Σχήμα 1-34.

Η κίνηση του σώματος Σ είναι, γενικά, πολύπλοκη. Η διεύθυνση, η συχνότητα, το πλάτος και η φάση της εξαρτώνται από τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά των επί μέρους ταλαντώσεων.

Η κίνηση που κάνει το σώμα λέγεται **σύνθετη ταλάντωση** και η μελέτη της **σύνθεση ταλαντώσεων**.

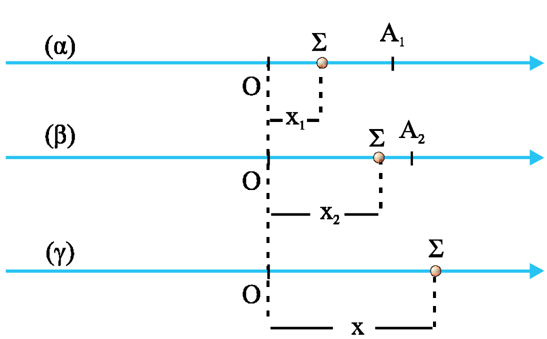
Στη συνέχεια θα μελετήσουμε μερικές ειδικές περιπτώσεις σύνθεσης ταλαντώσεων.

Α. Σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων της ίδιας συχνότητας, που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο στην ίδια διεύθυνση.

Έστω ότι ένα σώμα Σ κάνει ταυτόχρονα τις ταλαντώσεις με εξισώσεις

$$x_1 = A_1 \eta\mu\omega t \qquad \textbf{(1.22)} \qquad (\sigma\chi.\ 1.35\alpha)$$

$$x_2 = A_2 \eta\mu(\omega t + \varphi) \qquad \textbf{(1.23)} \qquad (\sigma\chi.\ 1.35\beta)$$



Το σώμα Σ κάνει ταυτόχρονα τις αρμονικές ταλαντώσεις (α) και (β). Η απομάκρυνσή του κάθε στιγμή είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των απομακρύνσεων του στις επιμέρους ταλαντώσεις στις οποίες μετέχει (γ).
Σχήμα 1-35.

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας των κινήσεων, η απομάκρυνση του σώματος κάθε στιγμή θα είναι το άθροισμα των απομακρύνσεων που θα είχε αν έκανε την κάθε ταλάντωση ξεχωριστά (σχ. 1.35γ), δηλαδή

$$x = x_1 + x_2 \qquad \textbf{(1.24)}$$

Αν λάβουμε υπόψη τις (1.22) και (1.23) η (1.24) γίνεται

$$x = A_1 ημωt + A_2 ημ(ωt + φ) \qquad \textbf{(1.25)}$$

Η σχέση αυτή μπορεί να πάρει τη μορφή

$$x = A\,ημ(ωt + θ) \qquad \textbf{(1.26)}$$

όπου

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2συνφ}} \qquad \textbf{(1.27)}$$

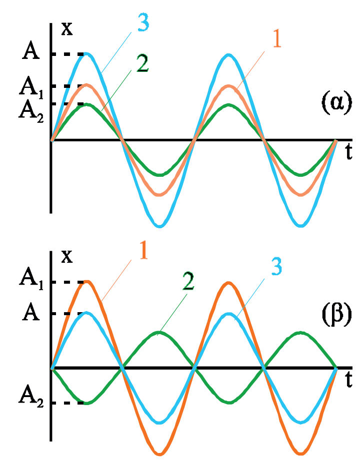
και

$$\boxed{εφθ = \frac{A_2ημφ}{A_1 + A_2συνφ}} \qquad \textbf{(1.28)}$$

Το συμπέρασμα που προκύπτει από την (1.26) είναι ότι το σώμα Σ κάνει απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από το σημείο Ο, με την ίδια διεύθυνση και την ίδια συχνότητα. Το πλάτος και η αρχική φάση της ταλάντωσης εξαρτώνται από τα στοιχεία των επί μέρους ταλαντώσεων.

Στην ειδική περίπτωση που $φ = 0$ (σχ. 1.36α), οι σχέσεις (1.27) και (1.28) δίνουν $A = A_1 + A_2$ και $θ = 0$, δηλαδή το πλάτος της ταλάντωσης είναι ίσο με το άθροισμα των πλατών και η φάση της είναι ίδια με τη φάση των επιμέρους ταλαντώσεων.

Όταν $φ = 180^{o}$, πάλι από (1.27) και (1.28), προκύπτει ότι $A = |A_1 - A_2|$ και $θ = 0$ ή $θ = 180^{o}$ (σχ. 1.36β), δηλαδή το πλάτος είναι ίσο με τη διαφορά των πλατών και η φάση ίση με τη φάση της ταλάντωσης που έχει το μεγαλύτερο πλάτος.



(α) Από τη σύνθεση των ταλαντώσεων 1 και 2 που έχουν την ίδια φάση, προκύπτει η ταλάντωση 3. (β) Από τις ταλαντώσεις 1 και 2 που παρουσιάζουν διαφορά φάσης 180° προκύπτει η ταλάντωση 3.
Σχήμα 1-36.

Β. Σύνθεση δύο αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας διεύθυνσης, που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο, με το ίδιο πλάτος και διαφορετικές συχνότητες.

Έστω ότι το σώμα Σ μετέχει στις ταλαντώσεις

$$x_1 = Aημω_1t \qquad \textbf{(1.29)} \qquad \text{(σχ. 1.35α)}$$

$$x_2 = Aημω_2t \qquad \textbf{(1.30)} \qquad \text{(σχ. 1.35β)}$$

Και στην περίπτωση αυτή, η απομάκρυνση του σώματος κάποια στιγμή θα είναι

$$x = x_1 + x_2 \qquad \textbf{(1.31)} \qquad \text{(σχ. 1.35γ)}$$

η οποία από τις (1.29) και (1.30) γίνεται

$$x = Aημω_1t + Aημω_2t \qquad \textbf{(1.32)}$$

Με βάση την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$ημα + ημβ = 2συν\left(\frac{α-β}{2}\right)ημ\left(\frac{α+β}{2}\right)$$

η (1.32) γίνεται

$$\boxed{x = 2Aσυν\left(\frac{ω_1 - ω_2}{2}t\right)ημ\left(\frac{ω_1 + ω_2}{2}t\right)} \qquad (1.33)$$

Από τη σχέση αυτή φαίνεται ότι η κίνηση του σώματος είναι πολύπλοκη. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η κίνηση στην περίπτωση που οι δύο επιμέρους γωνιακές συχνότητες διαφέρουν πολύ λίγο. Τότε ο παράγοντας

$$A' = 2Aσυν\left(\frac{ω_1 - ω_2}{2}t\right) \qquad (1.34)$$

της σχέσης (1.33) μεταβάλλεται με το χρόνο πολύ πιο αργά από τον παράγοντα $ημ\left(\frac{ω_1 + ω_2}{2}t\right)$, ο οποίος μεταβάλλεται με γωνιακή συχνότητα $\bar{ω}$ ίση με τη μέση τιμή των $ω_1$ και $ω_2$. Επειδή αυτές διαφέρουν ελάχιστα μπορούμε να γράψουμε $\bar{ω} \approx ω_1 \approx ω_2$.

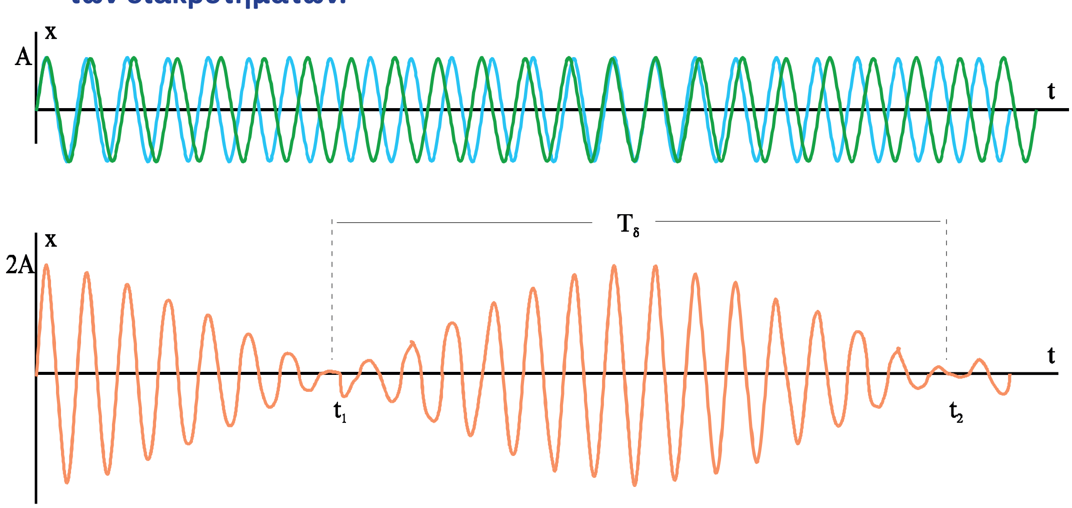
Επομένως η (1.33) μπορεί να γραφεί

$$x = A'ημ\bar{ω}t \qquad (1.35)$$

Η σχέση (1.35) περιγράφει μια ιδιόμορφη ταλάντωση που έχει την ίδια περίπου συχνότητα με τις επί μέρους ταλαντώσεις.

Το πλάτος $|A'|$ της κίνησης του Σ μεταβάλλεται, με αργό ρυθμό, από μηδέν μέχρι $2A$. Λέμε ότι η κίνηση του Σ παρουσιάζει **διακροτήματα** (σχ. 1.37).

Ο χρόνος ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς (ή δύο διαδοχικές μεγιστοποιήσεις) του πλάτους ονομάζεται περίοδος ($T_δ$) των διακροτημάτων.



Από τη σύνθεση δύο ταλαντώσεων που οι συχνότητές τους διαφέρουν πολύ λίγο (πράσινη και μπλε γραμμή) προκύπτει ιδιόμορφη περιοδική κίνηση (κόκκινη γραμμή) που παρουσιάζει διακροτήματα.

Σχήμα 1-37.

Υπολογισμός της περιόδου των διακροτημάτων

Το πλάτος A' μηδενίζεται όταν $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t_1\right)=0$.

Αυτό συμβαίνει όταν $\frac{|\omega_1-\omega_2|}{2}t=(2K+1)\frac{\pi}{2}$

όπου $K=0,1,2,.....$

Δύο διαδοχικές χρονικές στιγμές που αποτελούν λύσεις της εξίσωσης είναι οι t_1 και t_2 (σχ. 1.37) για τις οποίες

$$\frac{|\omega_1-\omega_2|}{2}t_1=\frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad t_1=\frac{\pi}{|\omega_1-\omega_2|}$$

και

$$\frac{|\omega_1-\omega_2|}{2}t_2=\frac{3\pi}{2} \quad \text{ή} \quad t_2=\frac{3\pi}{|\omega_1-\omega_2|}$$

Η διαφορά t_2-t_1 είναι η **περίοδος των διακροτημάτων**.

Είναι επομένως $T_\delta=t_2-t_1=\frac{3\pi}{|\omega_1-\omega_2|}-\frac{\pi}{|\omega_1-\omega_2|}=\frac{2\pi}{|\omega_1-\omega_2|}$

ή $\quad T_\delta=\frac{1}{|f_1-f_2|} \quad$ ή $\quad \frac{1}{f_\delta}=\frac{1}{|f_1-f_2|}$

και τελικά

$$\boxed{f_\delta=|f_1-f_2|}$$

Σύνοψη

Απλή αρμονική ταλάντωση ονομάζεται η ταλάντωση στην οποία η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας δίνεται από τη σχέση

$$x=A\eta\mu\omega t$$

Στην ταλάντωση αυτή η ταχύτητα και η επιτάχυνση μεταβάλλονται με το χρόνο σύμφωνα με τις σχέσεις

$\upsilon=\upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\omega t$ και $a=-a_{max}\eta\mu\omega t$ όπου $\upsilon_{max}=\omega A$ και $\alpha_{max}=\omega^2 A$

Η δύναμη που αναγκάζει ένα σώμα να κάνει απλή αρμονική ταλάντωση είναι $F=-Dx$ και ονομάζεται **δύναμη επαναφοράς**. Η σχέση $F=-Dx$ αποτελεί την αναγκαία συνθήκη για να εκτελέσει ένα κινητό απλή αρμονική ταλάντωση.

Η **περίοδος** σε μια απλή αρμονική ταλάντωση είναι

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

Στην απλή αρμονική ταλάντωση η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή.

$$E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2_{max}$$

Το κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων αποτελείται από ένα πυκνωτή συνδεδεμένο σε σειρά με ιδανικό πηνίο. Αν ένα τέτοιο κύκλωμα διεγερθεί, το φορτίο του πυκνωτή και το ρεύμα μεταβάλλονται με το χρόνο σύμφωνα με τις σχέσεις

$$q = Q\text{συν}\omega t \qquad\qquad i = -I\text{ημ}\omega t$$

Η ολική ενέργεια του κυκλώματος θεωρείται σταθερή και είναι

$$E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}LI^2$$

Φθίνουσες ονομάζονται οι ταλαντώσεις στις οποίες το πλάτος μειώνεται.
Η περίοδος σε μια φθίνουσα ταλάντωση διατηρείται σταθερή. Όταν η σταθερά απόσβεσης b μεγαλώνει το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται πιο γρήγορα. Για πολύ μεγάλες τιμές της σταθεράς απόσβεσης η ταλάντωση γίνεται απεριοδική. Σε μια φθίνουσα ταλάντωση το πλάτος μειώνεται εκθετικά με το χρόνο.

Ιδιοσυχνότητα ενός συστήματος είναι η συχνότητα με την οποία ταλαντώνεται ελεύθερα το σύστημα. Σε μια **εξαναγκασμένη ταλάντωση** η συχνότητα ταλάντωσης είναι η συχνότητα του διεγέρτη. Το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης διατηρείται σταθερό και εξαρτάται από τη συχνότητα του διεγέρτη. Όταν η συχνότητα του διεγέρτη γίνει ίση με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος το πλάτος της ταλάντωσης μεγιστοποιείται και έχουμε **συντονισμό**.

Η κίνηση που προκύπτει από **τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων** εξαρτάται από τις συχνότητες, τα πλάτη, τη διαφορά φάσης και τις διευθύνσεις των επί μέρους αρμονικών ταλαντώσεων.
Από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, της ίδιας διεύθυνσης και συχνότητας που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο, προκύπτει απλή αρμονική ταλάντωση.
Από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, της ίδιας διεύθυνσης που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο με συχνότητες που διαφέρουν πολύ λίγο, προκύπτει περιοδική κίνηση που παρουσιάζει **διακροτήματα**.
Η συχνότητα των διακροτημάτων είναι

$$f_\delta = |f_1 - f_2|$$

Δραστηριότητες

1. Εξαναγκασμένη ταλάντωση και ιδιοσυχνότητα ταλαντωτή

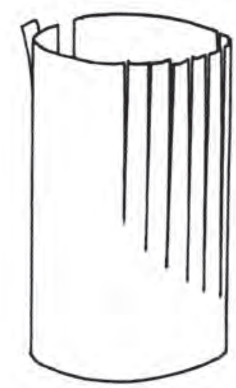
Στερεώστε στο ένα άκρο ενός ελατηρίου μεγάλου μήκους ένα σώμα. Κρατήστε την άλλη άκρη του ελατηρίου με το χέρι σας. Αρχίστε να ταλαντώνετε το άκρο που κρατάτε με όσο γίνεται πιο σταθερό ρυθμό (συχνότητα). Δοκιμάστε το ίδιο για διαφορετικές συχνότητες. Για κάποιες συχνότητες (πολύ μικρότερες ή πολύ μεγαλύτερες της ιδιοσυχνότητας του ταλαντωτή) το πλάτος ταλάντωσης του σώματος είναι μικρό ακόμη κι αν το πλάτος ταλάντωσης του χεριού είναι μεγάλο. Για κάποια συχνότητα ταλάντωσης του χεριού το πλάτος ταλάντωσης του σώματος γίνεται μέγιστο. Έχετε τώρα εντοπίσει την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή.

Δοκιμάστε το ίδιο αφού αντικαταστήσετε το πρώτο σώμα με ένα άλλο που έχει μάζα το ένα τέταρτο της μάζας του πρώτου. Τώρα η ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή πρέπει να έχει γίνει περίπου διπλάσια της προηγούμενης.

Σκεφτείτε, γιατί διπλασιάστηκε η ιδιοσυχνότητα;

2. Συντονισμός

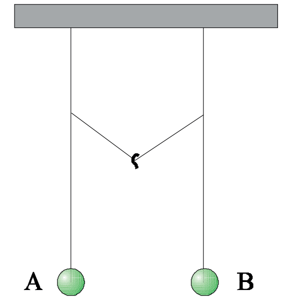
Πάρτε ένα κουτί αναψυκτικού και αδειάστε το περιεχόμενό του. Αφαιρέστε ολόκληρη την πάνω βάση του. Με ένα μεγάλο ψαλίδι κόψτε στο πλευρικό του τοίχωμα επτά κατακόρυφες λουρίδες, τη μια δίπλα στην άλλη. Οι λουρίδες πρέπει να έχουν το ίδιο πλάτος αλλά διαφορετικά μήκη (η πρώτη να έχει μήκος περίπου ίσο με το ένα τρίτο του ύψους του κουτιού και η τελευταία περίπου ίσο με τα δύο τρίτα του ύψους). Φροντίστε ώστε οι λουρίδες να έχουν σταθερό πλάτος και να υπάρχει ανάμεσά τους ένα μικρό διάκενο ώστε να μπορούν να κινούνται ελεύθερα χωρίς να ακουμπούν στις διπλανές τους. Οι επτά λουρίδες πρέπει να καταλαμβάνουν περίπου το μισό της πλευρικής επιφάνειας του κουτιού. Ακριβώς απέναντι από την τέταρτη λουρίδα (αντιδιαμετρικά) κόψτε μια ακόμη λουρίδα με το ίδιο μήκος με την τέταρτη.


Σχήμα 1-38.

Θέστε σε ταλάντωση την τελευταία λουρίδα που κόψατε και δείτε ποια από τις απέναντι λουρίδες ταλαντώνεται με μεγαλύτερο πλάτος. Πώς ερμηνεύετε την παρατήρηση;

3. Συζευγμένα εκκρεμή

Όταν υπάρχει δυνατότητα να μεταφέρεται ενέργεια από ένα ταλαντούμενο σύστημα σε ένα άλλο τότε λέμε ότι τα δύο συστήματα βρίσκονται σε σύζευξη. Δύο τέτοια συστήματα παριστάνονται στο σχήμα 1.39. Η περίοδος ενός εκκρεμούς εξαρτάται μόνο από το μήκος του σχοινιού του και την επιτάχυνση της βαρύτητας. Τα δύο εκκρεμή στο σχήμα έχουν το ίδιο μήκος σχοινιού, επομένως την ίδια ιδιοσυχνότητα και είναι συνδεδεμένα με ένα νήμα στο οποίο έχουμε τοποθετήσει ένα μικρό βάρος π.χ. ένα κομματάκι σύρμα. Κατασκευάστε



Σχήμα 1-39.

τη διάταξη. Θέστε σε ταλάντωση το εκκρεμές Α απομακρύνοντας το σφαιρίδιό του σε διεύθυνση κάθετη από το επίπεδο που ορίζεται από τα δύο εκκρεμή. Παρατηρήστε την κίνηση των δύο εκκρεμών. Προσπαθήστε να περιγράψετε ενεργειακά το φαινόμενο.

Ερωτήσεις

Απλή αρμονική ταλάντωση

1.1 Ένα σώμα δεμένο στην άκρη κατακόρυφου ελατήριου του οποίου η άλλη άκρη είναι στερεωμένη ακλόνητα, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A. Εάν διπλασιάσουμε το πλάτος της ταλάντωσης, ποια από τα μεγέθη

α) συχνότητα

β) μέγιστη ταχύτητα υ_{max}

γ) μέγιστη επιτάχυνση a_{max}

δ) σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης

ε) ενέργεια της ταλάντωσης

θα μεταβληθούν;

1.2 Ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση βρίσκεται τη χρονική στιγμή μηδέν στη θέση ισορροπίας. Ποια είναι η αρχική φάση της ταλάντωσής του; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. Αν γνωρίζουμε τη θέση στην οποία βρίσκεται το σώμα τη χρονική στιγμή μηδέν, μπορούμε πάντα να υπολογίσουμε την αρχική φάση της ταλάντωσής του ή πρέπει να γνωρίζουμε και την κατεύθυνση προς την οποία κινείται;

1.3 Ποια από τις επόμενες σχέσεις ανάμεσα στη συνολική δύναμη F που ασκείται σε ένα σώμα και στη θέση x του σώματος αναφέρεται σε μία απλή αρμονική ταλάντωση;
α) $F = 10x$ β) $F = -100x^2$ γ) $F = -5x$ δ) $F = 50x^2$

1.4 Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

α) Σε ποιες θέσεις η ταχύτητα, η επιτάχυνση και η συνολική δύναμη είναι: 1) μηδέν; 2) μέγιστη;

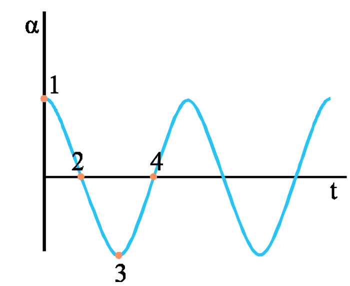
β) Σε ποιες θέσεις η κινητική ενέργεια είναι ίση με τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης;

1.5 Συμπληρώστε τις τιμές που λείπουν στον επόμενο πίνακα ο οποίος αναφέρεται στην απλή αρμονική ταλάντωση ενός σώματος.

x	U	K
0		
x_1	3 J	2 J
x_2	4 J	
A		

1.6 Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο T. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση μέγιστης απομάκρυνσης ($x = A$). Ποια χρονική στιγμή
α) θα περάσει για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπίας;
β) θα φτάσει πρώτη φορά στη θέση $x = -A$;
γ) θα περάσει για δεύτερη φορά από τη θέση ισορροπίας;

1.7 Το διάγραμμα του σχήματος 1.40 παριστάνει την επιτάχυνση ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, σε συνάρτηση με το χρόνο.
α) Ποιο σημείο του διαγράμματος αντιστοιχεί σε απομάκρυνση $-A$;
β) Στο σημείο 4 του διαγράμματος η ταχύτητα της ταλάντωσης είναι θετική, αρνητική ή μηδέν;
γ) Σε ποια απομάκρυνση αντιστοιχεί το σημείο 4 του διαγράμματος;



Σχήμα 1-40.

1.8 Στα κάτω άκρα δύο κατακόρυφων ελατηρίων Α και Β ισορροπούν δύο σώματα με μάζες m_A και m_B αντίστοιχα ($m_A > m_B$). Στην κατάσταση αυτή τα δύο ελατήρια έχουν την ίδια επιμήκυνση. Απομακρύνουμε και τα δύο σώματα κατακόρυφα προς τα κάτω κατά d και τα αφήνουμε ελεύθερα, οπότε εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση. Το σύστημα $A - m_A$ έχει ενέργεια
α) ίση με την ενέργεια που έχει το σύστημα $B - m_B$.
β) μεγαλύτερη από την ενέργεια του συστήματος $B - m_B$.
γ) μικρότερη από την ενέργεια του συστήματος $B - m_B$.

Κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων

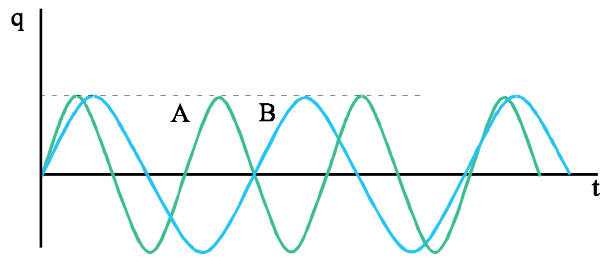
1.9 Η περίοδος με την οποία ταλαντώνεται ένα κύκλωμα LC είναι 3×10^{-6}s. Τη στιγμή μηδέν ο οπλισμός Α του πυκνωτή έχει μέγιστο θετικό φορτίο. Μετά από πόσο χρόνο, για πρώτη φορά,
α) ο οπλισμός Α θα αποκτήσει μέγιστο αρνητικό φορτίο;
β) ο οπλισμός Α θα αποκτήσει ξανά μέγιστο θετικό φορτίο;
γ) η τάση στον πυκνωτή θα γίνει μηδέν;
δ) η ενέργεια στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου θα γίνει μέγιστη;

1.10 Ένας φορτισμένος πυκνωτής συνδέεται με ιδανικό πηνίο σε κλειστό κύκλωμα. Γιατί δεν εκφορτίζεται ακαριαία ο πυκνωτής;

1.11 Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα, που αναφέρεται σε ένα κύκλωμα αμείωτων ηλεκτρικών ταλαντώσεων.

U_E	80x10^{-3}J	120x10^{-3}J		
U_B			50x10^{-3}J	120x10^{-3}J
E	120x10^{-3}J			

1.12 Διαθέτουμε δύο κυκλώματα ηλεκτρικών ταλαντώσεων, τα Α και Β. Οι χωρητικότητες των πυκνωτών στα δύο κυκλώματα είναι ίσες. Στο σχήμα 1.41 παριστάνεται το φορτίο στους πυκνωτές των κυκλωμάτων A και B, σε συνάρτηση με το χρόνο. Να συγκρίνετε τις τιμές α) της αυτεπαγωγής των πηνίων β) του μέγιστου ρεύματος, στα δύο κυκλώματα.



Σχήμα 1-41.

1.13 Διαθέτουμε δύο κυκλώματα ηλεκτρικών ταλαντώσεων. Τα κυκλώματα A και B, με $C_B = 2C_A$ και $L_B = L_A / 2$. Τα κυκλώματα διεγείρονται σε ηλεκτρική ταλάντωση από πηγή τάσης V. Να συγκρίνετε:
α) Το μέγιστο φορτίο στους πυκνωτές.
β) Τις ενέργειες στα δύο κυκλώματα.
γ) Τις περιόδους της ηλεκτρικής ταλάντωσης που εκτελούν.
δ) Το μέγιστο ρεύμα στα δύο κυκλώματα.

1.14 Ιδανικό κύκλωμα LC εκτελεί ηλεκτρική ταλάντωση με συχνότητα 100kHz. Στο κύκλωμα έχουμε τη δυνατότητα να μεταβάλλουμε το συντελεστή αυτεπαγωγής L του πηνίου μετακινώντας τον πυρήνα μαλακού σιδήρου που υπάρχει σ' αυτό. Αν μειώσουμε το συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου σε $L/4$, η συχνότητα της ηλεκτρικής ταλάντωσης του κυκλώματος θα γίνει:
α) 25kHz β) 50kHz γ) 200kHz δ) 400kHz
Σημειώστε τη σωστή απάντηση.

1.15 Σε κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων φέρουμε στιγμιαία τους οπλισμούς του πυκνωτή σε επαφή με τους πόλους μπαταρίας 1,5V. Το κύκλωμα διεγείρεται και εκτελεί ταλάντωση. Αν η διέγερση του κυκλώματος γινόταν με μπαταρία 3V.
1) η ολική ενέργεια στο κύκλωμα θα ήταν
   α) η ίδια   β) διπλάσια   γ) τετραπλάσια
2) το μέγιστο ρεύμα στο κύκλωμα θα ήταν
   α) το ίδιο   β) διπλάσιο   γ) τετραπλάσιο

1.16 Συμπληρώστε τα κενά:
Όπως στις αμείωτες μηχανικές ταλαντώσεις η κινητική ενέργεια του συστήματος μετατρέπεται περιοδικά σε .... και η ολική ενέργεια του συστήματος διατηρείται, έτσι και στις αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις η .... πεδίου μετατρέπεται περιοδικά σε ....πεδίου ενώ το άθροισμά τους ....

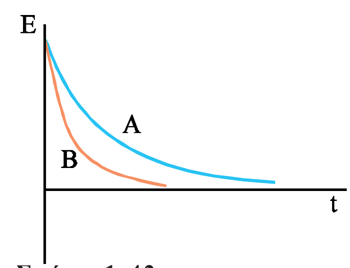
Φθίνουσα, ελεύθερη και εξαναγκασμένη ταλάντωση. Συντονισμός.

1.17 Το έργο της δύναμης που προκαλεί την απόσβεση σε μια ταλάντωση είναι
α) θετικό αν το ταλαντούμενο σώμα κινείται προς τη θετική κατεύθυνση.
β) πάντα θετικό.
γ) πάντα αρνητικό.
Επιλέξτε το σωστό.

1.18 Σε μία φθίνουσα ταλάντωση, η ενέργεια της ταλάντωσης
α) παραμένει σταθερή.
β) μειώνεται με σταθερό ρυθμό.
γ) μειώνεται εκθετικά με το χρόνο.
δ) αυξάνεται.
Επιλέξτε το σωστό.

1.19 Ένας ταλαντωτής τη στιγμή t_1 έχει ενέργεια E και πλάτος ταλάντωσης A. Η ενέργεια που έχει χάσει ο ταλαντωτής μέχρι τη στιγμή t_2, που το πλάτος της ταλάντωσης έχει μειωθεί στο μισό, είναι α) $E/2$; β) $E/4$; γ) $3E/4$;
Επιλέξτε το σωστό.

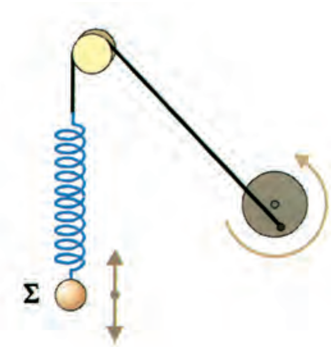
1.20 Στο σχήμα 1.42 φαίνεται το διάγραμμα της ολικής ενέργειας E δύο κυκλωμάτων ηλεκτρικών ταλαντώσεων Α και Β, σε συνάρτηση με το χρόνο. Οι πυκνωτές στα δύο κυκλώματα έχουν την ίδια χωρητικότητα και τα πηνία τον ίδιο συντελεστή αυτεπαγωγής. Ποιο από τα δύο παρουσιάζει μεγαλύτερη ωμική αντίσταση;



Σχήμα 1-42.

1.21 Ένα σώμα εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση. Ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστές;
α) Το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται με το χρόνο.
β) Η συχνότητα ταλάντωσης είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος.
γ) Το πλάτος της ταλάντωσης εξαρτάται από τη συχνότητα του διεγέρτη.
δ) Η ενέργεια που χάνεται λόγω των αποσβέσεων αναπληρώνεται από το διεγέρτη.

1.22 Σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση κατά το συντονισμό
α) Η ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή είναι μέγιστη.
β) Η ενέργεια της ταλάντωσης είναι μέγιστη.
γ) Το πλάτος της ταλάντωσης είναι μέγιστο.
δ) Το ταλαντούμενο σύστημα δε χάνει ενέργεια.
Επιλέξτε τα σωστά.



Σχήμα 1-43.

1.23 Το σώμα του σχήματος 1.43 κάνει εξαναγκασμένη ταλάντωση. Διαπιστώθηκε ότι όταν η συχνότητα του διεγέρτη παίρνει τις τιμές $f_1 = 2Hz$ και $f_2 = 6Hz$ το πλάτος της ταλάντωσης είναι το ίδιο. Για την ιδιοσυχνότητα f_0 του συστήματος ισχύει

α) $f_0 < f_1$

β) $f_1 < f_0 < f_2$

γ) $f_0 > f_2$

Επιλέξτε το σωστό.

1.24 Να αποδείξετε ότι αν το πλάτος μιας φθίνουσας ταλάντωσης μειώνεται σύμφωνα με τη σχέση $A = A_0 e^{-\Lambda t}$ οι τιμές A_1 A_2 A_3 .... του πλάτους και E_1 E_2 E_3.... της ενέργειας της ταλάντωσης κατά τις χρονικές στιγμές T, $2T$, $3T$ ...., ικανοποιούν τις σχέσεις:

α) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{A_2}{A_3} = \dfrac{A_3}{A_4}.....$

β) $\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{E_2}{E_3} = \dfrac{E_3}{E_4}.....$

Σύνθεση ταλαντώσεων

1.25 Ένα σώμα κάνει ταυτόχρονα δυο αρμονικές ταλαντώσεις της ίδιας συχνότητας που γίνονται πάνω στην ίδια ευθεία, γύρω από το ίδιο σημείο. Τα πλάτη των ταλαντώσεων είναι, αντίστοιχα, 5cm και 3cm. Αν οι δύο ταλαντώσεις έχουν την ίδια φάση τότε το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα είναι A=...................... ενώ αν οι ταλαντώσεις έχουν διαφορά φάσης 180° το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος είναι A=......................

1.26 Ένα σώμα κάνει ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις του ίδιου πλάτους A και της ίδιας διεύθυνσης. Οι συχνότητες f_1 και f_2 των δύο ταλαντώσεων διαφέρουν λίγο μεταξύ τους. Ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι ορθές;

α) Το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

β) Το πλάτος της ταλάντωσης μεταβάλλεται με το χρόνο.

γ) Η μέγιστη τιμή του πλάτους είναι $2A$.

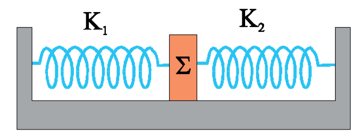
δ) Ο χρόνος ανάμεσα σε δύο διαδοχικές μεγιστοποιήσεις του πλάτους είναι σταθερός.

ε) Ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς του πλάτους εξαρτάται από τη διαφορά $f_1 - f_2$ και μεγαλώνει όταν η διαφορά αυτή ελαττώνεται.

Ασκήσεις

Απλή αρμονική ταλάντωση

1.27 Κάθε ελατήριο στο σχήμα 1.44 έχει το ένα άκρο του στερεωμένο σε ακίνητο σημείο και το άλλο του άκρο προσδεμένο στο σώμα Σ. Οι σταθερές των δύο ελατηρίων είναι K_1 = 120N/m και K_2 = 80N/m. Το σώμα Σ, έχει μάζα m = 2kg και μπορεί να κινείται χωρίς τριβές. Να αποδείξετε ότι η κίνηση που θα εκτελέσει το σώμα $Σ$, αν εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας του κατά τη διεύθυνση του άξονα των ελατηρίων είναι απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδο της ταλάντωσης.



Σχήμα 1-44.

[Απ: T=0,2π s]

1.28 Σώμα μάζας m = 2 kg κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι A = 0,5 m. Όταν το σώμα απέχει από τη θέση ισορροπίας του $x_1 = 0{,}3$ m η ταχύτητά του είναι $\upsilon_1 = 4\text{m}/\text{s}$.

α) Υπολογίστε τη σταθερά D της ταλάντωσης.

β) Υπολογίστε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος όταν η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας είναι x_2= 0,4 m.

[Απ: α) D= 200 N/m β) υ=3 m/s]

1.29 Στην ελεύθερη άκρη κατακόρυφου ελατηρίου κρέμεται σώμα άγνωστης μάζας. Η επιμήκυνση του ελατηρίου, όταν το σώμα ισορροπεί είναι $\Delta l = 2{,}5cm$. Να υπολογίσετε την περίοδο της κατακόρυφης ταλάντωσης που θα κάνει το σώμα, αν το απομακρύνουμε κατακόρυφα από τη θέση ισορροπίας του και το αφήσουμε ελεύθερο.
Δίνεται $\text{g} = 10\text{m}/\text{s}^2$.

[Απ: 0,314 s]

Ηλεκτρικές ταλαντώσεις

1.30 Κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων αποτελείται από πυκνωτή χωρητικότητας C = 5 μF και πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L = 4×10^{-3} H. Να υπολογίσετε τη συχνότητα με την οποία ταλαντώνεται το κύκλωμα, αν διεγερθεί.

[Απ: 1126 Hz]

1.31 Κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων με πυκνωτή χωρητικότητας $C = 20\times10^{-6}$ F και πηνίο αυτεπαγωγής $L = 5\times10^{-2}$ H διεγείρεται σε ταλάντωση. Για τη διέγερση του κυκλώματος, τη χρονική στιγμή μηδέν ο πυκνωτής έρχεται στιγμιαία σε επαφή με τους πόλους πηγής τάσης V = 50 V. Να γράψετε τις σχέσεις του φορτίου στον πυκνωτή και της έντασης του ρεύματος στο κύκλωμα, σε συνάρτηση με το χρόνο.

[Απ: $q=10^{-3}$ συν1000t i=-1ημ1000t (S.I.)]

Φθίνουσες και εξαναγκασμένες ταλαντώσεις. Συντονισμός.

1.32 Σώμα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση το πλάτος της οποίας μειώνεται σύμφωνα με τη σχέση $A = A_0 e^{-\Lambda t}$. Τη στιγμή t = 0 η ταλάντωση είχε πλάτος $A_0 = 32cm$ ενώ τη στιγμή $t_1 = 10s$ το πλάτος γίνεται $A_1 = 16cm$. Ποια χρονική στιγμή το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι $A = 1cm$.

[Απ: 50s]

Σύνθεση ταλαντώσεων

1.33 Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις, με εξισώσεις $x_1 = 4\ \eta\mu 50t$ και $x_2 = 4\ \eta\mu(50t - \pi)$ (S.I.), που γίνονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από το ίδιο σημείο. Ποιο είναι το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος;

[Απ: 0]

1.34 Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις με εξισώσεις, $x_1 = 10\ \eta\mu 50t$ και $x_2 = 4\ \eta\mu 50t$, που γίνονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από το ίδιο σημείο. Τα πλάτη των δύο ταλαντώσεων είναι μετρημένα σε cm. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης, που εκτελεί το σώμα.

[Απ: x=0,14 ημ50t (S.I.)]

1.35 Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις με εξισώσεις $x_1 = 8\ \eta\mu 50\pi t$ και $x_2 = 6\ \eta\mu(50\pi t - \pi)$, που γίνονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από το ίδιο σημείο. Τα πλάτη των δύο ταλαντώσεων είναι μετρημένα σε cm. Να γράψετε τις σχέσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο και να υπολογίσετε την περίοδο της ταλάντωσής του.

[Απ: υ=3,14 συν50πt (m/s), α=-493 ημ50πt (m/s^2), T=0,04s]

1.36 Το διαπασών παράγει αρμονικό ήχο που εξαναγκάζει το τύμπανο του αφτιού να κάνει ταλάντωση. Ένας παρατηρητής ακούει τον ήχο από δύο διαπασών, που λειτουργούν ταυτόχρονα και παράγουν ήχους με συχνότητες $f_1 = 2500$ Hz και $f_2 = 2500{,}5$ Hz. Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται έναν ήχο που άλλοτε «σβήνει» (το πλάτος της ταλάντωσης μηδενίζεται) και άλλοτε αποκτά μέγιστη ένταση (το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται μέγιστο). Ποιος είναι ο χρόνος ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς της έντασης του ήχου;

[Απ: 2 s]

Προβλήματα

1.37 Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο $T = 0{,}2\pi$ s. Τη χρονική στιγμή μηδέν το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = 2$cm και έχει ταχύτητα $\upsilon = -0{,}2\sqrt{3}$m/s. Να γράψετε τις σχέσεις που δίνουν την απομάκρυνση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο.

[Απ: $x = 4\times 10^{-2}\eta\mu\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right)$, $\upsilon = 0{,}4\sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right)$,

$a = -4\eta\mu\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right)$, (S.I.)]

1.38 Στην κάτω άκρη κατακόρυφου ελατηρίου, σταθεράς $K = 100$ N/m, ή άλλη άκρη του οποίου είναι στερεωμένη σε ακλόνητο σημείο, ισορροπεί σώμα μάζας $m = 1$ kg. Το σώμα απομακρύνεται κατακόρυφα προς τα κάτω κατά $d = 5\ cm$ από τη θέση ισορροπίας του και τη στιγμή μηδέν αφήνεται ελεύθερο.
Να υπολογίσετε:
α) τη συχνότητα της ταλάντωσης που θα εκτελέσει.
β) την αρχική φάση στην ταλάντωσή του.
γ) τη μέγιστη ταχύτητα που αποκτά κατά την κίνησή του.
δ) τη μέγιστη επιτάχυνση που έχει.
ε) τη μέγιστη δύναμη που δέχεται από το ελατήριο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής του.
Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.

[Απ: α) 5/π Hz β) π/2 ή 3π/2 γ) 0,5 m/s δ) 5 m/s² ε) 15 N]

1.39 Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A = 20$ cm με περίοδο $T = 10$ s. Τη χρονική στιγμή μηδέν το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας. Να υπολογιστεί επί πόσο χρόνο (μέχρι να επιστρέψει στη θέση ισορροπίας) η απομάκρυνσή του θα είναι μεγαλύτερη από $x = 10$ cm.

[Απ: 10/3 s]

1.40 Ο εμπρόσθιος προφυλακτήρας ενός αυτοκινήτου συμπεριφέρεται σαν ιδανικό ελατήριο σταθεράς $K = 25\times10^5\ \mathrm{N/m}$.
α) Η μάζα του οχήματος, μαζί με τους επιβάτες του είναι $M = 1000\ kg$. Το αυτοκίνητο συγκρούεται μετωπικά με ακίνητο εμπόδιο, ενώ κινείται με ταχύτητα $\upsilon = 18$ km/h. Υπολογίστε τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου -προφυλακτήρα- καθώς και τη χρονική διάρκεια της συσπείρωσης.
β) Ένας επιβάτης έχει μάζα $m = 60$ kg. Υπολογίστε τη μέγιστη οριζόντια δύναμη που πρέπει να δεχτεί από τη ζώνη πρόσδεσης, ώστε να μην εκτιναχτεί από το κάθισμα κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης.

Σημείωση: Θα θεωρήσετε ότι κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης οι τριβές και οι αντιστάσεις είναι αμελητέες και ότι ο κινητήρας του οχήματος δε λειτουργεί.

[Απ: α) 0,1 m, π/100 s, β) 15×10³ N]

1.41 Ακίνητο σώμα μάζας $M = 100$ g βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και είναι προσδεμένο στην άκρη οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $K = 300$ N/m, η άλλη άκρη του οποίου είναι στερεωμένη ακλόνητα. Βλήμα μάζας $m = 20$ g, που κινείται στη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου με ταχύτητα $\upsilon = 30$ m/s, συγκρούεται με το σώμα M και σφηνώνεται σε αυτό. Να υπολογίσετε:
α) την κοινή ταχύτητα που αποκτούν τα δύο σώματα αμέσως μετά τη σύγκρουση.
β) το διάστημα που θα διανύσει το συσσωμάτωμα, μέχρι να σταματήσει στιγμιαία για πρώτη φορά.

γ) σε πόσο χρόνο από τη στιγμή της σύγκρουσης το συσσωμάτωμα θα σταματήσει στιγμιαία για πρώτη φορά.

Η χρονική διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα.

[Απ: 5 m/s, 0,1 m, 3,14×10^{-2} s]

1.42 Κύκλωμα LC εκτελεί ηλεκτρική ταλάντωση με συχνότητα $\frac{5000}{\pi} Hz$. Το μέγιστο φορτίο στον πυκνωτή είναι $Q = 5\times10^{-7} C$.

α) Να υπολογίσετε το πλάτος της έντασης του ρεύματος στο κύκλωμα και το φορτίο του πυκνωτή τη στιγμή που το ρεύμα στο κύκλωμα είναι $i = 3\times10^{-3} A$.

β) Θεωρήστε ότι η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι $1\mu F$. Να παραστήσετε σε κοινούς άξονες την ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή, την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου και την ολική ενέργεια σε συνάρτηση με το φορτίο του πυκνωτή.

[Απ: 5mA 4×10^{-7}C]

1.43 Πυκνωτής χωρητικότητας $C = 4\times10^{-5} F$ φορτίζεται σε τάση $V = 100$ V. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ οι οπλισμοί του συνδέονται στα άκρα πηνίου με συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 0{,}9$ H και το κύκλωμα εκτελεί ηλεκτρική ταλάντωση.

α) Ποιο είναι το μέγιστο φορτίο που απέκτησε ο πυκνωτής κατά τη φόρτισή του;

β) Ποιο είναι το φορτίο του πυκνωτή τις στιγμές που η ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή είναι ίση με την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου στο πηνίο;

γ) Ποια χρονική στιγμή η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου γίνεται, για πρώτη φορά, ίση με την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου;

[Απ: α) $4\times10^{-3} C$ β) $2\sqrt{2}\times10^{-3} C$ γ) $1{,}5\pi\times10^{-3} s$]

1.44 Κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων περιλαμβάνει πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 16$ mH και πυκνωτή χωρητικότητας $C = 4\times10^{-5}$ F. Κάποια στιγμή το φορτίο στον πυκνωτή είναι $q = 20$ μC και η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα $i = 25\sqrt{3}$ mA. Ποιο είναι το μέγιστο φορτίο που αποκτά ο πυκνωτής κατά την ηλεκτρική ταλάντωση;

[Απ: 40 μC]

1.45 Σώμα μάζας $m = 2\ kg$ εκτελεί ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις της ίδιας διεύθυνσης γύρω από το ίδιο σημείο. Οι εξισώσεις των ταλαντώσεων είναι $x_1 = 10\ \eta\mu 50\pi t$ και $x_2 = 5\ \eta\mu(50\pi t - \pi)$. Τα πλάτη των δύο ταλαντώσεων είναι μετρημένα σε cm.

α) Ποια είναι η σταθερά D της αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα;

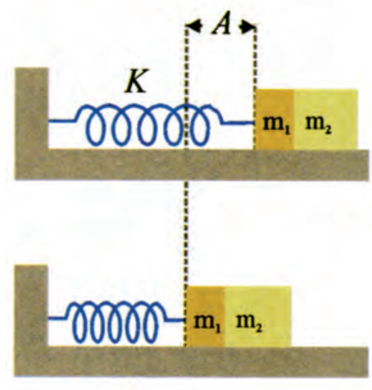
β) Ποια είναι η ενέργεια της ταλάντωσης;

γ) Ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητας του σώματος όταν η απομάκρυνσή του είναι $x=4$ cm;
Δίνεται $\pi^2 \approx 10$.

[Απ: $D = 5\times10^4\,N/m$, $E = 62{,}5\,J$, $\upsilon = 3\sqrt{2{,}5}\,\text{m/s}$]

1.46 Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 του σχήματος είναι τοποθετημένα σε λείο οριζόντιο επίπεδο και εφάπτονται μεταξύ τους. Το Σ_1 είναι δεμένο στην άκρη οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $k = 100\ N/m$. Το ελατήριο έχει το φυσικό μήκος του και τα σώματα ισορροπούν. Μετακινούμε τα σώματα ώστε το ελατήριο να συσπειρωθεί κατά $A = 40\ cm$ και στη συνέχεια τα αφήνουμε ελεύθερα. Να βρείτε:
α) τη θέση στην οποία θα αποχωρισθεί το Σ_2 από το Σ_1.
β) το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το Σ_1 αφού αποχωρισθεί από το Σ_2.
γ) την απόσταση των σωμάτων όταν η ταχύτητα του Σ_1 μηδενίζεται για πρώτη φορά.
Δίνονται οι μάζες των σωμάτων $m_1 = 1\ kg$ και $m_2 = 3\ kg$ αντίστοιχα.

[Απ: α) στη θέση ισορροπίας β) 20 cm, γ) 11,4 cm]

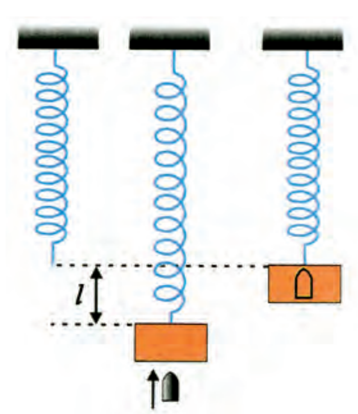


Σχήμα 1-45.

1.47 Κατακόρυφο ελατήριο με σταθερά $K = 100N/m$ έχει το κάτω άκρο του στερεωμένο στο δάπεδο. Στο επάνω άκρο του ελατηρίου έχει προσδεθεί σώμα Σ_1, μάζας $m_1 = 1kg$, που ισορροπεί. Δεύτερο σώμα Σ_2, μάζας m_2 βρίσκεται πάνω από το πρώτο σε άγνωστο ύψος h. Μετακινούμε το σώμα Σ_1 προς τα κάτω κατά $l = 0{,}2m$ και το αφήνουμε ελεύθερο, ενώ την ίδια στιγμή αφήνουμε ελεύθερο και το δεύτερο σώμα.
α) Από ποιο ύψος h πρέπει να αφεθεί το Σ_2 ώστε να συναντήσει το Σ_1 στη θέση ισορροπίας του;
β) Ποια είναι η ταχύτητα κάθε σώματος τη στιγμή που συγκρούονται;
γ) Αν η χρονική διάρκεια της σύγκρουσης των δύο σωμάτων είναι αμελητέα και το κάθε σώμα αποκτά μετά την κρούση ταχύτητα αντίθετη από αυτή που είχε πριν συγκρουστεί, να υπολογίσετε το χρόνο ανάμεσα σε δύο διαδοχικές κρούσεις.
Δίνονται: $g = 10m/s^2$, $\pi^2 \approx 10$.

[Απ: 0,125 m, 2 m/s, 1,57 m/s 0,314 s]

1.48 Σώμα Σ_1, μάζας $m_1 = 0{,}3kg$ αναρτάται στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Όταν το σώμα ισορροπεί η επιμήκυνση του ελατήριου είναι $0{,}25m$. Δεύτερο σώμα Σ_2, μάζας $m_2 = 0{,}45kg$, βάλλεται κατακόρυφα από το έδαφος και στην πορεία του συναντάει το Σ_1 και συγκρούεται με αυτό. Το συσσωμάτωμα που προέκυψε από την κρούση φτάνει μέχρι τη θέση στην οποία το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.
α) Ποια είναι η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση;



Σχήμα 1-46.

β) Ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα που αποκτά το συσσωμάτωμα κατά την κάθοδό του;

γ) Μετά από πόσο χρόνο, από τη στιγμή που το συσσωμάτωμα φτάνει στην ανώτερη θέση, η ταχύτητά του γίνεται, για πρώτη φορά, μέγιστη;

Δίνονται: $g = 10\ m/s^2$.

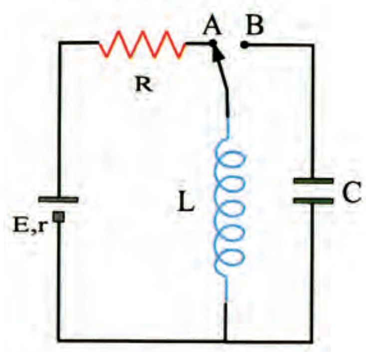
[Απ: 2m/s, 2,5m/s, 0,4s]

1.49 Στο κύκλωμα του σχήματος 1.47 δίνονται: $E = 12V$, $r = 0$, $L = 10mH$, $C = 1\mu F$, $R = 20\Omega$. Αρχικά ο μεταγωγός βρίσκεται στη θέση A και το πηνίο διαρρέεται από σταθερό ρεύμα. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο μεταγωγός μεταφέρεται ακαριαία στη θέση B.

α) Ποιος οπλισμός θα αποκτήσει πρώτος θετικό φορτίο;

β) Γράψτε τις εξισώσεις που δίνουν την ένταση του ρεύματος και το φορτίο του πυκνωτή σε συνάρτηση με το χρόνο.

*[Απ: α) Ο οπλισμός που συνδέεται με τον αρνητικό πόλο της πηγής.
β) $i=0{,}6\ συν10^4t$ $q=6\times10^{-5}\ ημ10^4t$ (S.I.)]*



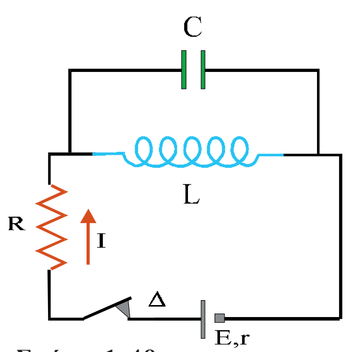
Σχήμα 1-47.

1.50 Στο κύκλωμα του σχήματος 1.48 δίνονται $E=6V$, $R=2\Omega$, $L=0{,}2\times10^{-3}H$, $r=0$. Αρχικά ο διακόπτης Δ είναι κλειστός, το κύκλωμα διαρρέεται από σταθερό ρεύμα και ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος. Όταν ανοίξουμε το διακόπτη ο πυκνωτής φορτίζεται.

α) Εξηγήστε γιατί φορτίζεται ο πυκνωτής;

β) Ποια πρέπει να είναι η χωρητικότητα του πυκνωτή ώστε η τάση στους οπλισμούς του να μην υπερβεί τα 10V;

[Απ: 18 μF]



Σχήμα 1-48.

ΕΝΘΕΤΟ

Εύρεση της ταχύτητας και της επιτάχυνσης στην Απλή Αρμονική Ταλάντωση με το Διαφορικό Λογισμό

Αρμονική ταλάντωση είναι η ευθύγραμμη κίνηση στην οποία η απομάκρυνση x, του σώματος από τη θέση ισορροπίας δίνεται από τη συνάρτηση $\boxed{x = A\eta\mu\omega t}$

Η ταχύτητα ενός σώματος, που κινείται ευθύγραμμα, κάποια χρονική στιγμή, είναι: $\upsilon = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$.

Το όριο αυτό, αν υπάρχει, ονομάζεται παράγωγος του x ως προς t και το σύμβολό του είναι $\dfrac{dx}{dt}$.

Η ταχύτητα υ ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση είναι $\upsilon = \dfrac{dx}{dt} = [A\eta\mu\omega t]'$ **(1.36)**

Η παράγωγος μιας σύνθετης συνάρτησης $f(g(t))$ είναι

$$[f(g(t))]' = f'(g(t))g'(t)$$

Οι παράγωγοι των συναρτήσεων $\eta\mu u$ και $\sigma\upsilon\nu u$ είναι

$$\eta\mu' u = \sigma\upsilon\nu u \qquad \sigma\upsilon\nu' u = -\eta\mu u$$

άρα

$$[A\ \eta\mu\omega t]' = A\ \eta\mu'\omega t(\omega t)' = A\omega\ \sigma\upsilon\nu\omega t$$

και η (1.36) γίνεται

$$\upsilon = A\omega\ \sigma\upsilon\nu\omega t \qquad \textbf{(1.37)}$$

Το γινόμενο $A\omega$ είναι σταθερό, έχει διαστάσεις ταχύτητας και εκφράζει τη μέγιστη ταχύτητα που αποκτάει το σώμα. Θέτοντας $\upsilon_{max} = A\,\omega$ η (1.37) γίνεται: $\boxed{\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\omega t}$

Η επιτάχυνση ενός σώματος, που κινείται ευθύγραμμα, κάποια στιγμή είναι: $a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$.

Το όριο αυτό είναι η παράγωγος της ταχύτητας ως προς το χρόνο (συμβολίζεται $\dfrac{d\upsilon}{dt}$).

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = [A\omega\ \sigma\upsilon\nu\omega t]' = A\omega\ \sigma\upsilon\nu'\omega t\ (\omega t)' = -A\omega^2\ \eta\mu\omega t \qquad \textbf{(1.38)}$$

Το γινόμενο $A\omega^2$ είναι σταθερό, έχει διαστάσεις επιτάχυνσης και εκφράζει τη μέγιστη επιτάχυνση που αποκτά το σώμα κατά την κίνησή του. Αντικαθιστώντας $A\omega^2 = \alpha_{max}$ η σχέση (1.38) παίρνει την πιο συνηθισμένη της μορφή

$$\boxed{a = -a_{max}\eta\mu\omega t}$$

2 ΚΥΜΑΤΑ

2.1. Εισαγωγή

Η έννοια «κύμα», από τις πιο βασικές έννοιες της φυσικής, χρησιμοποιήθηκε για την περιγραφή φαινομένων που καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα.

Στην ενότητα αυτή θα περιγράψουμε το μηχανισμό παραγωγής τόσο των μηχανικών όσο και των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων καθώς και μια σειρά φαινομένων που είναι κοινά σε όλα τα κύματα -την ανάκλαση, τη διάθλαση και τη συμβολή.

Κύμα στην επιφάνεια της θάλασσας.
Εικόνα 2-1.

2.2. Μηχανικά Κύματα

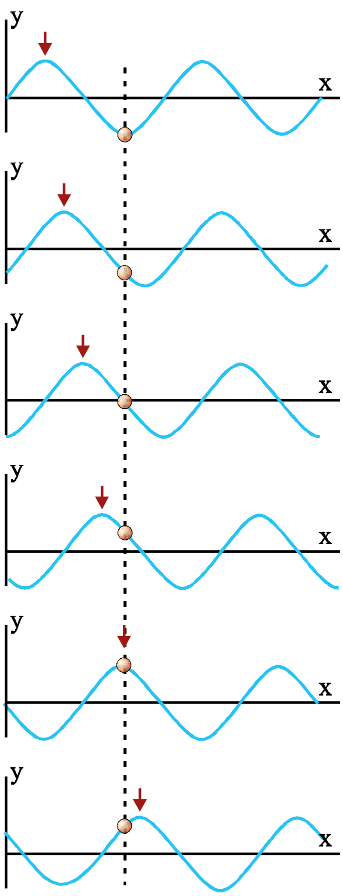
Αν προκληθεί μια διαταραχή σε ένα υλικό που ηρεμεί (ισορροπεί), τα μόριά του, στην περιοχή όπου προκλήθηκε η διαταραχή, μετατοπίζονται από τις θέσεις ισορροπίας τους. Επειδή όμως τα μόρια αυτά αλληλεπιδρούν με τα γειτονικά τους δέχονται δυνάμεις που τείνουν να τα επαναφέρουν στις αρχικές τους θέσεις ενώ στα διπλανά τους ασκούνται δυνάμεις που τείνουν να τα εκτρέψουν από τη θέση ισορροπίας. Έτσι, η διαταραχή διαδίδεται από τη μια περιοχή του υλικού στην άλλη και όλα τα σημεία του υλικού εκτελούν διαδοχικά την ίδια κίνηση. Η διάδοση αυτής της διαταραχής στο χώρο ονομάζεται **κύμα**.

Για τη δημιουργία ενός κύματος χρειάζονται η **πηγή της διαταραχής** ή **πηγή του κύματος**, δηλαδή η αιτία που θα προκαλέσει τη διαταραχή και ένα υλικό (**μέσο**) στο οποίο κάθε μόριο αλληλεπιδρά με τα γειτονικά του (ελαστικό μέσο).

Τα κύματα που διαδίδονται σε ένα ελαστικό μέσο ονομάζονται **μηχανικά κύματα**. Ο κυματισμός στην επιφάνεια της θάλασσας, η διάδοση των δονήσεων κατά μήκος ενός στερεού και ο ήχος είναι μερικά παραδείγματα μηχανικών κυμάτων.

Κατά τη διάδοση ενός κύματος δεν έχουμε μεταφορά ύλης από μια περιοχή του ελαστικού μέσου σε άλλη. Τα μόρια του ελαστικού μέσου κινούνται γύρω από τη θέση ισορροπίας τους.

Για να προκαλέσουμε την κυματική διαταραχή πρέπει να δώσουμε ενέργεια σε κάποια περιοχή του μέσου. Η ενέργεια αυτή μεταφέρεται με το κύμα σε άλλες περιοχές του μέσου. **Κατά τη διάδοση ενός κύματος μεταφέρεται ενέργεια και ορμή από το ένα σημείο του μέσου στο άλλο, όχι όμως και ύλη.**



Κατά τη διάδοση ενός κύματος σε ένα ελαστικό μέσο τα σημεία του μέσου κινούνται γύρω από μια θέση ισορροπίας. Κατά τη διάδοση του κύματος δε μεταφέρεται ύλη.
Σχήμα 2-1.

Τα κύματα στη θάλασσα μεταφέρουν μεγάλα ποσά ενέργειας και συχνά προκαλούν καταστροφές στις ακτές.
Εικόνα 2-2.

Αν σε χρόνο t μια διαταραχή διαδίδεται σε απόσταση x από την πηγή παραγωγής της, το πηλίκο

$$\upsilon = \frac{x}{t} \qquad (2.1)$$

είναι η **ταχύτητα διάδοσης του κύματος**.

Η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται ένα κύμα σε ένα μέσον εξαρτάται μόνο από τις ιδιότητες του μέσου που διαταράσσεται και όχι από το πόσο ισχυρή είναι η διαταραχή. Λόγου χάρη ο ήχος, σε θερμοκρασία $20\ °C$, διαδίδεται στον αέρα με ταχύτητα $344\ m/s$, ανεξάρτητα από το αν είναι ισχυρός ή ασθενής. Στα στερεά ο ήχος διαδίδεται με μεγαλύτερη ταχύτητα.

Στο σημείο αυτό να επισημάνουμε τη διάκριση ανάμεσα στην ταχύτητα του κύματος, που είναι σταθερή, και την ταχύτητα με την οποία κινούνται τα σημεία του μέσου γύρω από τη θέση ισορροπίας τους, που δεν είναι σταθερή.

Με κριτήριο τη διεύθυνση στην οποία κινούνται τα σημεία του ελαστικού μέσου, τα κύματα διακρίνονται σε **εγκάρσια και σε διαμήκη**.

Τα εγκάρσια κύματα διαδίδονται στα στερεά. Τα διαμήκη διαδίδονται τόσο στα στερεά όσο και στα υγρά και τα αέρια.

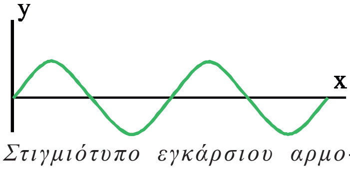
Εγκάρσια ονομάζονται τα κύματα στα οποία όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου ταλαντώνονται κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Τέτοια κύματα διαδίδονται κατά μήκος μιας χορδής. Τα κύματα που διαδίδονται στην επιφάνεια των υγρών μπορούν να θεωρηθούν κατά προσέγγιση εγκάρσια.

Τα κύματα στην επιφάνεια του νερού είναι κατά προσέγγιση εγκάρσια.
Σχήμα 2-2.

Διαμήκη ονομάζονται τα κύματα στα οποία τα σημεία του ελαστικού μέσου ταλαντώνονται παράλληλα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Τέτοιο είναι το κύμα που διαδίδεται κατά μήκος του ελατηρίου στο σχήμα 2.3.

Διάμηκες κύμα.
Σχήμα 2-3.

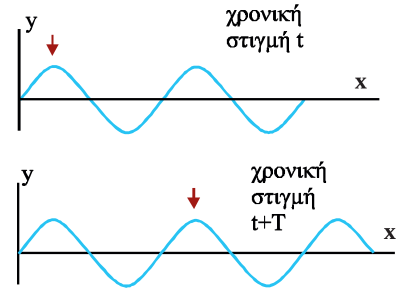
Αν η πηγή εκτελεί περιοδική κίνηση τα σωματίδια του μέσου κινούνται επίσης περιοδικά. Το κύμα που προκύπτει τότε είναι ένα **περιοδικό κύμα**. Ειδικότερα, αν η κίνηση της πηγής είναι απλή αρμονική ταλάντωση όλα τα σωματίδια του μέσου εκτελούν επίσης απλή αρμονική ταλάντωση και το κύμα ονομάζεται **ημιτονοειδές ή αρμονικό**. Τα αρμονικά κύματα έχουν απλή μαθηματική περιγραφή και παίζουν έναν ιδιαίτερα σπουδαίο ρόλο. Οποιαδήποτε κυματική διαταραχή, όσο περίπλοκη και να είναι, μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται από το άθροισμα ενός αριθμού αρμονικών κυμάτων.



Στιγμιότυπο εγκάρσιου αρμονικού κύματος.
Σχήμα 2-4.

Η περίοδος (T) του κύματος είναι το χρονικό διάστημα στο οποίο ένα σωματίδιο του μέσου ολοκληρώνει την κίνησή του (αρμονική ταλάντωση). Εάν φωτογραφίζαμε το μέσο στο οποίο διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα δυο χρονικές στιγμές που διαφέρουν κατά μια περίοδο θα βλέπαμε ότι όλα τα σωματίδια του μέσου, έχοντας εκτελέσει μια πλήρη ταλάντωση, βρίσκονται πάλι στις αρχικές τους θέσεις. Έτσι, παρόλο που το κύμα θα έχει προχωρήσει, η κυματική εικόνα που θα πάρουμε θα είναι ίδια. Επομένως **περίοδος του κύματος είναι επίσης το χρονικό διάστημα στο οποίο η κυματική εικόνα επαναλαμβάνεται**.

Η συχνότητα (f) με την οποία ταλαντώνονται τα σημεία του μέσου ονομάζεται και συχνότητα του κύματος. Η συχνότητα του κύματος δείχνει τον αριθμό των κορυφών (αν πρόκειται για εγκάρσιο κύμα) ή των πυκνωμάτων (αν πρόκειται για διάμηκες) που φτάνουν σε κάποιο σημείο του μέσου στη μονάδα του χρόνου κατά τη διάδοση του κύματος.



Μετά από χρόνο μιας περιόδου η κυματική εικόνα επαναλαμβάνεται.
Σχήμα 2-5.

Η απόσταση στην οποία διαδίδεται το κύμα σε χρόνο μιας περιόδου ονομάζεται μήκος κύματος και συμβολίζεται με λ.

Στο σχήμα 2.6α βλέπουμε δύο στιγμιότυπα ενός εγκάρσιου αρμονικού κύματος σε χρονικές στιγμές που διαφέρουν κατά Δt. Σ' αυτό το χρονικό διάστημα μια κορυφή του κύματος μετακινήθηκε κατά $\upsilon\,\Delta t$. Σε χρονικό διάστημα μιας περιόδου μια κορυφή (έστω αυτή με το βελάκι) θα έχει μετακινηθεί κατά ένα μήκος κύματος (σχ. 2.6β). Επομένως η απόσταση δύο διαδοχικών κορυφών είναι ίση με λ.

Θα μπορούσαμε, να ορίσουμε το **μήκος κύματος** ως την **απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων του μέσου που απέχουν το ίδιο από τη θέση ισορροπίας τους και κινούνται κατά την ίδια φορά.**

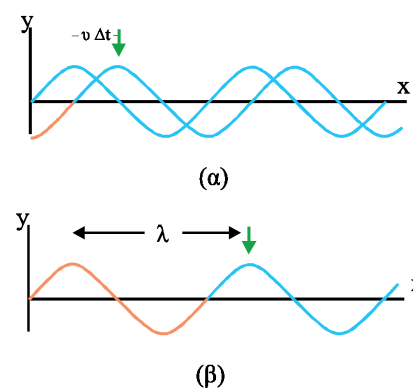
Αν στη σχέση (2.1) αντικαταστήσουμε το t με την περίοδο του κύματος η απόσταση x στην οποία διαδίδεται το κύμα είναι λ και η σχέση παίρνει τη μορφή

$$\upsilon = \frac{\lambda}{T} \qquad \mathbf{(2.2)}$$

Επειδή $T = \frac{1}{f}$ η σχέση , τελικά, γίνεται

$$\boxed{\upsilon = \lambda f} \qquad \mathbf{(2.3)}$$

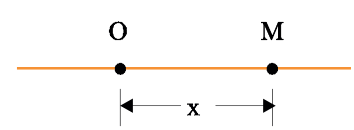
Η σχέση αυτή ονομάζεται **θεμελιώδης εξίσωση της κυματικής**.



(α) Σε χρόνο Δt μια κορυφή του κύματος μετακινείται κατά $\upsilon\Delta t$. (β) Σε μια περίοδο μετακινείται κατά λ.
Σχήμα 2-6.

Η μαθηματική περιγραφή του αρμονικού κύματος

Ας υποθέσουμε ότι η πηγή αρμονικής διαταραχής O αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ και ότι η ταλάντωση της περιγράφεται από τη σχέση $y = A\eta\mu\omega t$. Ένα σημείο M του ελαστικού μέσου θα αρχίσει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{x}{\upsilon}$. Επομένως τη χρονική στιγμή t, το σημείο M θα ταλαντώνεται επί χρόνο $t - t_1 = t - \frac{x}{\upsilon}$ και, με την προϋπόθεση ότι το πλάτος της ταλάντωσης του M είναι ίσο με το πλάτος ταλάντωσης του O,[1] η εξίσωση της κίνησής του θα είναι



Το σημείο M απέχει απόσταση x από την πηγή O του κύματος.
Σχήμα 2-7.

$$y = A\eta\mu\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) \quad \text{ή} \quad y = A\eta\mu\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) \quad \text{ή} \quad y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\upsilon T}\right)$$

ή, επειδή $\upsilon T = \lambda$,

$$\boxed{y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)} \qquad \mathbf{(2.4)}$$

[1] *Η προϋπόθεση αυτή εκπληρώνεται στην περίπτωση κυμάτων που διαδίδονται σε γραμμικά ελαστικά μέσα (π.χ. χορδές) χωρίς απώλειες ενέργειας.*

Αν το κύμα διαδίδεται κατά την αντίθετη φορά τότε

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)$$

Η (2.4) αποτελεί την **εξίσωση του κύματος** και δίνει κάθε στιγμή την απομάκρυνση που έχουν τα σημεία του ελαστικού μέσου από τη θέση ισορροπίας τους.

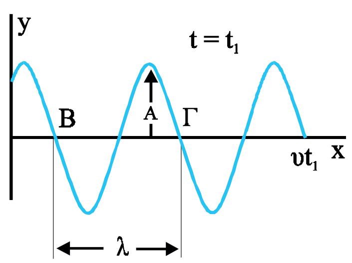
Το A ονομάζεται **πλάτος του κύματος** και είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η απομάκρυνση ενός σημείου του μέσου κατά την αρμονική ταλάντωση που εκτελεί.

Η γωνία $2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$ ονομάζεται **φάση** και μετριέται σε ακτίνια.

Επειδή η φάση εξαρτάται από την απόσταση x από την πηγή προκύπτει ότι τα σημεία του ελαστικού μέσου την ίδια χρονική στιγμή έχουν διαφορετικές φάσεις.

Γραφική παράσταση του κύματος

Από τη σχέση (2.4) φαίνεται ότι η απομάκρυνση y κάποιου σημείου του μέσου είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών, του χρόνου t και της απόστασης x του σημείου από την πηγή. Για το λόγο αυτό δεν είναι δυνατό η σχέση (2.4) να παρασταθεί γραφικά σε επίπεδο σχήμα. Αν όμως η μια από τις δύο μεταβλητές θεωρηθεί σταθερή, η απομάκρυνση είναι συνάρτηση μόνο της άλλης μεταβλητής και είναι δυνατή η γραφική της παράσταση.



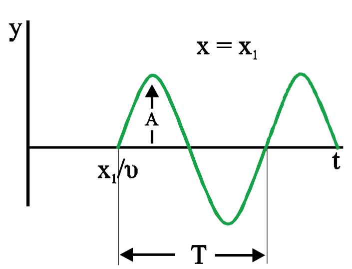
Ένα στιγμιότυπο του κύματος. Τα σημεία Β και Γ που έχουν διαφορά φάσης 2π, απέχουν ένα μήκος κύματος.
Σχήμα 2-8.

Α) Στιγμιότυπο του κύματος

Για δεδομένη χρονική στιγμή ($t=t_1$) η σχέση (2.4) παίρνει τη μορφή

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\sigma\tau\alpha\theta-\frac{x}{\lambda}\right)$$

και δίνει την απομάκρυνση κάθε σημείου του μέσου συναρτήσει της απόστασής του από την πηγή. Το διάγραμμα αυτής της συνάρτησης (σχ. 2.8), δίνει τη θέση των διαφόρων σημείων του μέσου μια ορισμένη χρονική στιγμή και ονομάζεται **στιγμιότυπο του κύματος**.



Γραφική παράσταση της κίνησης ενός σημείου του ελαστικού μέσου σε συνάρτηση με το χρόνο.
Σχήμα 2-9.

Β) Ταλάντωση ενός σημείου του μέσου

Για ορισμένη απόσταση από την πηγή ($x=x_1$), η σχέση (2.4) παίρνει τη μορφή

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\sigma\tau\alpha\theta\right)$$

και δίνει την απομάκρυνση ενός συγκεκριμένου σημείου του μέσου συναρτήσει του χρόνου.

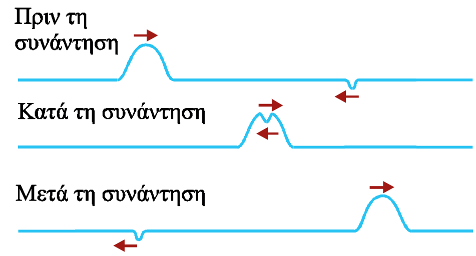
Η γραφική παράσταση της σχέσης αυτής (σχ. 2.9) είναι η γνωστή μας γραφική παράσταση της απλής αρμονικής ταλάντωσης.

2.3. Επαλληλία ή Υπέρθεση Κυμάτων

Τι συμβαίνει όταν στο ίδιο ελαστικό μέσο **συμβάλλουν**, δηλαδή διαδίδονται ταυτόχρονα δύο ή περισσότερα κύματα; Ποια είναι τότε η κίνηση των μορίων του μέσου;

Έχει διαπιστωθεί ότι τα κύματα ακολουθούν την αρχή επαλληλίας ή υπέρθεσης, σύμφωνα με την οποία

όταν σε ένα ελαστικό μέσο διαδίδονται δύο ή περισσότερα κύματα η απομάκρυνση ενός σημείου του μέσου είναι ίση με τη συνισταμένη των απομακρύνσεων που οφείλονται στα επί μέρους κύματα.



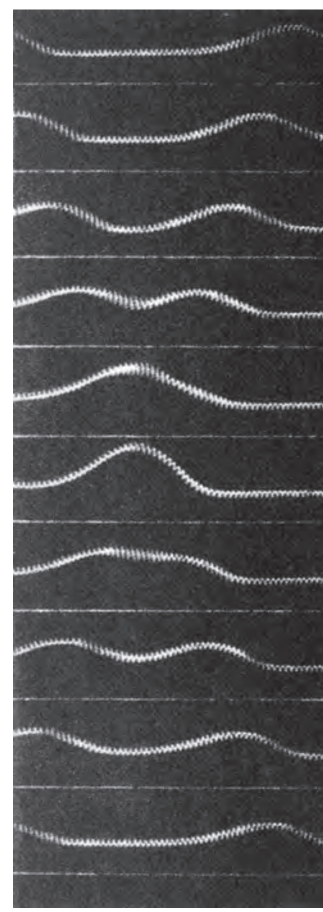
Σχήμα 2-10.

Στο σχήμα 2.10 φαίνεται το αποτέλεσμα της ταυτόχρονης διάδοσης δύο παλμών κατά μήκος ενός σχοινιού, στο ίδιο επίπεδο, με αντίθετες κατευθύνσεις. Όταν οι δυο παλμοί συναντώνται, τα μόρια του σχοινιού έχουν απομάκρυνση ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των απομακρύνσεων που θα είχαν αν οι δυο παλμοί διαδίδονταν ξεχωριστά.

Στην εικόνα 2.3 φαίνονται δύο κύματα τα οποία διαδίδονται κατά μήκος ενός ελατηρίου. Όπως φαίνεται, τα κύματα διέρχονται το ένα μέσα από το άλλο χωρίς να μεταβληθούν καθόλου. Τα κύματα που διαδίδονται στο ίδιο μέσο, δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Κάθε κύμα διαδίδεται σαν να μην υπήρχε το άλλο. Η συνεισφορά κάθε κύματος στην απομάκρυνση ενός σημείου του μέσου είναι ανεξάρτητη από την ύπαρξη του άλλου κύματος.

Η αρχή της επαλληλίας παραβιάζεται μόνο όταν τα κύματα είναι τόσο ισχυρά ώστε να μεταβάλλουν τις ιδιότητες του μέσου στο οποίο διαδίδονται (όταν οι δυνάμεις που ασκούνται στα σωματίδια του μέσου δεν είναι ανάλογες της απομάκρυνσης). Τέτοιες περιπτώσεις όπου δεν ισχύει η αρχή της επαλληλίας, έχουμε στα κύματα που δημιουργούνται από μια έκρηξη.

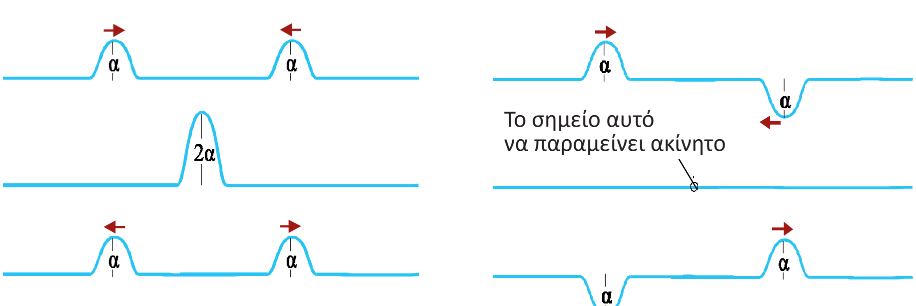
Τα κυματικά φαινόμενα που απαντούν στη φύση είναι συνήθως αρκετά σύνθετα. Όπως την κίνηση ενός βλήματος την αναλύουμε σε συνιστώσες, οριζόντια και κατακόρυφη, ένα σύνθετο κύμα μπορούμε να το θεωρήσουμε ως αποτέλεσμα της επαλληλίας ενός αριθμού αρμονικών κυμάτων, με επιλεγμένα πλάτη και μήκη κύματος.



Φωτογραφίες από δύο κυματικούς παλμούς που διαδίδονται κατά μήκος ενός ελατηρίου.
Εικόνα 2-3.

Η ταυτόχρονη διάδοση δύο ή περισσότερων κυμάτων στην ίδια περιοχή ενός ελαστικού μέσου ονομάζεται συμβολή.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε μερικές ειδικές περιπτώσεις συμβολής κυμάτων.



Το αποτέλεσμα της συμβολής δύο όμοιων κυματικών παλμών και της συμβολής δύο όμοιων αλλά αντίθετων παλμών.
Σχήμα 2-11.

2.4. Συμβολή Δύο Κυμάτων Στην Επιφάνεια Υγρού

Οι εικόνες 2.4α και 2.4β δείχνουν το αποτέλεσμα της συμβολής δύο όμοιων κυμάτων στην επιφάνεια νερού. Τα κύματα προκαλούνται στην επιφάνεια νερού από τις πηγές Α και Β.

Βλέπουμε ότι υπάρχουν σημεία (τα οποία μάλιστα σχηματίζουν γραμμές) που παραμένουν ακίνητα, ενώ άλλα ταλαντώνονται πολύ έντονα.

Στο σχήμα 2.12 το σημείο Φ_0 είναι ένα σημείο στην επιφάνεια του νερού που απέχει εξίσου από τα σημεία Α και Β, ($r_1 = r_2$).

Επειδή τα δύο κύματα ξεκινούν ταυτόχρονα από τις πηγές και η απόσταση που διανύουν μέχρι να φτάσουν στο Φ_0 είναι ίδια, όταν στο Φ_0 φτάνει «όρος» από τη μια πηγή, θα φτάνει «όρος» και από την άλλη. Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, στο Φ_0 θα δημιουργηθεί «όρος» με διπλάσιο ύψος. Μετά από χρόνο $T/2$ στο σημείο Φ_0 θα φτάσουν ταυτόχρονα δύο «κοιλάδες», έτσι η κοιλάδα που θα δημιουργηθεί στο Φ_0 θα έχει διπλάσιο βάθος. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα δύο κύματα συμβάλλουν ενισχυτικά.

Ενισχυτική συμβολή έχουμε και σε άλλα σημεία. Για παράδειγμα και στο σημείο Φ_1, στο οποίο $r_1 - r_2 = \lambda$. Όταν στο σημείο Φ_1 φτάνει «όρος» που προέρχεται από την πηγή Β, ταυτόχρονα φτάνει «όρος» που προέρχεται από την πηγή Α και δημιουργήθηκε μια περίοδο νωρίτερα. Το ίδιο συμβαίνει σε όλα εκείνα τα σημεία στα οποία η διαφορά των αποστάσεών τους από τις δύο πηγές είναι ακέραια πολλαπλάσια του μήκους κύματος.

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση ενός σημείου Σ_1 (σχ. 2.13), στο οποίο οι αποστάσεις r_1 και r_2 από τις πηγές Α και Β, διαφέρουν κατά $\lambda/2$. Όπως είπαμε τα «όρη» ξεκινούν ταυτόχρονα από τις δύο πηγές. Όταν στο σημείο Σ_1 φτάνει όρος προερχόμενο από την πηγή Β, από την πηγή Α θα φτάνει κοιλάδα, με αποτέλεσμα τα δύο κύματα να αλληλοαναιρούνται. Μετά από χρόνο Τ/2, στο σημείο Σ_1, θα φτάσει «κοιλάδα» από το Β και «όρος» από το Α. Το άθροισμά τους θα είναι πάλι μηδέν. Το σημείο Σ_1 παραμένει διαρκώς ακίνητο. Το ίδιο συμβαίνει με όλα εκείνα τα σημεία, στην επιφάνεια του νερού, στα οποία η διαφορά των αποστάσεών τους από τις δύο πηγές είναι ίση με περιττό πολλαπλάσιο του $\lambda/2$. Επομένως

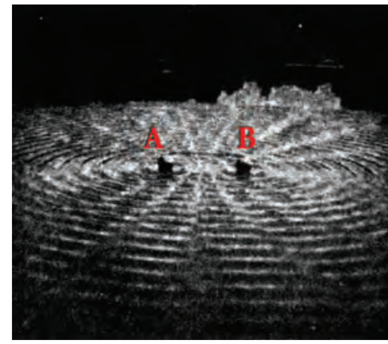
Τα σημεία των οποίων οι αποστάσεις r_1 και r_2, από τις δύο πηγές, διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος λ

(δηλαδή $r_1 - r_2 = N\lambda$ **όπου** $N = 0, \pm1, \pm2, ...$)

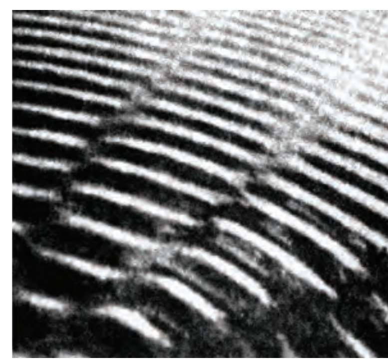
ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος. Τότε έχουμε ενίσχυση.

Τα σημεία των οποίων οι αποστάσεις r_1 και r_2, από τις δύο πηγές, διαφέρουν κατά περιττό πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος ($\lambda/2$)

(δηλαδή $r_1 - r_2 = (2N+1)\lambda/2$ **όπου** $N = 0, \pm1, \pm2, ...$)

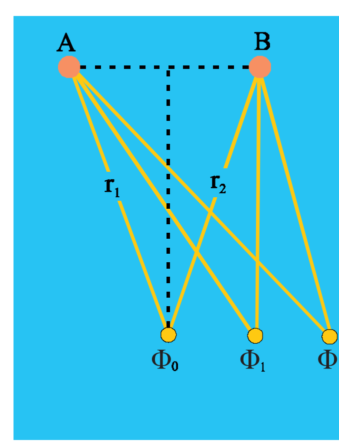


(α)



(β)

Η συμβολή δύο κυμάτων στην επιφάνεια νερού.
Εικόνα 2-4.



Στα σημεία Φ_0, Φ_1, Φ_2,... για τα οποία οι αποστάσεις από τις δύο πηγές διαφέρουν ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος έχουμε ενίσχυση.
Σχήμα 2-12.

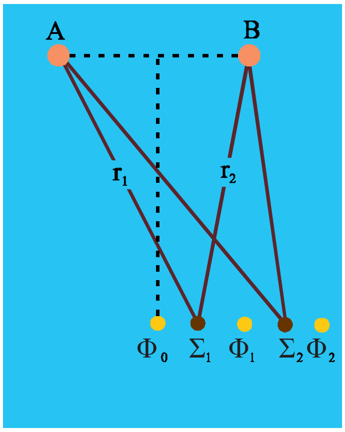
μένουν διαρκώς ακίνητα. Τότε έχουμε απόσβεση.

Όλα τα υπόλοιπα σημεία κάνουν ταλάντωση με ενδιάμεσο πλάτος.

Τα συμπεράσματα αυτά μπορούν να γίνουν πιο πειστικά αν μελετήσουμε μαθηματικά το φαινόμενο. Έστω ότι ένα τυχαίο σημείο του μέσου στο οποίο διαδίδονται ταυτόχρονα κύματα που προέρχονται από τις πηγές A και B, απέχει από αυτές r_1 και r_2 αντίστοιχα. Μια τυχαία χρονική στιγμή t το σημείο αυτό έχει απομάκρυνση,

$y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1}{\lambda}\right)$ εξαιτίας του πρώτου κύματος και **(2.5)**

$y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_2}{\lambda}\right)$ εξαιτίας του δεύτερου **(2.6)**



Στα σημεία Σ_1, Σ_2,... για τα οποία οι αποστάσεις από τις δύο πηγές διαφέρουν περιττό πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος έχουμε απόσβεση.
Σχήμα 2-13.

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, η απομάκρυνση του σημείου αυτού από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή t θα είναι

$$y = y_1 + y_2$$

η οποία βάσει των (2.5) και (2.6) γίνεται

$$y = A\left[\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1}{\lambda}\right)+\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_2}{\lambda}\right)\right] \qquad (2.7)$$

Κάνοντας χρήση της τριγωνομετρικής ταυτότητας

$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ η σχέση (2.7) γίνεται

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{r_1-r_2}{2\lambda}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1+r_2}{2\lambda}\right)$$

Επομένως το αποτέλεσμα της συμβολής είναι ταλάντωση που έχει πλάτος

$$A' = \left|2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{r_1-r_2}{2\lambda}\right| \qquad (2.8)$$

και φάση

$$2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1+r_2}{2\lambda}\right)$$

Σύμφωνα με τη (2.8), το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται μέγιστο $(A' = 2A)$ όταν

$$\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{r_1-r_2}{2\lambda} = \pm 1$$

ή όταν

$$2\pi\frac{|r_1-r_2|}{2\lambda} = N\pi\,,$$

δηλαδή στα σημεία για τα οποία

$$|r_1 - r_2| = N\lambda \quad \text{όπου} \quad N = 0,1,2...$$

Όταν

$$συν2\pi \frac{r_1 - r_2}{2\lambda} = 0$$

δηλαδή

$$2\pi \frac{|r_1 - r_2|}{2\lambda} = (2N+1)\frac{\pi}{2}$$

ή

$$|r_1 - r_2| = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{με} \quad N = 0,1,2...$$

η (2.8) δίνει ότι $A' = 0$. Δηλαδή τα σημεία αυτά παραμένουν διαρκώς ακίνητα.

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων για τα οποία ισχύει $r_1 - r_2 = σταθ.$ είναι υπερβολή. Επομένως τα σημεία στα οποία έχουμε ενισχυτική συμβολή και τα σημεία στα οποία έχουμε απόσβεση, βρίσκονται πάνω σε υπερβολές.

Σημείωση : Η μελέτη του φαινομένου της συμβολής, όπως έγινε, αφορούσε στη συμβολή δύο κυμάτων των οποίων οι πηγές βρίσκονται **σε φάση** (δηλαδή δημιουργούν ταυτόχρονα μέγιστα και ελάχιστα). Τέτοιες πηγές ονομάζονται σύγχρονες. Συμβολή, όμως, έχουμε κάθε φορά που δύο κύματα διαδίδονται στο ίδιο μέσο.

Παράδειγμα 2.1

Δύο σημειακές πηγές ήχου A και B εκπέμπουν αρμονικό ήχο ίδιας συχνότητας και βρίσκονται σε φάση. Στο μέσο M της απόστασής τους, ο ήχος ακούγεται έντονος. Στο σημείο $Γ$, που βρίσκεται πάνω στην ευθεία AB, σε απόσταση $x = 4\ cm$ από το σημείο M, ο ήχος μηδενίζεται για πρώτη φορά. Να βρεθεί η συχνότητα του ήχου που εκπέμπεται από τις δύο πηγές. Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι $\upsilon = 340$ m/s.

Απάντηση :

Απόσβεση έχουμε στα σημεία, της ευθείας ΑΒ, στα οποία ισχύει

$$r_1 - r_2 = (2N+1)\lambda/2 \quad \text{όπου} \quad N = 0, \pm1, \pm2...$$

Στο σημείο Γ όπου για πρώτη φορά παρατηρείται απόσβεση $N = 0$
Επομένως

$$r_1 - r_2 = \lambda/2$$

Αν το σημείο Γ βρίσκεται πλησιέστερα στο Β τότε

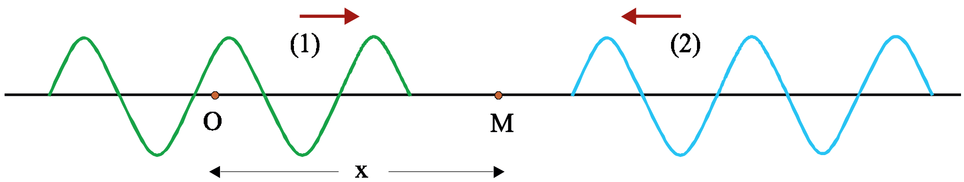
$$AM + x - (BM - x) = \lambda/2 \quad \text{ή} \quad 2x = \lambda/2 \quad \text{άρα} \quad \lambda = 4x = 16cm$$

και

$$f = \frac{\upsilon}{\lambda} = 2125Hz$$

2.5. Στάσιμα Κύματα

Δύο κύματα ίδιου πλάτους και ίδιας συχνότητας διαδίδονται με αντίθετη φορά μέσα στο ίδιο ελαστικό μέσο (σχ. 2.14).

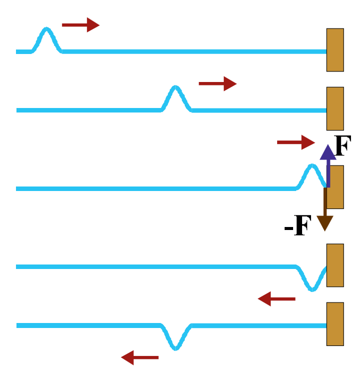


Τα δύο κύματα διαδίδονται στο ίδιο ελαστικό μέσο με αντίθετη φορά.
Σχήμα 2-14.

Τα δύο κύματα συμβάλλουν. Η κίνηση του μέσου ονομάζεται στάσιμο κύμα.

Στάσιμο κύμα ονομάζεται το αποτέλεσμα της συμβολής δύο κυμάτων της ίδιας συχνότητας και του ίδιου πλάτους που διαδίδονται στο ίδιο μέσο με αντίθετες κατευθύνσεις.

Κρατάμε την ελεύθερη άκρη ενός τεντωμένου σχοινιού, που η άλλη του άκρη είναι στερεωμένη σε ακλόνητο σημείο και της δίνουμε μια ώθηση. Με αυτό τον τρόπο δημιουργείται ένας κυματικός παλμός ο οποίος διαδίδεται κατά μήκος του σχοινιού. Όταν η κυματική διαταραχή φτάσει στην άκρη του σχοινιού το σχοινί ασκεί μια δύναμη στο σημείο στήριξης. Η αντίδραση σε αυτή τη δύναμη δημιουργεί έναν ανακλώμενο παλμό που κινείται στην αντίθετη κατεύθυνση (σχ. 2.15).



Ο κυματικός παλμός ανακλάται στο σταθερό εμπόδιο και διαδίδεται αντίθετα.
Σχήμα 2-15.

Εάν εξαναγκάσουμε το ελεύθερο άκρο του σχοινιού να κάνει αρμονική ταλάντωση (σχήμα 2.16) το αρμονικό κύμα που δημιουργείται και το όμοιό του που προκύπτει από την ανάκλαση συμβάλλουν δημιουργώντας στάσιμο κύμα. Αν φωτογραφίσουμε το σχοινί σε διάφορες χρονικές στιγμές, θα παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν σημεία στο σχοινί - οι **δεσμοί** - που παραμένουν διαρκώς ακίνητα ενώ όλα τα άλλα εκτελούν ταλάντωση με την ίδια συχνότητα. Το πλάτος της ταλάντωσης δεν είναι ίδιο για όλα τα σημεία που ταλαντώνονται. Μέγιστο πλάτος έχουν τα σημεία που βρίσκονται στο μέσο της απόστασης μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών -οι **κοιλίες**.

Η ονομασία (στάσιμο = ακίνητο) οφείλεται στο γεγονός ότι εδώ δεν έχουμε να κάνουμε με ένα κύμα, δηλαδή με μια παραμόρφωση που διαδίδεται. Στο κύμα όλα τα σημεία εκτελούν διαδοχικά την ίδια κίνηση ενώ στο στάσιμο δε συμβαίνει το ίδιο.

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος

Έστω το αρμονικό κύμα με εξίσωση

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) \qquad (2.9)$$

που διαδίδεται κατά τη θετική φορά του άξονα x (στο σχήμα 2.14 το κύμα 1).

Ένα δεύτερο κύμα με ίδιο πλάτος και ίδια συχνότητα, που διαδίδεται κατά την αντίθετη κατεύθυνση (στο σχήμα 2.14 το κύμα 2), θα περιγράφεται από την εξίσωση

$$y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right) \qquad (2.10)$$

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, η απομάκρυνση ενός σημείου Μ του μέσου τη χρονική στιγμή t, θα είναι $y = y_1 + y_2$ η οποία γίνεται από τις (2.9) και (2.10)

$$y = A\left[\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)\right] \qquad (2.11)$$

Κάνοντας χρήση της τριγωνομετρικής ταυτότητας

$$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$ η σχέση (2.11) γίνεται

$$\boxed{y = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}\eta\mu\frac{2\pi}{T}t} \qquad (2.12)$$

Παρατηρούμε ότι ο όρος $A' = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\dfrac{x}{\lambda}$ (2.13)

εξαρτάται μόνο από τη θέση x του σημείου και παραμένει σταθερός με το χρόνο.

Η σχέση (2.12) παίρνει τη μορφή

$$y = A'\eta\mu\frac{2\pi}{T}t \quad \text{ή} \quad y = A'\eta\mu\omega t$$

που είναι η εξίσωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης. Επομένως **κάθε σημείο του μέσου εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Το πλάτος της ταλάντωσης $|A'|$ δεν είναι ίδιο για όλα τα σημεία αλλά εξαρτάται από τη θέση του [σχέση (2.13)].**

Τα σημεία τα οποία βρίσκονται σε θέση x τέτοια ώστε

$$A' = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda} = 0$$

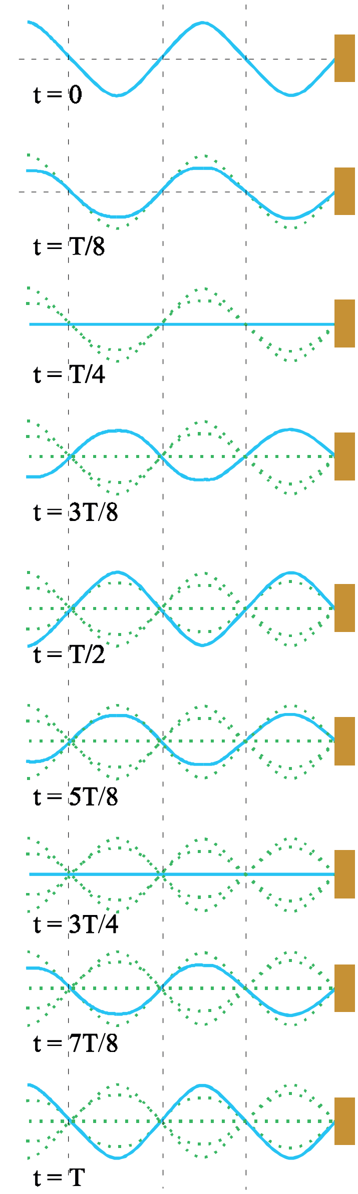
δηλαδή $$2\pi\frac{x}{\lambda} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots (2K+1)\frac{\pi}{2}$$

ή $$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \ldots (2K+1)\frac{\lambda}{4} \qquad (2.14)$$

έχουν μηδενικό πλάτος ταλάντωσης, δηλαδή παραμένουν συνεχώς ακίνητα. Είναι **οι δεσμοί του στάσιμου κύματος**.

Τα σημεία τα οποία βρίσκονται σε θέση τέτοια ώστε

$$A' = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm 2A$$



Στιγμιότυπα στάσιμου κύματος σε χορδή.
Σχήμα 2-16.

δηλαδή $$2\pi\frac{x}{\lambda}=0,\pi,...,K\pi$$

ή $$x=0,\frac{\lambda}{2},\frac{2\lambda}{2},...\frac{K\lambda}{2} \qquad (2.15)$$

έχουν μέγιστο πλάτος ταλάντωσης, ίσο με $2A$. Αποτελούν τις **κοιλίες του στάσιμου κύματος**.

Από τις (2.14) και (2.15) προκύπτει ότι

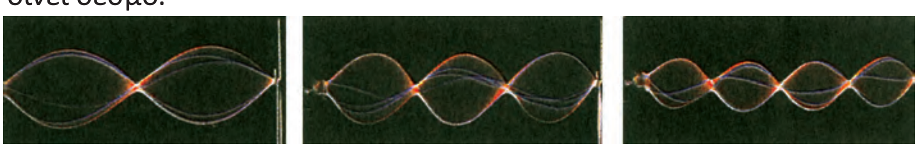
η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών, ή κοιλιών είναι ίση με το μισό του μήκους κύματος λ των κυμάτων από τη συμβολή των οποίων προήλθε το στάσιμο κύμα.

Στις χορδές της κιθάρας σχηματίζονται στάσιμα κύματα. Τα άκρα κάθε χορδής είναι υποχρεωτικά δεσμοί.

Εικόνα 2-5.

Στην παραπάνω μαθηματική μελέτη, η αρχή μέτρησης των αποστάσεων είναι κοιλία (για $x = 0$, έχουμε κοιλία).

Στάσιμα κύματα μπορούν να δημιουργηθούν και σε ένα μέσο του οποίου τα δύο άκρα είναι ακίνητα, όπως σε μια χορδή ενός μουσικού οργάνου (εικ. 2.5). Στην περίπτωση αυτή, αν θέλουμε ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων να πάρουμε το ένα άκρο (όπου υπάρχει δεσμός), η σχέση (2.12) χρειάζεται τροποποίηση ώστε, για $x = 0$ να δίνει δεσμό.



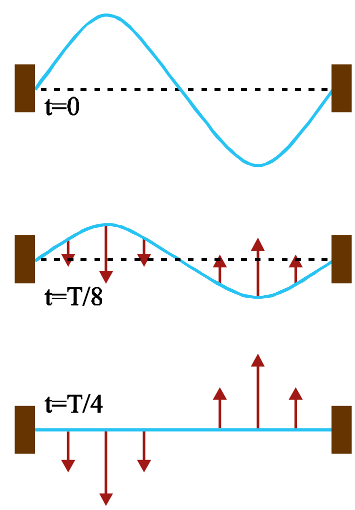
Στάσιμα κύματα σε χορδές.

Εικόνα 2-6.

Ενεργειακή προσέγγιση

Εφόσον στο στάσιμο κύμα υπάρχουν σημεία που παραμένουν πάντα ακίνητα, δε μεταφέρεται ενέργεια από το ένα σημείο του μέσου στο άλλο (αυτός επίσης είναι ένας βασικός λόγος που διαφοροποιεί την κατάσταση του στάσιμου κύματος από αυτό που ορίσαμε ως κύμα).

Η ενέργεια που είχαν τα αρχικά κύματα, η συμβολή των οποίων έδωσε το στάσιμο κύμα, εγκλωβίζεται ανάμεσα στους δεσμούς. Σε μια χορδή, στην οποία έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, η ενέργεια μετατρέπεται συνεχώς από ελαστική δυναμική ενέργεια, όταν η χορδή είναι στιγμιαία ακίνητη, σε κινητική όταν η χορδή διέρχεται από τη θέση ισορροπίας. Στις ενδιάμεσες θέσεις τα μόρια της χορδής, έχουν και κινητική και δυναμική ενέργεια.



Στιγμιότυπα στάσιμου κύματος σε χορδή. Τη στιγμή μηδέν η χορδή είναι ακίνητη, οπότε $K=0$, όλη η ενέργεια είναι δυναμική, U, λόγω της παραμόρφωσης της χορδής. Τη στιγμή $t=T/8$, η χορδή κινείται. Έχει και κινητική και δυναμική ενέργεια. Τη στιγμή $t=T/4$, η χορδή δεν είναι παραμορφωμένη $(U=0)$, συνεπώς όλη η ενέργεια έχει μετατραπεί σε κινητική.
Τα βέλη δείχνουν τις ταχύτητες των διαφόρων σημείων της χορδής.

Σχήμα 2-17.

Παράδειγμα 2.2

Τα κύματα $y_1=8\ \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{0,3}-5x\right)$ και $y_2=8\ \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{0,3}+5x\right)$

διαδίδονται στο ίδιο ελαστικό μέσο σε αντίθετες κατευθύνσεις. Τα x

και y είναι σε cm και το t σε s.
α) Ποια είναι η εξίσωση του στάσιμου κύματος που δημιουργείται;
β) Ποιο είναι το πλάτος της ταλάντωσης ενός σημείου που βρίσκεται στη θέση $x = 3{,}025\ cm$;

Απάντηση :

Η εξίσωση ενός αρμονικού κύματος είναι $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

Συγκρίνοντας τη σχέση αυτή με τις εξισώσεις των κυμάτων που συμβάλλουν για να δημιουργήσουν το στάσιμο κύμα έχουμε ότι $A = 8\ cm$, $T = 0{,}3\ s$ και $\lambda = 0{,}2\ cm$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι $y = 2A\ \sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}\eta\mu\frac{2\pi}{T}t$

Επομένως $y = 16\ \sigma\upsilon\nu 10\pi x \eta\mu\frac{2\pi}{0{,}3}t$

Το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου που βρίσκεται στη θέση $x = 3{,}025\ cm$ είναι

$$A' = \left|2A\ \sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}\right| = \left|16\ \sigma\upsilon\nu 30{,}25\pi\right| = \left|16\ \sigma\upsilon\nu\left(30\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right| = 16\ \frac{\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}cm$$

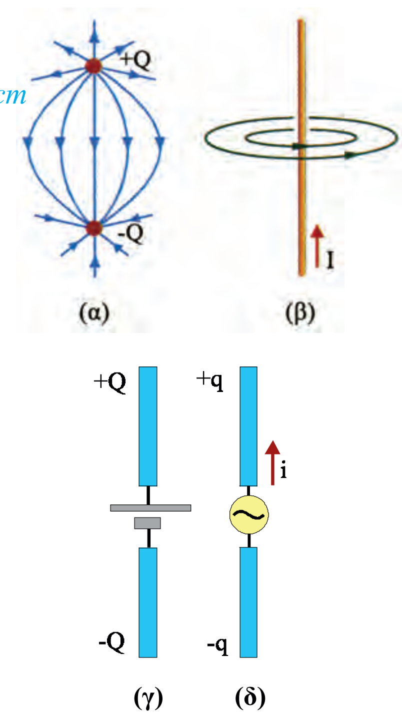
2.6. Παραγωγή Ηλεκτρομαγνητικών Κυμάτων

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την παραγωγή και τα χαρακτηριστικά του ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Τα κύματα που γνωρίσαμε (μηχανικά) αφορούσαν στη διάδοση μιας υλικής διαταραχής. Με τρόπο ανάλογο, όπως θα δούμε, διαδίδεται και μια ηλεκτρομαγνητική διαταραχή.

Γνωρίζουμε ότι ένα σύστημα δύο φορτίων $+Q$ και $-Q$ δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο (σχ. 2.18α) και ότι ένας αγωγός που διαρρέεται από ρεύμα δημιουργεί γύρω του μαγνητικό πεδίο (σχ. 2.18β). Αν συνδέσουμε δυο μεταλλικούς αγωγούς στους πόλους μιας πηγής συνεχούς τάσης, οι αγωγοί φορτίζονται με φορτία $+Q$ και $-Q$, αντίστοιχα (σχ. 2.18γ). Οι ίδιοι αγωγοί, αν συνδεθούν με γεννήτρια εναλλασσόμενης τάσης, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.18δ, αποκτούν ετερόσημα φορτία, $+q$ και $-q$, που μεταβάλλονται ημιτονοειδώς με το χρόνο. Αυτό σημαίνει ότι οι δύο αγωγοί διαρρέονται από εναλλασσόμενο ρεύμα. Το σύστημα αυτών των αγωγών ονομάζεται **ταλαντούμενο ηλεκτρικό δίπολο**.

Θα δούμε στη συνέχεια ότι το ταλαντούμενο ηλεκτρικό δίπολο αποτελεί την κεραία εκπομπής των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε ραδιοφωνικούς και τηλεοπτικούς σταθμούς.

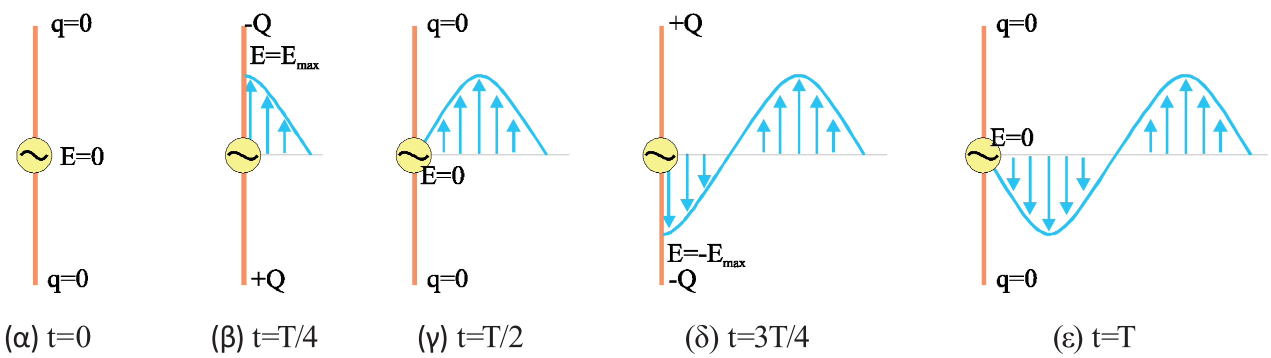
Στο σχήμα 2.19 απεικονίζεται η διαδικασία παραγωγής ηλεκτρομαγνητικού κύματος από ένα ταλαντούμενο ηλεκτρικό δίπολο. Τη



(α) Ηλεκτρικό πεδίο δύο σημειακών φορτίων. (β) Μαγνητικό πεδίο ευθύγραμμου αγωγού. (γ) Μεταλλικοί αγωγοί συνδέονται με πηγή συνεχούς τάσης. Οι αγωγοί φορτίζονται με φορτία ±Q. (δ) Οι αγωγοί συνδέονται με γεννήτρια εναλλασσόμενης τάσης. Το φορτίο των αγωγών μεταβάλλεται ημιτονοειδώς με το χρόνο. Η διάταξη διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα.

Σχήμα 2-18.

χρονική στιγμή μηδέν οι αγωγοί είναι αφόρτιστοι (σχ.2.19α). Καθώς η εναλλασσόμενη τάση μεταβάλλεται, στον επάνω αγωγό εμφανίζεται αρνητικό φορτίο $-q$, ενώ στον άλλο εμφανίζεται θετικό φορτίο $+q$, με συνέπεια να δημιουργείται γύρω από αυτούς ηλεκτρικό πεδίο. Τη χρονική στιγμή $t=T/4$ τα φορτία στους αγωγούς έχουν πάρει τη μέγιστη τιμή. Το ηλεκτρικό πεδίο που είχε δημιουργηθεί από τη στιγμή μηδέν μέχρι τη στιγμή $T/4$ έχει απομακρυνθεί από τους αγωγούς (σχ. 2.19β). Από τη στιγμή αυτή, τα φορτία στους αγωγούς μειώνονται. Αυτό συνεπάγεται μείωση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργούν. Ένα τέταρτο της περιόδου αργότερα τα φορτία έχουν μηδενισθεί. Εν τω μεταξύ το ηλεκτρικό πεδίο που είχε δημιουργηθεί μέχρι τότε απομακρύνεται από τους αγωγούς, με ταχύτητα c (σχ. 2.19γ). Στη συνέχεια, καθώς η πολικότητα της πηγής αλλάζει, στον επάνω αγωγό εμφανίζεται θετικό φορτίο και στον κάτω αρνητικό. Τα φορτία παίρνουν τη μέγιστη τιμή τους τη στιγμή $3T/4$, και μηδενίζονται τη στιγμή T. Το φαινόμενο επαναλαμβάνεται συνεχώς.



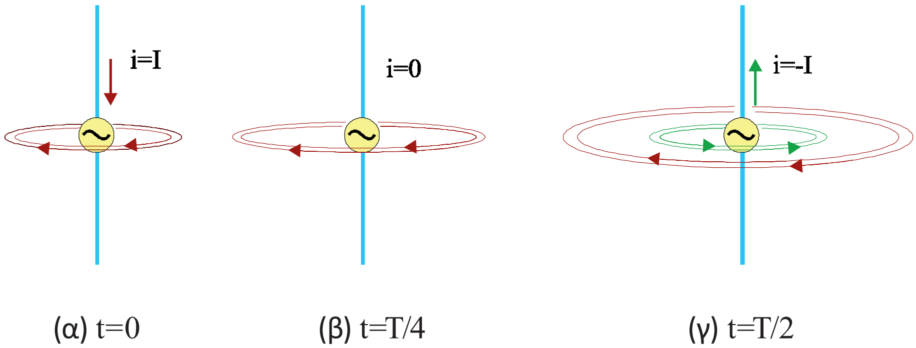
Ο κύκλος λειτουργίας ταλαντούμενου ηλεκτρικού δίπολου. Στο σχήμα απεικονίζεται μόνο το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται. Το σχέδιο δεν ανταποκρίνεται στις πραγματικές διαστάσεις.

Σχήμα 2-19.

Στο ίδιο χρονικό διάστημα δημιουργείται και μαγνητικό πεδίο διότι οι αγωγοί διαρρέονται από εναλλασσόμενο ρεύμα. Η ένταση του ρεύματος -επομένως και το μαγνητικό πεδίο - έχει τη μέγιστη τιμή τη χρονική στιγμή μηδέν (σχ. 2.20). Το ρεύμα μηδενίζεται τη στιγμή $T/4$. Στο μεταξύ το μαγνητικό πεδίο που είχε δημιουργηθεί απλώνεται στο χώρο. Τη στιγμή $T/2$ οι αγωγοί διαρρέονται πάλι από ρεύμα, μέγιστης έντασης. Αυτή τη φορά, όμως, η φορά του ρεύματος - και των γραμμών του μαγνητικού πεδίου - είναι αντίθετη από την αρχική. Γύρω από τους αγωγούς έχει δημιουργηθεί εκ νέου μαγνητικό πεδίο. Το μαγνητικό πεδίο γύρω από τους αγωγούς μεταβάλλεται με τη συχνότητα με την οποία μεταβάλλεται το ρεύμα στους αγωγούς.

Αυτό που έχει σημασία είναι ότι, καθώς τα ηλεκτρικά φορτία ταλαντώνονται, το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο που συνεχώς δημιουργούν απομακρύνονται από το δίπολο (διαδίδονται) με την ταχύτητα του φωτός (c).

Μια διαταραχή που διαδίδεται ονομάστηκε κύμα. Η κατάλληλη ονομασία για αυτού του είδους τις διαταραχές (ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων) που διαδίδονται είναι **«ηλεκτρομαγνητικό κύμα»**.



Το ταλαντούμενο ηλεκτρικό δίπολο διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα και δημιουργεί γύρω του μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο.

Σχήμα 2-20.

Ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι η ταυτόχρονη διάδοση ενός ηλεκτρικού και ενός μαγνητικού πεδίου. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα διαδίδονται στο κενό με την ταχύτητα του φωτός. Σε όλα τα υλικά διαδίδονται με μικρότερη ταχύτητα.

Από τη μελέτη των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων διαπιστώθηκε ότι:

Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι εγκάρσιο. Τα διανύσματα του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου είναι κάθετα μεταξύ τους και κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.

Κάθε στιγμή το πηλίκο των μέτρων των εντάσεων του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου ισούται με την ταχύτητα του φωτός

$$\left(\frac{E}{B}=c\right).$$

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα - όπως και τα μηχανικά - υπακούουν στην αρχή της επαλληλίας.

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα δημιουργούνται από μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία. Ένα σταθερό ηλεκτρικό πεδίο ή ένα σταθερό μαγνητικό πεδίο δεν παράγει ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Αυτό σημαίνει ότι τα ακίνητα φορτία καθώς και τα φορτία που κινούνται με σταθερή ταχύτητα (σταθερά ρεύματα) δε μπορούν να δημιουργήσουν ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Μόνο ηλεκτρικά φορτία που επιταχύνονται δημιουργούν ηλεκτρομαγνητικά κύματα.

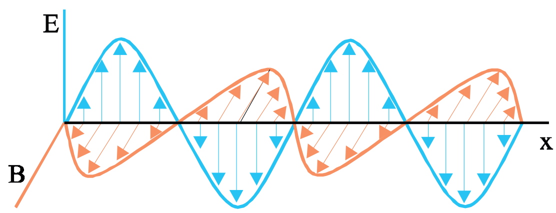
Η αιτία δημιουργίας του ηλεκτρομαγνητικού κύματος είναι η επιταχυνόμενη κίνηση των ηλεκτρικών φορτίων.

Οι κεραίες των ραδιοφωνικών ή τηλεοπτικών σταθμών είναι ταλαντούμενα ηλεκτρικά δίπολα. Κατά την ταλάντωση του φορτίου στην κεραία παράγεται ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Το ρεύμα στην κεραία γίνεται μέγιστο όταν τα φορτία στα άκρα της μηδενίζονται ενώ όταν τα φορτία έχουν μέγιστη τιμή, το ρεύμα μηδενίζεται. Αυτό σημαίνει ότι, κοντά στην κεραία, το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο έχουν διαφορά φάσης $90°$ (όταν το ένα είναι μέγιστο το άλλο είναι μηδέν). Σε μεγάλη όμως απόσταση από την κεραία τα δύο πεδία είναι σε φάση.

Οι εξισώσεις που περιγράφουν το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο ενός αρμονικού ηλεκτρομαγνητικού κύματος που διαδίδεται κατά τη διεύθυνση x είναι

$$\boxed{\begin{aligned} E &= E_{max}\ \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) \\ B &= B_{max}\ \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) \end{aligned}}$$

Στο σχήμα (2.21) φαίνεται το στιγμιότυπο ενός αρμονικού ηλεκτρομαγνητικού κύματος.



Στιγμιότυπο αρμονικού ηλεκτρομαγνητικού κύματος, διαδιδόμενου κατά τη διεύθυνση x.

Σχήμα 2-21.

2.7. Η Μετάδοση και Λήψη Σημάτων με Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα

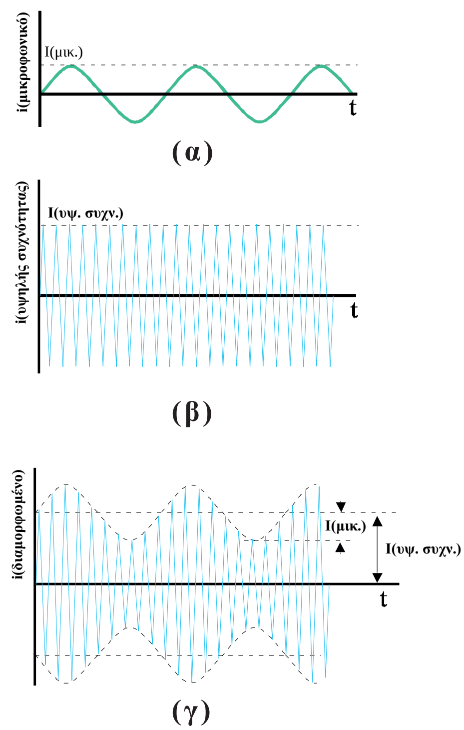
Η εποχή μας θα μπορούσε να χαρακτηριστεί «εποχή της πληροφορίας». Ασύλληπτα μεγάλος αριθμός πληροφοριών μεταφέρονται από τον **πομπό** στο **δέκτη** της πληροφορίας, με καλώδια χαλκού ή με οπτικές ίνες ή - στην ασύρματη τηλεπικοινωνία - μέσω των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

Σε κάθε μορφή τηλεπικοινωνίας, η προς μετάδοση πληροφορία - ήχος ή εικόνα - «μετατρέπεται» με το κατάλληλο μέσο - μικρόφωνο ή βιντεοκάμερα, αντίστοιχα - σε ένα ηλεκτρικό ρεύμα (σήμα). Το ηλεκτρικό αυτό ρεύμα στην κεραία του πομπού μετατρέπεται σε ηλεκτρομαγνητικό κύμα που κινούμενο με την ταχύτητα του φωτός φτάνει στο δέκτη για να «μετατραπεί» και πάλι σε ρεύμα και στη συνέχεια σε ήχο ή εικόνα με μια κατά βάση αντίστροφη διαδικασία.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε πώς γίνεται η μετάδοση ενός ήχου στην ασύρματη τηλεπικοινωνία.

Η εκπομπή

Με ένα μικρόφωνο, ένας ήχος μπορεί να μας δώσει μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό ρεύμα. Οι διακυμάνσεις του μικροφωνικού ρεύματος εξαρτώνται από τον ήχο που φτάνει στο μικρόφωνο. Ένας απλός ήχος, π.χ. ο ήχος ενός διαπασών, δίνει μικροφωνικό ρεύμα που έχει τη μορφή του σχήματος 2.22α. Με άλλη διάταξη, ο πομπός παράγει υψίσυχνο αρμονικό ρεύμα (σχήμα 2.22β) με ορισμένη συχνότητα, χαρακτηριστική του κάθε σταθμού (φέρουσα συχνότητα). Στο υψίσυχνο αυτό ρεύμα προστίθεται το μικροφωνικό ρεύμα. Το ρεύμα που προκύπτει, αφού ενισχυθεί, οδηγείται στην κεραία εκπομπής, η οποία εκπέμπει ηλεκτρομαγνητικό κύμα της ίδιας μορφής.



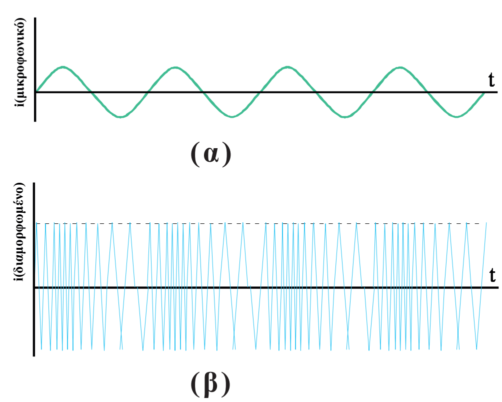
(α) Μικροφωνικό ρεύμα (β) ρεύμα υψηλής συχνότητας (γ) διαμορφωμένο ρεύμα.
Σχήμα 2-22.

Η διαδικασία πρόσθεσης των δύο ρευμάτων είναι μια πολύπλοκη διαδικασία που ονομάζεται **διαμόρφωση**. Κατά τη διαδικασία αυτή το μικροφωνικό ρεύμα «αποτυπώνεται» στο υψίσυχνο ρεύμα.

Η διαμόρφωση μπορεί να γίνει με δυο τρόπους. Στη **διαμόρφωση κατά πλάτος** ή **AM** (από τις λέξεις amplitude modulation) το μικροφωνικό ρεύμα μεταβάλλει το πλάτος του υψίσυχνου ρεύματος. Στην περίπτωση του μικροφωνικού ρεύματος που παίρνουμε από απλό ήχο, το διαμορφωμένο ρεύμα παρουσιάζει τη μορφή του σχήματος 2.22γ.

Στη **διαμόρφωση κατά συχνότητα** ή **FM** (frequency modulation) (σχ. 2.23) η συχνότητα του διαμορφωμένου ρεύματος δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται περιοδικά ανάλογα με την ένταση του μικροφωνικού ρεύματος.

Το πλεονέκτημα αυτής της διαμόρφωσης είναι ότι το εκπεμπόμενο ηλεκτρομαγνητικό κύμα δεν επηρεάζεται σημαντικά από παράσιτα.



(α) Μικροφωνικό ρεύμα (β) ρεύμα διαμορφωμένο κατά συχνότητα
Σχήμα 2-23.

Η διαμόρφωση επιβάλλεται για δύο λόγους. α) Το μήκος μιας κεραίας πρέπει να είναι συγκρίσιμο με το μήκος του ηλεκτρομαγνητικού κύματος που εκπέμπει. Τα μικροφωνικά ρεύματα έχουν συχνότητες που κυμαίνονται από 20Hz - 20000Hz (ακουστές συχνότητες). Επομένως, για να εκπεμφθεί ηλεκτρομαγνητικό κύμα με τέτοιες συχνότητες απαιτείται κεραία μήκους πολλών χιλιομέτρων. β) Κάθε πομπός πρέπει να έχει κάποια ταυτότητα ώστε να είναι δυνατή η αναγνώριση και η επιλογή του από κάποιο δέκτη.

Στο σχήμα 2.24 δίνεται το γενικό διάγραμμα ενός ραδιοφωνικού πομπού.

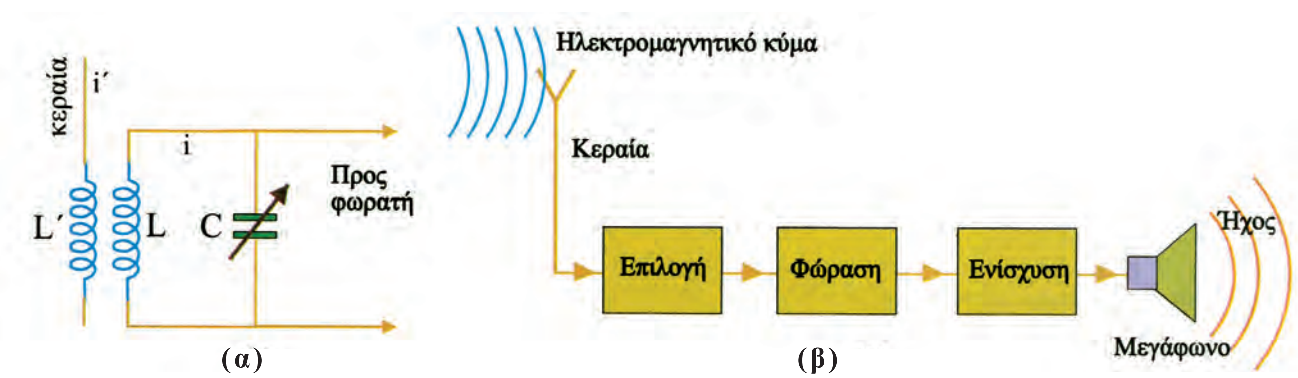
Το γενικό διάγραμμα ενός ραδιοφωνικού πομπού.
Σχήμα 2-24.

Η λήψη

Η λήψη του ηλεκτρομαγνητικού κύματος από το δέκτη (ραδιόφωνο) γίνεται με ένα αγωγό (κεραία) που, συνήθως, είναι ένα απλό σύρμα. Η κεραία του δέκτη «εκτίθεται» στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα πολλών σταθμών. Η επιλογή ενός συγκεκριμένου πομπού (σταθμού) πραγματοποιείται με ένα κύκλωμα LC, επαγωγικά συνδεδεμένο με την κεραία του δέκτη (σχ. 2.25α). Ο πυκνωτής του κυκλώματος αυτού είναι μεταβλητός. Όταν μεταβάλλουμε τη χωρητικότητα του πυκνωτή, στρέφοντας το κουμπί επιλογής σταθμών, μεταβάλλουμε την ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος LC.

Κάθε ραδιοφωνικός σταθμός, με τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που εκπέμπει, δημιουργεί στην κεραία ένα ηλεκτρικό ρεύμα. Το ρεύμα που έχει συχνότητα ίση με την ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος LC ενισχύεται στο κύκλωμα. Το ρεύμα αυτό είναι όμοιο με το διαμορφωμένο ρεύμα του πομπού που έχει επιλεγεί. Στη συνέχεια, το ρεύμα αυτό, με μια διαδικασία που ονομάζεται **φώραση** ή αποδιαμόρφωση, διαχωρίζεται στο, άχρηστο πλέον, υψίσυχνο ρεύμα και στο ρεύμα χαμηλής συχνότητας, που είναι όμοιο με το μικροφωνικό ρεύμα του πομπού. Το χαμηλής συχνότητας ρεύμα, αφού ενισχυθεί, διαβιβάζεται στο μεγάφωνο το οποίο παράγει ήχο όμοιο με τον ήχο που δημιούργησε το μικροφωνικό ρεύμα στον πομπό (σχ. 2.25β).

Στο σχήμα 2.25β δίνεται το γενικό διάγραμμα ενός ραδιοφωνικού δέκτη.



(α) Το κύκλωμα επιλογής (β) Σχηματική παράσταση της διαδικασίας λήψης

Σχήμα 2-25.

2.8. Το Φάσμα Της Ηλεκτρομαγνητικής Ακτινοβολίας

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα δεν παράγονται μόνο από ταλαντούμενα ηλεκτρικά δίπολα. Σήμερα γνωρίζουμε ότι συνδέονται με ένα πλήθος φυσικών φαινομένων όπως είναι η αποδιέγερση των ατόμων, οι πυρηνικές διασπάσεις κ.ά. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα καλύπτουν ένα ευρύτατο φάσμα μηκών κύματος και συχνοτήτων. Η έκταση του φάσματος αυτού παρουσιάζεται στο σχήμα 2.26, στο οποίο σημειώνονται προσεγγιστικά οι περιοχές μήκους κύματος και συχνότητας των διαφόρων τμημάτων του. Παρά τις τεράστιες διαφορές στις εφαρμογές και στην παραγωγή τους, όλα τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα έχουν τα γενικά χαρακτηριστικά που περιγράψαμε στην παράγραφο 2-6.

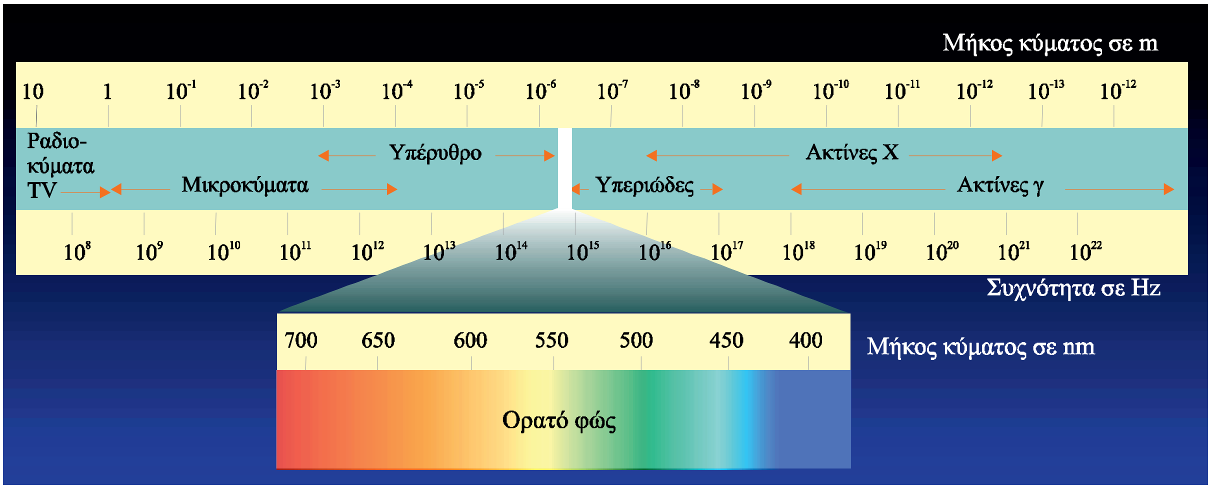
Εφόσον όλα διαδίδονται στο κενό με την ταχύτητα c, η συχνότητά τους και το μήκος κύματος συνδέονται με τη σχέση

$$\boxed{c = \lambda f}$$

Θα κάνουμε μια σύντομη περιγραφή των διαφόρων περιοχών του φάσματος της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας κατά σειρά ελαττούμενου μήκους κύματος. Πρέπει όμως να έχουμε υπόψη μας ότι δεν υπάρχει σαφής διαχωρισμός του κάθε τμήματος του φάσματος της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας από τα υπόλοιπα.

Ραδιοκύματα. Είναι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα με μήκος κύματος από 10^5 m έως μερικά εκατοστά. Δημιουργούνται από ηλεκτρονικά κυκλώματα, όπως τα κυκλώματα LC, και χρησιμοποιούνται στη ραδιοφωνία και την τηλεόραση.

Μικροκύματα. Το μήκος κύματός τους εκτείνεται από 30cm έως 1mm περίπου. Παράγονται από ηλεκτρονικά κυκλώματα. Οι φούρνοι μικροκυμάτων με τους οποίους μαγειρεύουμε ή ζεσταίνουμε γρήγορα το φαγητό λειτουργούν με κύματα αυτής της περιοχής. Μικροκύματα χρησιμοποιούν και τα ραντάρ.



Το φάσμα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Στη λεπτομέρεια φαίνεται η περιοχή του ορατού φωτός.

Σχήμα 2-26.

Υπέρυθρα κύματα. Καλύπτουν την περιοχή από 1mm έως 7×10^{-7} m περίπου. Τα κύματα αυτά εκπέμπονται από τα θερμά σώματα και απορροφώνται εύκολα από τα περισσότερα υλικά. Η υπέρυθρη ακτινοβολία που απορροφάται από ένα σώμα αυξάνει το πλάτος της ταλάντωσης των σωματιδίων από τα οποία αποτελείται, αυξάνοντας έτσι τη θερμοκρασία του.

Το ορατό φως. Είναι το μέρος εκείνο της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που ανιχνεύει ο ανθρώπινος οφθαλμός. Το μήκος κύματος του ορατού φωτός κυμαίνεται από 400 nm έως 700 nm (δηλαδή από 400×10^{-9}m έως 700×10^{-9}m). Το ορατό φως παράγεται από την ανακατανομή των ηλεκτρονίων στα άτομα και στα μόρια. Κάθε υποπεριοχή του ορατού φάσματος προκαλεί στον άνθρωπο την αίσθηση κάποιου συγκεκριμένου χρώματος. Προσεγγιστικά τα μήκη κύματος των διαφόρων χρωμάτων του ορατού φάσματος είναι:

700 έως	630 nm	Ερυθρό
630 έως	590 nm	Πορτοκαλί
590 έως	560 nm	Κίτρινο
560 έως	480 nm	Πράσινο
480 έως	440 nm	Κυανό
440 έως	400 nm	Ιώδες

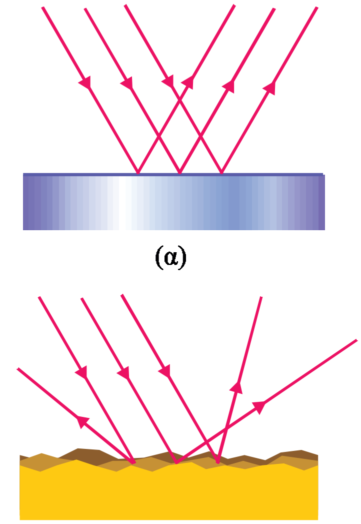
Μια ακτινοβολία που περιέχει μήκη κύματος σε μια πολύ στενή περιοχή χαρακτηρίζεται **μονοχρωματική**. Για παράδειγμα, μια ακτινοβολία από 490 έως 491 nm είναι μια πράσινη μονοχρωματική ακτινοβολία. Τέτοια ακτινοβολία μπορούμε να πάρουμε με τη χρήση ειδικών πηγών ή φίλτρων. Όταν χρησιμοποιούμε την έκφραση «μονοχρωματικό φως με μήκος κύματος 580 nm» στην πραγματικότητα εννοούμε φως σε μια στενή περιοχή μηκών κύματος γύρω στα 580 nm. Το απόλυτα μονοχρωματικό φως, δηλαδή το φως που αποτελείται μόνο από ένα μήκος κύματος, αποτελεί μια εξιδανίκευση. Τα λέιζερ παράγουν φως που πλησιάζει πολύ στο απόλυτα μονοχρωματικό.

Υπεριώδης ακτινοβολία. Η ακτινοβολία αυτή καλύπτει τα μήκη κύματος από $3{,}8 \times 10^{-7}$ m έως 6×10^{-8} m περίπου. Ο Ήλιος είναι ισχυρή πηγή υπεριώδους ακτινοβολίας. Οι υπεριώδεις ακτίνες είναι υπεύθυνες για το «μαύρισμα» όταν κάνουμε ηλιοθεραπεία, το καλοκαίρι. Μεγάλες δόσεις υπεριώδους ακτινοβολίας βλάπτουν τον ανθρώπινο οργανισμό. Το μεγαλύτερο μέρος της υπεριώδους ακτινοβολίας, που φτάνει στη Γη από τον Ήλιο απορροφάται από τα άτομα και τα μόρια της ανώτερης ατμόσφαιρας (στρατόσφαιρα).

Το όζον της στρατόσφαιρας, απορροφά κατά κύριο λόγο την επικίνδυνη υπεριώδη ακτινοβολία. Σήμερα ανησυχούμε για την πιθανή καταστροφή αυτής της προστατευτικής ασπίδας ενάντια στις υπεριώδεις ακτίνες του Ήλιου. Το όζον της στρατόσφαιρας μειώνεται εξαιτίας εκτεταμένης χρήσης των χλωροφθορανθράκων, ενώσεων που χρησιμοποιούνται στα ψυγεία, τα κλιματιστικά τους ψεκαστήρες και αλλού.

Οι ακτίνες X (ή ακτίνες Röntgen) είναι ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με μήκη κύματος από 10^{-8} m έως 10^{-13} m περίπου. Η πιο κοινή αιτία παραγωγής ακτίνων Χ είναι η επιβράδυνση ηλεκτρονίων που προσκρούουν με μεγάλη ταχύτητα σε ένα μεταλλικό στόχο. Οι ακτίνες Χ χρησιμοποιούνται στην ιατρική, κυρίως για διαγνωστικούς σκοπούς (ακτινογραφίες), και στη μελέτη των διαφόρων κρυσταλλικών δομών. Οι ακτίνες Χ μπορούν να προκαλέσουν βλάβες στους ζωντανούς οργανισμούς και γι' αυτό πρέπει να αποφεύγουμε την έκθεσή μας σ' αυτές χωρίς σοβαρό λόγο.

Οι ακτίνες γ. Είναι ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που εκπέμπεται από ορισμένους ραδιενεργούς πυρήνες καθώς και σε αντιδράσεις πυρήνων και στοιχειωδών σωματιδίων ή ακόμα και κατά τη διάσπαση στοιχειωδών σωματιδίων. Τα μήκη κύματός τους αρχίζουν από 10^{-10} m και φτάνουν ως τα 10^{-14} m. Είναι πολύ διεισδυτικές και βλάπτουν τους οργανισμούς που τις απορροφούν.



(α) Κατοπτρική ανάκλαση (β) διάχυση

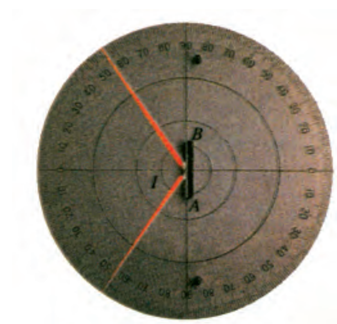
Σχήμα 2-27.

2.9. Ανάκλαση και Διάθλαση

Α. Ανάκλαση του φωτός

Όταν το φως που διαδίδεται σε ένα μέσο συναντήσει τη διαχωριστική επιφάνεια ανάμεσα στο αρχικό μέσο διάδοσης και σε ένα άλλο, ένα μέρος του επιστρέφει στο αρχικό μέσο.

Στο σχήμα 2.27α βλέπουμε πώς ανακλώνται οι ακτίνες μιας φωτεινής παράλληλης δέσμης που προσπίπτει πάνω σε λεία και στιλπνή επιφάνεια, (κάτοπτρο). Οι ανακλώμενες ακτίνες εξακολουθούν να είναι παράλληλες μεταξύ τους και η ανάκλαση αυτή ονομάζεται **κατοπτρική ανάκλαση**.



Διάταξη για την πειραματική μελέτη της ανάκλασης του φωτός.

Εικόνα 2-7.

Εάν η επιφάνεια πάνω στην οποία προσπίπτει η δέσμη έχει ανωμαλίες, οι ακτίνες που την αποτελούν ανακλώνται σε διάφορες διευθύνσεις (σχ. 2.27β) και σκορπίζουν στο γύρω χώρο. Η ανάκλαση αυτή, στην οποία οι ανακλώμενες ακτίνες δεν είναι πια παράλληλες, ονομάζεται **διάχυση**.

Τη νύχτα, αν ο δρόμος είναι στεγνός, το φως από τους προβολείς του αυτοκινήτου διαχέεται και έτσι ο δρόμος φαίνεται καλά. Εάν όμως έχει βρέξει, το νερό γεμίζει τις λακκούβες και το φως των προβολέων ανακλάται κατοπτρικά πάνω στην επιφάνεια του νερού με αποτέλεσμα να μη φωτίζονται όλα τα σημεία του δρόμου, ο οποίος, στην περίπτωση αυτή δε διακρίνεται καλά.

Στη συνέχεια, όταν χρησιμοποιούμε τον όρο ανάκλαση θα εννοούμε κατοπτρική ανάκλαση.

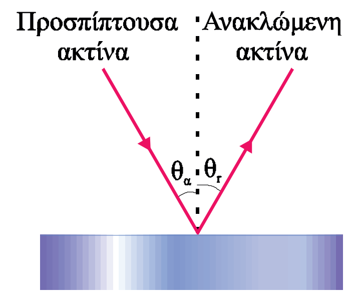
Το είδωλο που βλέπουμε στην επιφάνεια της λίμνης προέρχεται από ακτίνες που φτάνουν σε μας αφού ανακλαστούν στην επιφάνειά της.

Εικόνα 2-8.

Έστω ότι μια φωτεινή ακτίνα προσπίπτει υπό γωνία πάνω σε μια λεία επιφάνεια και ανακλάται (σχ. 2.28). Τη γωνία ανάμεσα στην αρχική διεύθυνση της ακτίνας και στην κάθετη στην επιφάνεια την ονομάζουμε **γωνία πρόσπτωσης** (θ_α), και τη γωνία ανάμεσα στην κάθετη στην επιφάνεια και στη διεύθυνση της ανακλώμενης ακτίνας, **γωνία ανάκλασης** (θ_r). Πειραματικά προκύπτει ότι:

1. **Η προσπίπτουσα ακτίνα, η ανακλώμενη και η κάθετη στην επιφάνεια στο σημείο πρόσπτωσης, βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.**
2. **Η γωνία ανάκλασης θ_r, είναι ίση με τη γωνία πρόσπτωσης θ_α.**

$$\boxed{\theta_r = \theta_a}$$



Ανάκλαση φωτεινής ακτίνας. θ_α είναι η γωνία πρόσπτωσης και θ_r η γωνία ανάκλασης. Ισχύει $\theta_\alpha = \theta_r$.

Σχήμα 2-28.

Β. Διάθλαση του φωτός

Όταν το φως συναντήσει την επιφάνεια που διαχωρίζει το μέσον στο οποίο διαδίδεται από ένα άλλο διαφανές μέσο, στο οποίο διαδίδεται με διαφορετική ταχύτητα, ένα μέρος του ανακλάται και το υπόλοιπο μέρος του διαθλάται, δηλαδή περνάει στο δεύτερο μέσο, αλλάζοντας πορεία.

Η γωνία που σχηματίζει η διαθλώμενη ακτίνα με την κάθετη στην επιφάνεια λέγεται γωνία διάθλασης (σχ. 2.29).

Γνωρίζουμε ότι το φως διαδίδεται με τη μεγαλύτερη ταχύτητα στο κενό.

Ο λόγος της ταχύτητας του φωτός στο κενό (c) , προς την ταχύτητά του (υ) στο υλικό

$$\boxed{n = \frac{c}{\upsilon}}$$

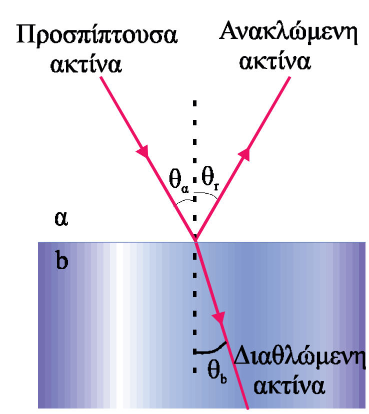
ονομάζεται δείκτης διάθλασης (n) του οπτικού υλικού.

Ο δείκτης διάθλασης είναι καθαρός αριθμός και για οποιοδήποτε υλικό είναι μεγαλύτερος της μονάδας. Επειδή η ταχύτητα του φωτός στον αέρα είναι περίπου ίση με την ταχύτητα με την οποία διαδίδεται στο κενό ο δείκτης διάθλασης του αέρα συνήθως θεωρείται ίσος με τη μονάδα.

Πειραματικά προκύπτει ότι

1. **Η προσπίπτουσα ακτίνα, η διαθλώμενη και η κάθετη στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων, στο σημείο πρόσπτωσης της ακτίνας βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.**
2. **Όταν το φως είναι μονοχρωματικό, ο λόγος του ημίτονου της γωνίας πρόσπτωσης (θ_a) προς το ημίτονο της γωνίας διάθλασης (θ_b) είναι ίσος με τον αντίστροφο λόγο των δεικτών διάθλασης των δύο μέσων.**

$$\frac{\eta\mu\theta_\alpha}{\eta\mu\theta_b} = \frac{n_b}{n_a} \quad \text{ή} \quad \boxed{n_a\,\eta\mu\theta_\alpha = n_b\,\eta\mu\theta_b} \qquad (2.16)$$



Ανάκλαση και διάθλαση φωτεινής μονοχρωματικής δέσμης κατά τη μετάβαση από ένα διαφανές μέσο σε άλλο.

Σχήμα 2-29.

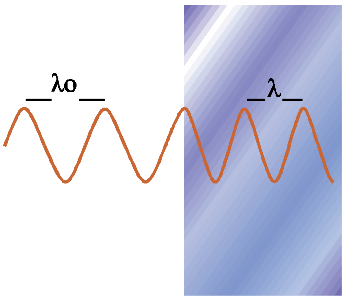
Η σχέση αυτή ονομάζεται και **νόμος του Snell** (Σνελ).

Η σχέση (2.16) δείχνει ότι όταν μια ακτίνα διέρχεται από ένα υλικό α σε ένα υλικό b στο οποίο η ταχύτητα του φωτός είναι μικρότερη ($n_b > n_a$), τότε η γωνία διάθλασης είναι μικρότερη από τη γωνία πρόσπτωσης, δηλαδή η διαθλώμενη ακτίνα πλησιάζει στην κάθετη, στο σημείο πρόσπτωσης. Αντίθετα αν η ταχύτητα του φωτός στο δεύτερο υλικό (b) είναι μεγαλύτερη της ταχύτητάς του στο πρώτο ($n_b < n_a$), η διαθλώμενη ακτίνα απομακρύνεται από την κάθετη.

Ο δείκτης διάθλασης του κενού είναι εξ ορισμού ίσος με τη μονάδα, επομένως όταν μια ακτίνα διέρχεται από το κενό σε ένα υλικό, πλησιάζει πάντα την κάθετη.

Όταν μια ακτίνα προσπίπτει κάθετα στη διαχωριστική επιφάνεια, $\theta_\alpha = 0$, $\eta\mu\theta_\alpha = 0$ και από (2.16) προκύπτει ότι και $\theta_b = 0$. Δηλαδή η ακτίνα δεν αλλάζει κατεύθυνση.

Από τους νόμους της διάθλασης προκύπτει ότι η πορεία που ακολουθεί μια ακτίνα είναι ίδια είτε αυτή μεταβαίνει από το υλικό α στο b είτε αντίστροφα.



Μονοχρωματική ακτινοβολία περνάει από τον αέρα σε ένα διαφανές μέσο. Το μήκος κύματος της ακτινοβολίας μειώνεται.

Σχήμα 2-30.

Όταν το μονοχρωματικό φως διέρχεται από ένα υλικό σε κάποιο άλλο, η συχνότητά του (f), δεν αλλάζει. Αφού η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται το φως είναι διαφορετική στα δυο μέσα και η συχνότητα της ακτινοβολίας μένει σταθερή, το μήκος κύματος της ακτινοβολίας πρέπει να είναι διαφορετικό στα δυο μέσα. $(\upsilon = \lambda f)$

Εάν το ένα μέσο είναι το κενό ή - στην πράξη - ο αέρας τότε

$$c=\lambda_0 f$$

όπου λ_0 το μήκος κύματος της ακτινοβολίας στο κενό. Σε κάθε υλικό ισχύει

$$\upsilon = \lambda f$$

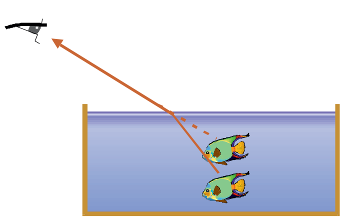
Διαιρώντας τις δύο σχέσεις προκύπτει

$$\frac{c}{\upsilon} = \frac{\lambda_0}{\lambda} \quad \text{ή} \quad n = \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

$$\text{οπότε} \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

επομένως **το μήκος κύματος μιας μονοχρωματικής ακτινοβολίας που μεταβαίνει από το κενό ή τον αέρα σε κάποιο άλλο μέσο μειώνεται.**

Στο φαινόμενο της διάθλασης οφείλονται πολλές οφθαλμαπάτες, όπως το φαινομενικό σπάσιμο μιας ράβδου που ένα τμήμα της είναι βυθισμένο στο νερό. Μια άλλη οφθαλμαπάτη φαίνεται στο σχήμα 2.31. Το μάτι αντιλαμβάνεται το φως σαν να διαδίδεται ευθύγραμμα. Έτσι βλέπει το ψάρι στην προέκταση της ακτίνας (εστιγμένη γραμμή), πιο κοντά στην επιφάνεια από ότι είναι πραγματικά.

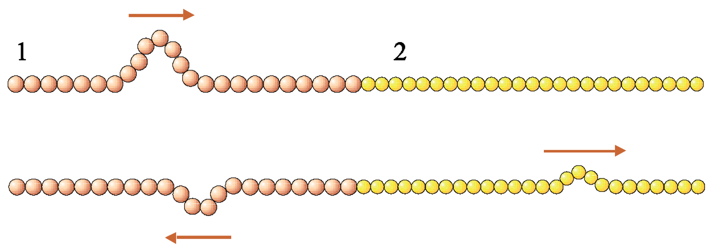


Εξαιτίας της διάθλασης ένα αντικείμενο μέσα στο νερό φαίνεται να βρίσκεται πιο κοντά στην επιφάνεια από όσο είναι πραγματικά.

Σχήμα 2-31.

Μελετήσαμε τα φαινόμενα της ανάκλασης και της διάθλασης για το φως κι αυτό γιατί ο ρόλος των φαινομένων στον κλάδο της φυσικής που μελετά το φως και ονομάζεται **οπτική** είναι σημαντικός, αλλά και γιατί, με το φως τα φαινόμενα είναι εύκολα παρατηρήσιμα.

Ωστόσο πρέπει να επισημάνουμε ότι τα φαινόμενα αυτά δεν περιορίζονται μόνο στα φωτεινά κύματα αλλά είναι κοινά σε όλα τα είδη κυμάτων, ηλεκτρομαγνητικά και μηχανικά.



Όταν ο κυματικός παλμός που διαδίδεται στο μέσο 1 συναντήσει το μέσο 2 εν μέρει ανακλάται και εν μέρει συνεχίζει στο μέσο 2, με άλλη ταχύτητα.
Σχήμα 2-32.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι τα ραδιοκύματα ανακλώνται σε μεταλλικές επιφάνειες. Θα έχετε παρατηρήσει τις κεραίες εκπομπής με μεταλλικό «κάτοπτρο» ή τις κεραίες δορυφορικής λήψης που επίσης φέρουν κάτοπτρο. Οι μεταλλικές επιφάνειες παίζουν για τα ραδιοκύματα το ρόλο που παίζουν οι καθρέφτες για το φως. Σε πολλές κεραίες εκπομπής, υπάρχει μια παραβολική μεταλλική επιφάνεια (κάτοπτρο). Χωρίς το κάτοπτρο, το κύμα που παράγεται από το ταλαντούμενο ηλεκτρικό δίπολο θα διασκορπιζόταν σε όλο το χώρο γύρω του. Με το κάτοπτρο, μετά την ανάκλασή του το κύμα διαδίδεται προς μια μόνο κατεύθυνση. Το κύμα αυτό είναι ικανό να φτάσει πολύ μακριά χωρίς σημαντική εξασθένιση. Στις κεραίες λήψης, το κάτοπτρο ανακλά τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που πέφτουν πάνω του και τα εστιάζει στην κεραία, με αποτέλεσμα το σήμα στην κεραία να είναι πιο ισχυρό.

Παραβολικές κεραίες ραδιοτηλεσκόπιου.
Εικόνα 2-9.

Στον πίνακα που ακολουθεί αναφέρονται οι δείκτες διάθλασης ορισμένων υλικών, για το κίτρινο φως με μήκος κύματος $\lambda_0 = 589\ \text{nm}$.

Υλικό	Δείκτης Διάθλασης
Στερεά	
Πάγος	1,309
Πυριτική στεφανύαλος	1,52
Μολυβδύαλος (κρύσταλλο)	1,66
Φθορίτης	1,434
Χλωριούχο νάτριο	1,544
Αδάμας	2,419

Υλικό	Δείκτης Διάθλασης
Υγρά	
Νερό	1,333
Αιθυλική αλκοόλη	1,361
Βενζόλιο	1,501
Αέρια	
Αέρας	1,000293
Διοξείδιο του άνθρακα	1,00045

Παράδειγμα 2.3

Ακτίνα φωτός μήκους κύματος $\lambda_0 = 590\times10^{-9}$ m μεταβαίνει από τον αέρα σε γυαλί, που έχει δείκτη διάθλασης 1,52. Η γωνία πρόσπτωσης της ακτίνας είναι $\theta_\alpha = 30°$. Να υπολογίσετε:
α) τη συχνότητα της ακτινοβολίας στον αέρα και στο γυαλί,
β) την ταχύτητα διάδοσης στο γυαλί,
γ) το μήκος κύματος της ακτινοβολίας στο γυαλί,
δ) τη γωνία διάθλασης της ακτίνας.
Η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι $c = 3\times10^8\ m/s$.

Απάντηση:

α) Όταν το φως διαδίδεται στον αέρα η ταχύτητά του είναι σχεδόν όση και η ταχύτητά του στο κενό δηλαδή c. Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε

$$c=\lambda_0 f \quad \text{ή} \quad f=\frac{c}{\lambda_0}=5\times10^{14}\ Hz$$

Η συχνότητα μιας ακτινοβολίας δεν αλλάζει όταν το φως μεταβαίνει από το ένα μέσο στο άλλο. Επομένως, και στο γυαλί η συχνότητα της ακτινοβολίας είναι $f=5\times10^{14}\ Hz$.

β) Ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού είναι

$$n=\frac{c}{\upsilon} \quad \text{επομένως}$$

$$\upsilon=\frac{c}{n}=1,973\times10^8\ m/s$$

γ) Για να βρούμε το μήκος κύματος της ακτινοβολίας στο γυαλί χρησιμοποιούμε πάλι τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής για τη διάδοσή της στο γυαλί.

$$\upsilon=\lambda f \quad \text{οπότε} \quad \lambda=\frac{\upsilon}{f}=395\times10^{-9}\ m$$

δ) Σύμφωνα με το νόμο του Snell

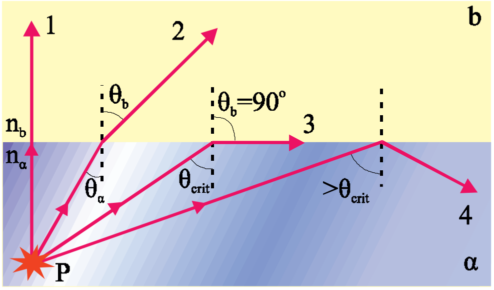
$$n_\alpha\, \eta\mu\theta_\alpha = n_b\, \eta\mu\theta_b$$

Το αρχικό μέσο (α) είναι ο αέρας με δείκτη διάθλασης $n_a=1$, ενώ μέσο b είναι το γυαλί με δείκτη διάθλασης $n_b=n$. Επομένως

$$\eta\mu\theta_a = n\, \eta\mu\theta_b \quad \text{άρα} \quad \eta\mu\theta_b=\frac{\eta\mu 30^\circ}{n}=0,329\,, \quad \theta_b=19,2^\circ$$

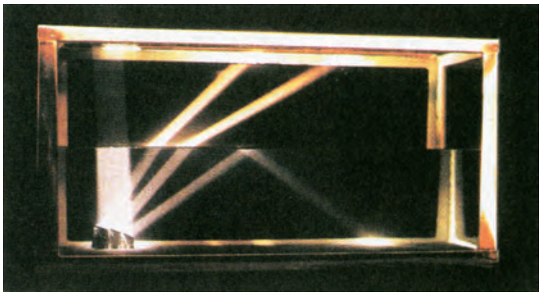
2.10. Ολική Ανάκλαση

Το σχήμα 2.33 δείχνει μερικές ακτίνες μονοχρωματικού φωτός που εκπέμπονται από μια σημειακή πηγή P, μέσα σε ένα υλικό α με δείκτη διάθλασης n_α. Οι ακτίνες προσπίπτουν στην επιφάνεια που χωρίζει το υλικό α από ένα δεύτερο διαφανές υλικό b που έχει δείκτη διάθλασης n_b.



Φωτεινές ακτίνες που εκπέμπονται από τη σημειακή πηγή P, προσπίπτουν στη διαχωριστική επιφάνεια δύο διαφανών μέσων. Αν $n_a > n_b$ κάποιες ακτίνες υφίστανται ολική ανάκλαση.

Σχήμα 2-33.



Στη διάταξη φαίνεται τόσο η διάθλαση όσο και η ολική ανάκλαση στη διαχωριστική επιφάνεια νερού - αέρα.

Εικόνα 2-10.

Έστω ότι $n_a > n_b$. Από το νόμο του Snell, για τη γωνία διάθλασης μιας τέτοιας ακτίνας έχουμε

$$\eta\mu\theta_b = \frac{n_a}{n_b}\eta\mu\theta_\alpha \qquad (2.17)$$

Επειδή ο λόγος n_a/n_b είναι μεγαλύτερος της μονάδας, το $\eta\mu\theta_b$ είναι μεγαλύτερο του $\eta\mu\theta_\alpha$, επομένως $\theta_b > \theta_\alpha$. Άρα υπάρχει μια τιμή της θ_α - μικρότερη από τις $90°$ - για την οποία ο νόμος του Snell δίνει $\eta\mu\theta_b = 1$ επομένως $\theta_b = 90°$. Αυτό συμβαίνει στην περίπτωση της ακτίνας 3 του σχήματος 2.33. Η γωνία θ_α για την οποία η διαθλώμενη ακτίνα κινείται παράλληλα προς τη διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων ονομάζεται **κρίσιμη γωνία (ή οριακή γωνία)** και συμβολίζεται με θ_{crit}. Όταν η γωνία πρόσπτωσης γίνει μεγαλύτερη από τη θ_{crit}, η ακτίνα ανακλάται ολικά από τη διαχωριστική επιφάνεια.

Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **ολική ανάκλαση**. Μια τέτοια περίπτωση παριστάνεται με την ακτίνα 4 στο σχήμα 2.33. Η ακτίνα 4 ανακλάται από τη διαχωριστική επιφάνεια σαν να έπεσε πάνω σε ένα τέλειο κάτοπτρο. Η ακτίνα αυτή, όπως και όλες οι ακτίνες που υφίστανται ολική ανάκλαση, ακολουθούν το νόμο της ανάκλασης δηλαδή, η γωνία πρόσπτωσης ισούται με τη γωνία ανάκλασης.

Μπορούμε να βρούμε την κρίσιμη γωνία θ_{crit} χρησιμοποιώντας το νόμο του Snell. Αν στη σχέση (2.17) θέσουμε $\theta_b = 90°$ προκύπτει

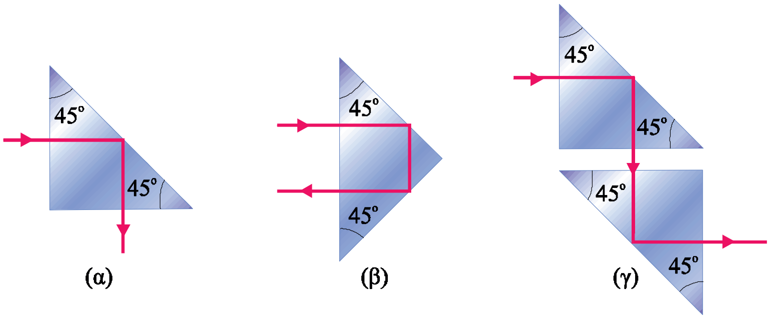
$$\eta\mu\theta_{crit} = \frac{n_b}{n_a} \qquad (2.18)$$

Η σχέση (2.18) ισχύει μόνο όταν $n_a > n_b$, διαφορετικά θα έδινε $ημθ_{crit} > 1$, που είναι αδύνατο.

Επομένως,

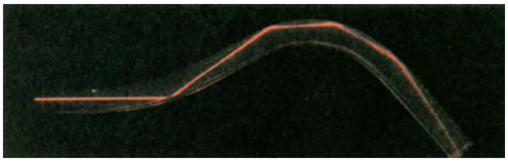
το φαινόμενο της ολικής ανάκλασης συμβαίνει μόνο όταν το φως μεταβαίνει από μέσο (α) σε μέσο (b) για τα οποία ισχύει $n_a > n_b$. Για να έχουμε ολική ανάκλαση πρέπει η γωνία πρόσπτωσης να είναι μεγαλύτερη της κρίσιμης γωνίας.

Για το φως που κατευθύνεται από το γυαλί στον αέρα, η κρίσιμη γωνία είναι $41{,}1°$. Η κρίσιμη γωνία είναι γενικά μικρή, όταν ένα μέσο έχει μεγάλο δείκτη διάθλασης και το άλλο είναι ο αέρας. Στο διαμάντι η κρίσιμη γωνία είναι $24°$. Η μικρή κρίσιμη γωνία είναι ο λόγος που ένα κατεργασμένο διαμάντι (με πολλές έδρες) λαμποκοπά στο φως. Το μεγαλύτερο μέρος του φωτός που εισέρχεται στο διαμάντι, υφίσταται ολική ανάκλαση στις διάφορες έδρες του. Για να εξέλθει πρέπει να προσπέσει σχεδόν κάθετα στις έδρες του.



Πρίσματα ολικής ανάκλασης. Το (γ) δείχνει πώς λειτουργεί το περισκόπιο.

Σχήμα 2-34



Η μετάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στις οπτικές ίνες στηρίζεται στο φαινόμενο της ολικής ανάκλασης.

Εικόνα 2-11.

Εάν χρησιμοποιήσουμε το κατάλληλο πρίσμα, μπορούμε με το φαινόμενο της ολικής ανάκλασης να μεταβάλουμε την κατεύθυνση μιας ακτίνας φωτός. Στο σχήμα 2.34 παρατηρούμε τέτοιες περιπτώσεις. Στο σχήμα 2.34α η φωτεινή ακτίνα με ολική ανάκλαση εκτρέπεται κατά $90°$ ενώ στο σχήμα 2.34β εκτρέπεται κατά $180°$ (αντιστρέφεται η πορεία της). Στα περισκόπια που χρησιμοποιούνται στα υποβρύχια, ο συνδυασμός δύο πρισμάτων της περίπτωσης (α) (σχ. 2.34γ) επιτρέπει στο πλήρωμα του υποβρυχίου να βλέπει τι γίνεται πάνω από την επιφάνεια του νερού.

Παράδειγμα 2.4

Υπολογίστε την κρίσιμη (οριακή) γωνία στη διαχωριστική επιφάνεια νερού-αέρα. Ο δείκτης διάθλασης του νερού είναι $1{,}33$.

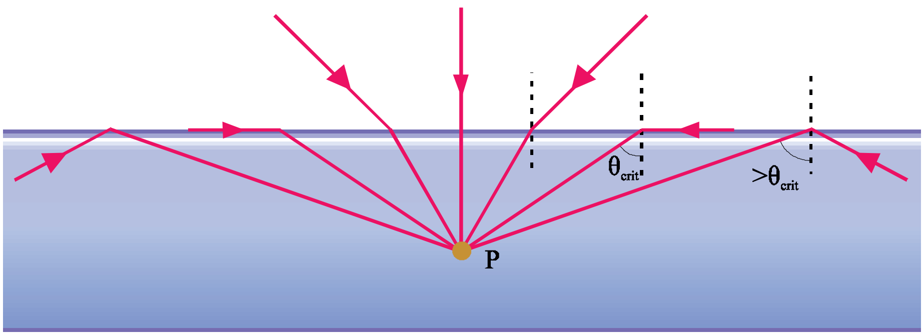
Απάντηση:

Η κρίσιμη γωνία δίνεται από τη σχέση $ημθ_{crit} = \frac{n_b}{n_a}$

Μέσο α είναι το νερό με $n_\alpha = 1,33$ και μέσο b, ο αέρας με $n_b = 1$.

Αντικαθιστώντας παίρνουμε ότι $\eta\mu\theta_{crit} = 0,75$ επομένως $\theta_{crit} = 49°$.

Όταν ένας δύτης βρίσκεται μέσα στο νερό και κοιτάζει προς τα πάνω, μπορεί να δει έξω από το νερό, μόνο όταν κοιτάζει με γωνία μικρότερη της κρίσιμης. Όταν κοιτάζει με γωνία μεγαλύτερη της κρίσιμης, οι φωτεινές ακτίνες που φτάνουν στα μάτια του προέρχονται από ολική ανάκλαση του φωτός στη διαχωριστική επιφάνεια νερού αέρα και αυτό που βλέπει είναι ο βυθός (σχ. 2.35).



Ο δύτης που βρίσκεται στο σημείο P, δέχεται φωτεινές ακτίνες από τον αέρα αλλά και ακτίνες που προέρχονται από ολική ανάκλαση στην επιφάνεια του νερού. Έτσι, κοιτάζοντας στην επιφάνεια βλέπει τι συμβαίνει στο βυθό.

Σχήμα 2-35.

2.11. Διασκεδασμός - Ανάλυση του Φωτός

Στο κενό η ταχύτητα του φωτός είναι ίδια για όλα τα μήκη κύματος. Μέσα στην ύλη, όμως, η ταχύτητα διάδοσης του φωτός εξαρτάται από το μήκος κύματος.

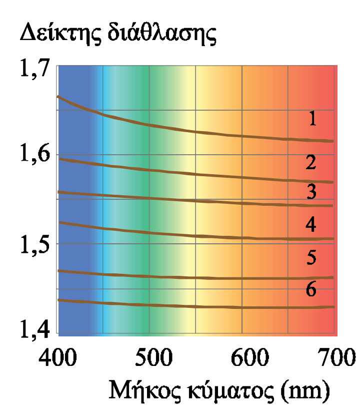
Αυτό σημαίνει ότι και ο δείκτης διάθλασης ενός υλικού, δεν είναι ίδιος για όλες τις ακτινοβολίες αλλά εξαρτάται από το μήκος κύματος της ακτινοβολίας που προσπίπτει στο υλικό.

Η εξάρτηση του δείκτη διάθλασης από το μήκος κύματος της ακτινοβολίας ονομάζεται διασκεδασμός.

Στο σχήμα 2.36 βλέπουμε την εξάρτηση του δείκτη διάθλασης έξι διαφορετικών υλικών, από το μήκος του κύματος. Η τιμή του συνήθως μειώνεται, όταν αυξάνεται το μήκος κύματος. Ο δείκτης διάθλασης είναι μεγαλύτερος για το ιώδες φως και μικρότερος για το ερυθρό.

Έστω ότι μια μονοχρωματική ακτίνα φωτός, προσπίπτει πάνω σ' ένα πρίσμα, όπως στο σχήμα 2.37. Η ακτίνα διαθλάται κατά την είσοδό της στο πρίσμα, αλλά και κατά την έξοδό της με αποτέλεσμα να εκτρέπεται από την αρχική της διεύθυνση κατά μια γωνία δ, που ονομάζεται **γωνία εκτροπής**.

Ας δούμε τώρα τι θα συμβεί όταν μια δέσμη λευκού φωτός πέσει πάνω σε ένα πρίσμα. Το λευκό φως προέρχεται από την ανάμιξη όλων των χρωμάτων που αποτελούν το ορατό φως. Επομένως αποτελείται

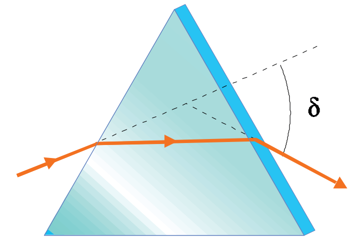


Μεταβολή του δείκτη διάθλασης ορισμένων υλικών σε συνάρτηση με το μήκος κύματος. Τα υλικά είναι: (1) πυριτική μολυβδύαλος (κρύσταλλο) (2) βορική μολυβδύαλος (κρύσταλλο) (3) χαλαζίας (4) πυριτική στεφανύαλος (5) τηγμένος χαλαζίας (6) φθορίτης.

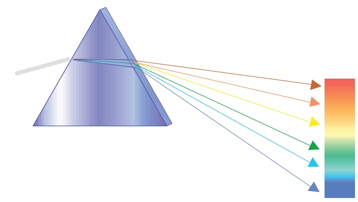
Σχήμα 2-36.

από πολλά μήκη κύματος. Ο δείκτης διάθλασης του πρίσματος δεν είναι ίδιος για τα διάφορα χρώματα από τα οποία αποτελείται το λευκό φως. Η εκτροπή που προκαλεί το πρίσμα αυξάνεται όταν αυξάνεται ο δείκτης διάθλασης. Ο δείκτης διάθλασης είναι μεγαλύτερος στα μικρότερα μήκη κύματος που αντιστοιχούν στο ιώδες χρώμα. Έτσι το ιώδες υφίσταται τη μέγιστη εκτροπή, το ερυθρό την ελάχιστη. Η γωνία εκτροπής για τα άλλα χρώματα κυμαίνεται ανάμεσα στις τιμές που αντιστοιχούν στο ερυθρό και το ιώδες.

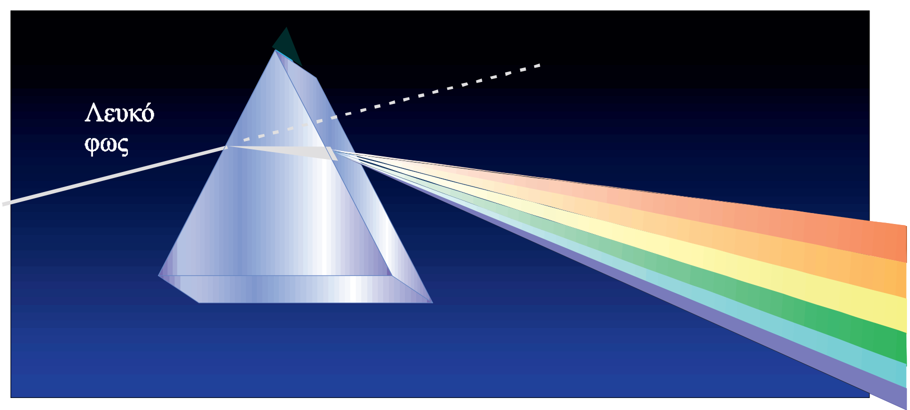
Όταν το φως αναδυθεί από το πρίσμα, δεν αποτελεί πια μια παράλληλη δέσμη (επειδή η εκτροπή των χρωμάτων που το συνθέτουν είναι διαφορετική), αλλά διασκορπίζεται σε μια δέσμη σχήματος βεντάλιας (σχ. 2.39) στην οποία το λευκό φως έχει αναλυθεί σε μια συνεχή ταινία από διάφορα χρώματα, που αποτελούν **το φάσμα του λευκού φωτός**.



Μια ακτίνα μονοχρωματικού φωτός εκτρέπεται από την αρχική πορεία της όταν περνάει από ένα πρίσμα.
Σχήμα 2-37.



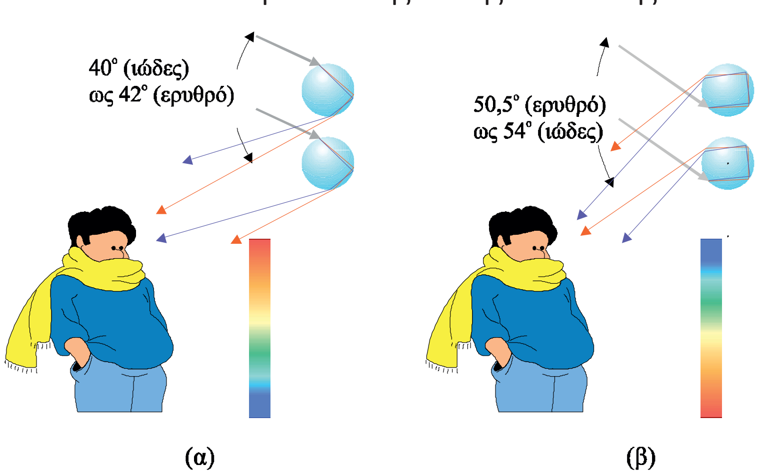
Η ανάλυση που υφίσταται το λευκό φως, όταν περνά από ένα πρίσμα, κάνει ορατά τα διάφορα χρώματα από τα οποία αποτελείται.
Σχήμα 2-38.



Σχήμα 2-39

Ο Newton, μελετώντας το φαινόμενο της ανάλυσης του λευκού φωτός από ένα πρίσμα, διατύπωσε για πρώτη φορά την άποψη ότι το λευκό φως αποτελεί τη σύνθεση πολλών χρωμάτων, των χρωμάτων στα οποία αναλύεται με το πρίσμα. Τα χρώματα αυτά ο Newton τα ονόμασε «απλά» γιατί δεν αναλύονται με το πρίσμα.

Το ουράνιο τόξο, το οποίο δημιουργείται μετά από βροχή αν η θέση του Ήλιου είναι κατάλληλη, οφείλεται σε συνδυασμό των φαινομένων του διασκεδασμού και της ολικής ανάκλασης.



(α) Οι σταγόνες του νερού αναλύουν το λευκό φως στο φάσμα του. Ο παρατηρητής βλέπει ταυτόχρονα πολλές σταγόνες. Τις σταγόνες που βρίσκονται ψηλότερα στο πεδίο της όρασής του τις βλέπει κόκκινες γιατί από τα χρώματα στα οποία αναλύουν το φως μόνο το κόκκινο πέφτει στα μάτια του. Τις σταγόνες που βρίσκονται χαμηλότερα τις βλέπει ιώδεις για τον ίδιο λόγο. Τις ενδιάμεσες σταγόνες τις βλέπει να παίρνουν ανάλογα με τη θέση τους διαδοχικά όλα τα χρώματα του φάσματος ξεκινώντας από το κόκκινο και καταλήγοντας στο ιώδες. (β) Σχηματισμός ανεστραμμένου ουράνιου τόξου.
Σχήμα 2-40.

Στο σχήμα 2.40α παριστάνεται ο τρόπος σχηματισμού του. Το φως που έρχεται πίσω από τον παρατηρητή πέφτει πάνω στα σταγονίδια που υπάρχουν στην ατμόσφαιρα, διαθλάται μέσα σ' αυτά και, στη συνέχεια, αφού υποστεί ολική ανάκλαση στην οπίσθια πλευρά τους, βγαίνει διαθλώμενο από τη σταγόνα και φτάνει στον παρατηρητή. Ο διασκεδασμός έχει ως αποτέλεσμα την ανάλυση του λευκού φωτός στο φάσμα του. Μερικές φορές φαίνεται και ένα δεύτερο ουράνιο τόξο, λίγο μεγαλύτερο, με ανεστραμμένη τη σειρά των χρωμάτων (σχήμα 2.40β). Το τόξο αυτό προέρχεται από δύο ολικές ανακλάσεις στο εσωτερικό των σταγονιδίων.

Στην εικόνα φαίνεται αμυδρά πάνω από το ουράνιο τόξο και μια ανεστραμμένη εικόνα του.

Εικόνα 2-12.

Σύνοψη

Κύμα ονομάζεται μια διαταραχή που διαδίδεται. Κατά τη διάδοση του κύματος μεταφέρεται ενέργεια και ορμή από ένα σημείο του χώρου σε κάποιο άλλο όχι όμως και ύλη.

Η **θεμελιώδης κυματική εξίσωση** είναι $\upsilon = \lambda f$

Η εξίσωση ενός αρμονικού κύματος είναι

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Σύμφωνα με την **αρχή της επαλληλίας**, εάν δύο ή περισσότερα κύματα διαδίδονται σε ένα μέσο η απομάκρυνση ενός σημείου του μέσου από τη θέση ισορροπίας του είναι ίση με τη συνισταμένη των απομακρύνσεων που οφείλονται στα επιμέρους κύματα.

Το αποτέλεσμα της ταυτόχρονης διάδοσης δύο ή περισσότερων κυμάτων στο ίδιο μέσο ονομάζεται **συμβολή των κυμάτων**.

Η συμβολή δύο κυμάτων ίδιου πλάτους που προέρχονται από σύγχρονες πηγές και διαδίδονται σε διαφορετικές διευθύνσεις, έχει ως

αποτέλεσμα τα σημεία για τα οποία η διαφορά των αποστάσεών τους από τις δύο πηγές είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος λ, να ταλαντώνονται έντονα.
Τα σημεία για τα οποία η διαφορά των αποστάσεων από τις δύο πηγές είναι περιττό πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος ($\lambda/2$) μένουν διαρκώς ακίνητα.
Όλα τα υπόλοιπα σημεία του μέσου κάνουν ταλάντωση με ενδιάμεσο πλάτος.

Στάσιμο κύμα ονομάζεται το αποτέλεσμα της συμβολής δύο κυμάτων ίδιου πλάτους και ίδιας συχνότητας που διαδίδονται στο ίδιο μέσο σε αντίθετες κατευθύνσεις.

Στο στάσιμο κύμα ορισμένα σημεία είναι μόνιμα ακίνητα (**δεσμοί**), ενώ άλλα κάνουν ταλάντωση με μέγιστο πλάτος (**κοιλίες**). Όλα τα άλλα σημεία του μέσου κάνουν ταλάντωση με πλάτος που εξαρτάται από τη θέση τους. Η απόσταση δύο διαδοχικών δεσμών ή κοιλιών είναι $\lambda/2$.

Ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι η ταυτόχρονη διάδοση ενός ηλεκτρικού και ενός μαγνητικού πεδίου. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα διαδίδονται στο κενό με την ταχύτητα του φωτός c.
Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι εγκάρσιο, τα διανύσματα του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου είναι κάθετα μεταξύ τους και κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.

Στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα ισχύει $\frac{E}{B} = c$, όπου E και B τα μέτρα της έντασης του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου, αντίστοιχα.
Τα ηλεκτρομαγνητικά όπως και τα μηχανικά κύματα υπακούουν στην αρχή της επαλληλίας.
Ηλεκτρομαγνητικά κύματα παράγονται από την επιτάχυνση ηλεκτρικών φορτίων.
Οι διάφορες περιοχές του **φάσματος της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας** είναι : Τα ραδιοκύματα, τα μικροκύματα, οι υπέρυθρες ακτίνες, το ορατό φως, οι υπεριώδεις ακτίνες, οι ακτίνες X και οι ακτίνες γ.

Κατά την ανάκλαση :
Η προσπίπτουσα ακτίνα, η ανακλώμενη και η κάθετη στην επιφάνεια στο σημείο πρόσπτωσης, βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.
Η γωνία ανάκλασης θ_r είναι ίση με τη γωνία πρόσπτωσης θ_α

Δείκτης διάθλασης *n*, ενός διαφανούς υλικού ονομάζεται ο λόγος της ταχύτητας του φωτός στο κενό (c), προς την ταχύτητά του υ στο υλικό.

$$n = \frac{c}{\upsilon}$$

Κατά τη διάθλαση
Η προσπίπτουσα ακτίνα, η διαθλώμενη και η κάθετη στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων, στο σημείο πρόσπτωσης της ακτίνας βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

Όταν το φως είναι **μονοχρωματικό**, ο λόγος του ημιτόνου της γωνίας πρόσπτωσης (θ_α) προς το ημίτονο της γωνίας διάθλασης (θ_b) είναι ίσος με τον αντίστροφο λόγο των δεικτών διάθλασης των δύο μέσων.

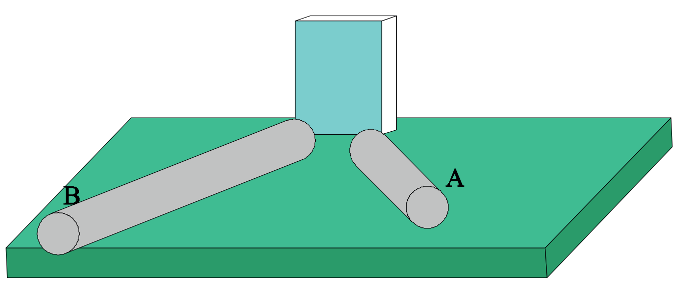
Όταν το φως μεταβαίνει από ένα μέσο σε άλλο με μικρότερο δείκτη διάθλασης και η γωνία πρόσπτωσης είναι μεγαλύτερη από την κρίσιμη έχουμε **ολική ανάκλαση**.

Διασκεδασμός ονομάζεται η εξάρτηση του δείκτη διάθλασης από το μήκος κύματος της ακτινοβολίας. Όταν λευκό φως προσπίπτει σ' ένα πρίσμα, λόγω διασκεδασμού, αναλύεται στο φάσμα του.

Δραστηριότητες

1. Ανάκλαση του ήχου

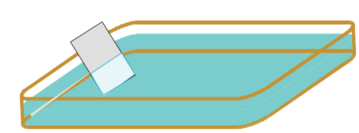
Όλα τα κύματα ανακλώνται αν προσπέσουν σε εμπόδιο. Μπορείτε να διαπιστώσετε την ανάκλαση των ηχητικών κυμάτων και να επιβεβαιώσετε ότι η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης. Θα χρειασθείτε ένα ρολόι (πηγή ήχου) δύο σωλήνες κατασκευασμένους από χαρτόνι και ένα βιβλίο (ανακλαστική επιφάνεια). Τοποθετήστε τους σωλήνες και το βιβλίο πάνω στο τραπέζι όπως στο σχήμα 2.41. Μπροστά στο άκρο του ενός σωλήνα (A) τοποθετήστε το ρολόι και στο άκρο του άλλου σωλήνα (B) βάλτε το αφτί σας. Οι δύο άλλες άκρες των σωλήνων πρέπει να απέχουν λίγα εκατοστά από το βιβλίο (ανακλαστική επιφάνεια). Μεταβάλλοντας τις γωνίες που σχηματίζουν οι σωλήνες με την ανακλαστική επιφάνεια, θα διαπιστώσετε ότι ο ήχος ακούγεται δυνατά και καθαρά όταν οι δύο σωλήνες σχηματίζουν ίσες γωνίες με την κάθετη στην ανακλαστική επιφάνεια.



Σχήμα 2-41.

2. Ένα ουράνιο τόξο στο ταβάνι

Μέσα σε μία λεκάνη που περιέχει λίγο νερό τοποθετήστε σε πλάγια θέση ένα καθρεφτάκι του οποίου ένα μέρος να είναι βυθισμένο μέσα στο νερό. Τοποθετήστε τη λεκάνη έτσι ώστε το φως του ήλιου να πέφτει πάνω στον καθρέφτη. Δίνοντας την κατάλληλη κλίση στον καθρέφτη θα δείτε στο ταβάνι το φάσμα του ηλιακού φωτός. Εξηγήστε το φαινόμενο.



Σχήμα 2-42.

3. Φωτεινός πίδακας

Θα χρειαστείτε ένα ισχυρό φακό που μπορεί να εστιάζει το φως του και ένα διαφανές πλαστικό ποτήρι με μια τρύπα διαμέτρου 3 mm περίπου, στο πλευρικό του τοίχωμα, κοντά στη βάση του.

Σχήμα 2-43.

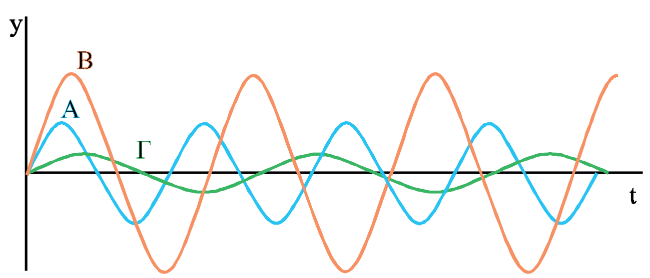
Γεμίστε το ποτήρι με νερό και φωτίστε το όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν το δωμάτιο είναι σκοτεινό, θα παρατηρήσετε ότι το φως δείχνει να παγιδεύεται μέσα στον πίδακα του νερού, μέχρι ένα σημείο. Εξηγήστε το φαινόμενο.

Ερωτήσεις

Μηχανικά κύματα

2.1 Η ταχύτητα ενός ηχητικού κύματος εξαρτάται
α) από τη συχνότητα του ήχου.
β) από την ένταση του ήχου.
γ) από το υλικό στο οποίο διαδίδεται το κύμα.
δ) από το μήκος κύματος.
Επιλέξτε τη σωστή πρόταση.

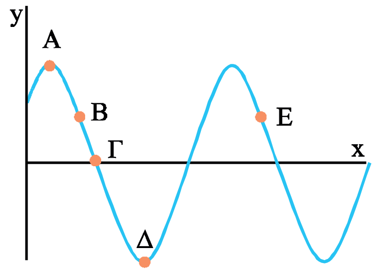
2.2 Τρεις πηγές Α,Β και Γ δημιουργούν ηχητικά κύματα στον αέρα. Το σχήμα 2.44 παριστάνει γραφικά την ταλάντωση των τριών πηγών σε συνάρτηση με το χρόνο.



Σχήμα 2-44.

α) Ποιο κύμα έχει μεγαλύτερο πλάτος;
β) Ποιο κύμα έχει μεγαλύτερο μήκος κύματος;

2.3 Το σχήμα 2.45 παριστάνει το στιγμιότυπο ενός αρμονικού κύματος τη χρονική στιγμή t_1
1) Ποιο από τα σημεία Α, Β, Γ έχει αυτή τη στιγμή
α) μεγαλύτερη ταχύτητα κατά την ταλάντωσή του;
β) μεγαλύτερη επιτάχυνση;
2) Επιλέξτε από τα Α, Β, Γ, Δ και Ε δύο σημεία
α) που οι φάσεις τους διαφέρουν κατά π.
β) που οι φάσεις τους διαφέρουν κατά 2π.
γ) που απέχουν απόσταση λ.



Σχήμα 2-45.

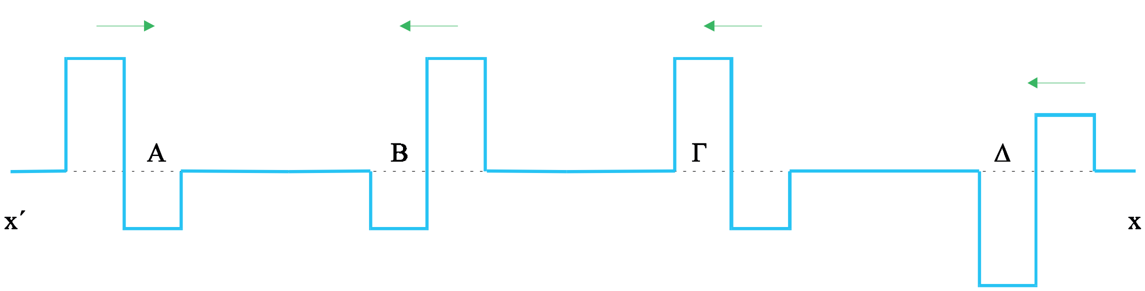
2.4 Κατά μήκος δύο ομοίων χορδών 1 και 2, διαδίδονται δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα. Το κύμα στη χορδή 1 έχει διπλάσια συχνότητα και το μισό πλάτος από το κύμα στη χορδή 2. Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές;

α) Η ταχύτητα διάδοσης των δύο κυμάτων στις δύο χορδές είναι ίδια.
β) Το μήκος κύματος στη χορδή 2 είναι διπλάσιο από το μήκος κύματος στη χορδή 1.
γ) Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης είναι μεγαλύτερη στα σωματίδια της χορδής 1.
δ) Η μέγιστη επιτάχυνση ταλάντωσης είναι μεγαλύτερη στα σωματίδια της χορδής 1.

2.5 Οι εξισώσεις που ακολουθούν περιγράφουν τρία εγκάρσια αρμονικά κύματα που διαδίδονται σε διαφορετικά μέσα.
(α) $y = 10^{-2} \eta\mu 2\pi\left(2t - 4x\right)$
(β) $y = 5 \times 10^{-3} \eta\mu 2\pi\left(4t - 2x\right)$
(γ) $y = 2 \times 10^{-2} \eta\mu 2\pi\left(2t - 3x\right)$
Τα μεγέθη είναι μετρημένα στο S.I.
1. Ποιο κύμα διαδίδεται με μεγαλύτερη ταχύτητα;
2. Σε ποια περίπτωση τα μόρια του μέσου ταλαντώνονται με μεγαλύτερη μέγιστη ταχύτητα;

Συμβολή - στάσιμα κύματα

2.6 Στο σχήμα 2.46 φαίνονται οι κυματικοί παλμοί Α, Β, Γ και Δ που διαδίδονται στο ίδιο υλικό κατά τη διεύθυνση x΄x.



Σχήμα 2-46.

Με ποιον από τους παλμούς Β, Γ και Δ πρέπει να συναντηθεί ο παλμός Α ώστε να έχουμε απόσβεση;

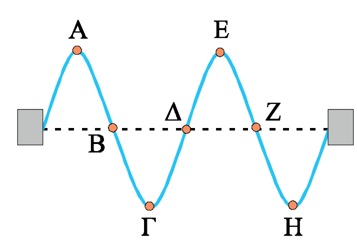
2.7 Ποιες πηγές ονομάζονται σύγχρονες;

2.8 Συμπληρώστε τα κενά:
Στάσιμο κύμα ονομάζεται το αποτέλεσμα της συμβολής δύο κυμάτων με ίδιο πλάτος και ίδια συχνότητα που διαδίδονται στο ελαστικό μέσο σε......................... κατευθύνσεις. Το στάσιμο κύμα δεν είναι κύμα αλλά μια ιδιόμορφη ταλάντωση του μέσου. Κατά τη δημιουργία ενός στάσιμου κύματος σε ένα υλικό υπάρχουν σημεία που .... και ονομάζονται δεσμοί και σημεία που ταλαντώνονται με .... και ονομάζονται .... Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών είναι ....

2.9 Οι εξισώσεις
(α) $y = 5\ \sigma\upsilon\nu 4x\ \eta\mu 10t$
(β) $y = 2\ \sigma\upsilon\nu 2x\ \eta\mu 20t$
(γ) $y = 1\ \sigma\upsilon\nu 8x\ \eta\mu 5t$
περιγράφουν στάσιμα κύματα. Τα x και y είναι μετρημένα σε cm και το t σε s.
1) Σε ποιο από τα τρία, η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών είναι μεγαλύτερη;
2) Σε ποια από τις περιπτώσεις αυτές η μέγιστη ταχύτητα των σωματιδίων που βρίσκονται στις κοιλίες έχει μεγαλύτερη τιμή;

2.10 Δύο σύγχρονες σημειακές πηγές 1 και 2 δημιουργούν στο ίδιο υλικό εγκάρσια κύματα με μήκος κύματος λ=3cm. Τα σημεία Α, Β και Γ απέχουν από τις δύο πηγές: Το Α, d_1 = 18cm και d_2 = 16cm. Το Β, r_1 = 19,5cm και r_2 = 16,2cm και το Γ ℓ_1 = 20cm και ℓ_2 = 15,5cm. Με το δείκτη 1 συμβολίζονται οι αποστάσεις τους από την πηγή 1 και με το δείκτη 2 οι αποστάσεις από την πηγή 2.
α) Εκτελεί κάποιο από τα σημεία ταλάντωση με μέγιστο πλάτος;
β) Παραμένει κάποιο από αυτά διαρκώς ακίνητο;

2.11 Το σχήμα 2.47 παριστάνει ένα στιγμιότυπο ενός στάσιμου κύματος που έχει δημιουργηθεί σε μια χορδή.
α) Ποια σημεία στο σχήμα αντιστοιχούν σε δεσμούς και ποια σε κοιλίες;
β) Πόσο διαφέρουν οι φάσεις των σημείων Α και Γ;
γ) Πόσο διαφέρουν οι φάσεις των σημείων Α και Ε;
δ) Αν το μήκος κύματος των κυμάτων από τα οποία δημιουργήθηκε το στάσιμο είναι λ, ποια η οριζόντια απόσταση των σημείων Α και Β;



Σχήμα 2-47.

2.12 Σε ένα στάσιμο κύμα, τα σημεία που βρίσκονται μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών έχουν
α) την ίδια φάση.
β) φάσεις που διαφέρουν κατά $\pi/2$.
γ) φάσεις που διαφέρουν κατά π.
δ) φάσεις που διαφέρουν κατά 2π.
Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

2.13 Το φως κάνει να φτάσει από τον Ήλιο στη Γη περίπου 8,5 min. Πόσο περίπου απέχει η Γη από τον Ήλιο; ($c = 3\times10^8\ m/s$).

2.14 Πόσες φορές το δευτερόλεπτο θα μπορούσε να κάνει το γύρο της Γης ένα σώμα αν είχε ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του φωτός; ($R_\Gamma = 6400$ km $c = 3\times10^8$ m / s).

2.15 Εκπομπή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας έχουμε όταν

α) ένα σώμα είναι φορτισμένο.
β) ένας πυκνωτής είναι φορτισμένος.
γ) φορτία κινούνται με σταθερή ταχύτητα όπως συμβαίνει στους αγωγούς που διαρρέονται από σταθερό ρεύμα.
δ) φορτία επιταχύνονται ή επιβραδύνονται, όπως συμβαίνει στους αγωγούς που διαρρέονται από μεταβαλλόμενα ρεύματα.
Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.

2.16 Η συχνότητα ενός αρμονικού ηλεκτρομαγνητικού κύματος που διαδίδεται στο κενό είναι 6×10^6 Hz. Το μήκος κύματος του κύματος αυτου είναι α) 5×10^6 m, β) 2×10^2 m, γ) 5×10 m ή δ) 2×10^9 cm; ($c=3\times10^8 m/s$).

2.17 Χωρίς να συμβουλευτείτε τον πίνακα με το φάσμα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, αντιστοιχίστε τους διαφόρους τύπους των κυμάτων που βρίσκονται στην αριστερή στήλη με συχνότητες που βρίσκονται στη δεξιά.

Ραδιοκύματα	10^{13} Hz
Μικροκύματα	10^{17} Hz
Ακτίνες X	10^{8} Hz
Υπέρυθρο	10^{10} Hz
Υπεριώδες	10^{15} Hz
Ακτίνες γ	10^{19} Hz

2.18 Ποιος τύπος ηλεκτρομαγνητικού κύματος έχει μήκος κύματος συγκρίσιμο με
α) το μέγεθος ενός αυτοκινήτου;
β) με τη διάμετρο μιας μπάλας;
γ) με τη διάμετρο του ατόμου;
δ) με τη διάμετρο του πυρήνα;
(Συμβουλευτείτε τον πίνακα με το φάσμα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας) ($c=3\times10^8 m/s$).

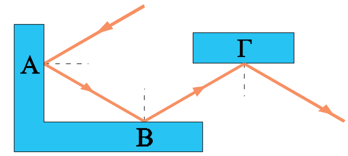
2.19 Η ταχύτητα με την οποία διαδίδονται τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι
α) μεγαλύτερη στο κενό.
β) μεγαλύτερη όταν διαδίδονται στην ύλη.
γ) παντού ίδια.
Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.

2.20 Ποια από τις εξισώσεις που ακολουθούν δεν μπορεί να περιγράφει το ηλεκτρικό πεδίο ενός αρμονικού ηλεκτρομαγνητικού κύματος που διαδίδεται στο κενό;
α) $E=100\ \eta\mu 2\pi\left(6\times10^{10}t-2\times10^{2}x\right)$
β) $E=50\ \eta\mu 2\pi\left(12\times10^{12}t-4\times10^{4}x\right)$
γ) $E=100\ \eta\mu 2\pi\left(9\times10^{13}t-3\times10^{6}x\right)$
Όλα τα μεγέθη εκφράζονται στο S.I. ($c=3\times10^8 m/s$).

Ανάκλαση - διάθλαση

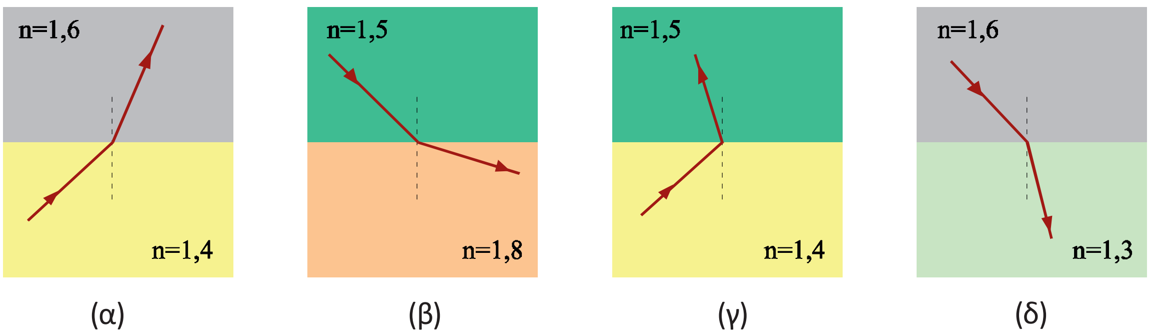
2.21 Είναι δυνατό μια φωτεινή ακτίνα να μη διαδίδεται ευθύγραμμα; Αναφέρατε τέτοιες περιπτώσεις.

2.22 Στο σχήμα 2.48 φαίνονται οι διαδοχικές ανακλάσεις που υφίσταται μια φωτεινή ακτίνα στις επιφάνειες Α, Β και Γ. Αν η γωνία πρόσπτωσης στο σημείο Α είναι 30° πόσες μοίρες είναι οι γωνίες ανάκλασης στις επιφάνειες Β και Γ;



Σχήμα 2-48.

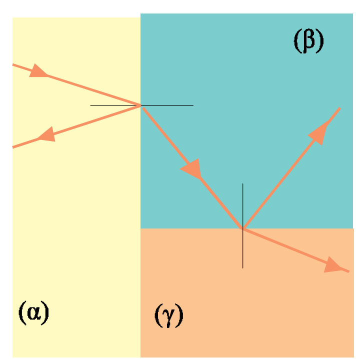
2.23 Σε ποιο από τα επόμενα σχήματα έχει σχεδιαστεί σωστά η διαθλώμενη ακτίνα;



Σχήμα 2-49.

2.24 Μονοχρωματικό φως μεταβαίνει από τον αέρα στο γυαλί. Να συγκρίνετε το μήκος κύματος, τη συχνότητα και την ταχύτητα διάδοσης στα δύο μέσα.

2.25 Στο σχήμα 2.50 φαίνεται η πορεία μιας ακτίνας μονοχρωματικού φωτός η οποία διέρχεται από τρία διαφανή υλικά. Σε ποιο υλικό το φως διαδίδεται με μικρότερη ταχύτητα;



Σχήμα 2-50.

2.26 Δέσμη λευκού φωτός εκτρέπεται από ένα πρίσμα. Ποιο χρώμα εκτρέπεται περισσότερο, το κόκκινο ή το μπλε;

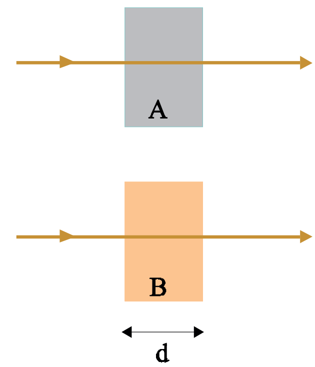
2.27 Στο σχήμα φαίνονται τρεις διαφανείς οριζόντιες πλάκες πολύ μεγάλων διαστάσεων. Οι πλάκες είναι τοποθετημένες η μία πάνω στην άλλη και το σύστημα περιβάλλεται από αέρα. Ακτίνες μονοχρωματικού φωτός εισέρχονται πλάγια στις πλάκες όπως στο σχήμα. Σε ποια από τις πλάκες είναι δυνατό το φως, μετά από διαδοχικές ολικές ανακλάσεις, να βγει από τη δεξιά πλευρά;

Σχήμα 2-51.

2.28 Στο σχήμα 2.52 φαίνονται δύο ακτίνες μονοχρωματικού φωτός, οι οποίες στο κενό έχουν το ίδιο μήκος κύματος. Οι ακτίνες στην πορεία τους συναντούν και διέρχονται από δύο πλακίδια A και B, του ίδιου πάχους d και διαφορετικού δείκτη διάθλασης. Το πάχος d αντιστοιχεί σε 3×10^4 μήκη κύματος της ακτινοβολίας στο υλικό A ή σε $2,2\times10^4$ μήκη κύματος της ακτινοβολίας στο υλικό B.

α) Ποιο υλικό έχει μεγαλύτερο δείκτη διάθλασης;

β) Σε ποιο υλικό, το φως θέλει μεγαλύτερο χρόνο για να καλύψει την απόσταση d;



Σχήμα 2-52.

Ασκήσεις

Μηχανικά κύματα

2.29 Ένα αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος μιας χορδής. Ο χρόνος που χρειάζεται ένα σημείο της χορδής για να μετατοπιστεί από τη θέση μέγιστης απομάκρυνσης στη θέση ισορροπίας του είναι 0,15 s. Ποια είναι η συχνότητα του κύματος; Αν το μήκος κύματος είναι λ=1,2 m ποια είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος;

[Απ: 10/6 Hz , 2 m/s]

2.30 Η εξίσωση ενός γραμμικού αρμονικού κύματος είναι $y = 3\times10^{-2}\eta\mu\left(1320t - 4x\right)$ (S.I.).
Να υπολογίσετε:

α) το μήκος κύματος (λ).

β) την ταχύτητα του κύματος υ.

γ) τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των σημείων του ελαστικού μέσου.

δ) την απόσταση μεταξύ δύο σημείων του ελαστικού μέσου τα οποία παρουσιάζουν διαφορά φάσης 120°.

[Απ: 1,57 m, 330 m/s, 39,6 m/s, 0,523 m]

2.31 Η πηγή κυμάτων O αρχίζει τη χρονική στιγμή μηδέν να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A=10 cm και συχνότητας f=0,25 Hz. Το κύμα που δημιουργεί διαδίδεται κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου με ταχύτητα υ=3 m/s.
Να υπολογίσετε:

α) μετά από πόσο χρόνο θα αρχίσει να κινείται κάποιο σημείο B του μέσου, που απέχει x = 60 m από την πηγή O.

β) την απομάκρυνση του σημείου B, από τη θέση ισορροπίας του, τη στιγμή t = 21,5 s.

[Απ: 20 s , $5\sqrt{2}$ cm]

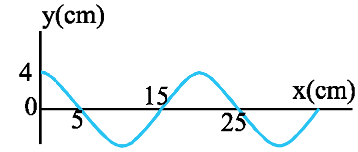
Στάσιμο κύμα

2.32 Ένα στάσιμο κύμα περιγράφεται από την εξίσωση:
$y = 0,5\ \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi x}{3}\eta\mu 40\pi t$ όπου τα x και y είναι σε cm και το t σε s.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις των δύο κυμάτων που συμβάλλουν για να δημιουργήσουν το στάσιμο κύμα.
β) Πόσο απέχουν δύο διαδοχικοί δεσμοί;
γ) Τι ταχύτητα έχει τη χρονική στιγμή $t = 9/8$ s ένα σημείο του μέσου το οποίο απέχει 1 cm από τη θέση $x = 0$;
δ) Με τι ταχύτητα διαδίδονται τα κύματα που δημιουργούν το στάσιμο;

[Απ: $y_1 = 0,25ημ2π\left(20t - \frac{x}{6}\right)$, $y_2 = 0,25ημ2π\left(20t + \frac{x}{6}\right)$, 3 cm, −31,4 cm/s, 1,2 m/s]

2.33 Στο σχήμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο ενός στάσιμου κύματος, κάποια στιγμή κατά την οποία όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου έχουν μηδενική ταχύτητα. Τα κύματα που συμβάλλουν για να δώσουν το στάσιμο κύμα έχουν περίοδο $T = 2$ s.
α) Να σχεδιάσετε τα στιγμιότυπα του στάσιμου κύματος μετά από 0,5 s και μετά από 1 s.
β) Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης ενός σημείου που βρίσκεται στη θέση $x = 12,5$ cm.



Σχήμα 2-53.

[Απ: $2\sqrt{2}$ cm]

2.34 Διαπασών συχνότητας 340 Hz ηχεί μπροστά σε λείο κατακόρυφο τοίχο. Ανάμεσα στο διαπασών και στον τοίχο, στην ευθεία που είναι κάθετη στον τοίχο, μετακινείται ευαίσθητος δέκτης. Παρατηρούμε ότι σε δύο διαδοχικές θέσεις του δέκτη, που απέχουν μεταξύ τους 0,5 m, η ένδειξή του μηδενίζεται.

α) Ποια είναι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου;
β) Αντικαθιστούμε το διαπασών με άλλο άγνωστης συχνότητας. Διαπιστώνουμε δύο διαδοχικά μέγιστα έντασης σε θέσεις που απέχουν μεταξύ τους 0,2 m. Ποια είναι η συχνότητα του δεύτερου διαπασών;

[Απ: 340 m/s, 850 Hz]

2.35 Δύο κύματα διαδίδονται ταυτόχρονα κατά μήκος του ίδιου σχοινιού. Οι εξισώσεις των κυμάτων είναι:
$y_1 = 5\ ημπ(5t - x)$ και $y_2 = 5\ ημπ(5t + x)$ όπου τα y και x είναι μετρημένα σε cm και το t σε s.

α) Υπολογίστε την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων.
β) Βρείτε τη θέση τριών σημείων του σχοινιού τα οποία παραμένουν ακίνητα και τριών σημείων των οποίων το πλάτος της ταλάντωσης είναι μέγιστο.
γ) Ποιο είναι το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης;

[Απ: α) 5cm/s β) 0,1cm, 2cm, ...και 0,5cm, 1,5cm, 2,5cm,... γ) 10cm]

2.36 Δύο κύματα ίδιου πλάτους, συχνότητας 60Hz, διαδίδονται αντίθετα σε χορδή της οποίας τα άκρα είναι στερεωμένα σε ακλόνητα σημεία. Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων είναι 120m/s. Το στάσιμο κύμα που δημιουργείται στη χορδή έχει τρεις δεσμούς.

Βρείτε το μήκος της χορδής.

[Απ: 2m]

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

2.37 Ένας ραδιοφωνικός σταθμός εκπέμπει στα 100 MHz.

α) Ποιο είναι το μήκος κύματος που εκπέμπει ο σταθμός;
β) Η μέγιστη τιμή του ηλεκτρικού πεδίου του κύματος σε κάποια θέση είναι $E_{max} = 12\times10^{-3}$ V/m. Ποια είναι η μέγιστη τιμή του μαγνητικού πεδίου του κύματος σε εκείνη τη θέση;
γ) Αν για τη λήψη αυτού του ηλεκτρομαγνητικού κύματος χρησιμοποιείται δέκτης με κύκλωμα LC, στο οποίο το πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής L=5 mH, για ποια τιμή της χωρητικότητας του πυκνωτή συντονίζεται ο δέκτης;
($c = 3\times10^{8}\, m/s$). Θεωρήστε $\pi^2 \approx 10$.

[Απ: 3m, $4\times10^{-11}T$, $5\times10^{-16}F$]

Ανάκλαση - Διάθλαση

2.38 Με ποια ταχύτητα διαδίδεται μονοχρωματικό φως σε γυαλί που έχει γι' αυτό το φως δείκτη διάθλασης n = 1,5; Η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι $c = 3\times10^{8}\, m/s$.

[Απ: $2\times10^{8}m/s$]

2.39 Στον πυθμένα δοχείου που περιέχει νερό τοποθετούμε μια γυάλινη πλάκα. Δέσμη παράλληλων ακτίνων μονοχρωματικού φωτός προσπίπτει από το νερό στη γυάλινη πλάκα με γωνία πρόσπτωσης 30°. Βρείτε τις διευθύνσεις των ανακλώμενων και διαθλώμενων ακτίνων.
Δίνονται οι δείκτες διάθλασης του νερού και του γυαλιού n_1 = 1,33 *και* n_2 = 1,52 αντίστοιχα.

[Απ: $\theta_r = 30^o, \eta\mu\theta_b = 0,4375$]

2.40 Μέσα σε υγρό με άγνωστο δείκτη διάθλασης βυθίζουμε μια γυάλινη πλάκα. Μια λεπτή μονοχρωματική δέσμη πέφτει στην πλάκα με γωνία πρόσπτωσης θ_α. Μεταβάλλοντας τη γωνία πρόσπτωσης παρατηρούμε ότι όταν είναι μεγαλύτερη των 60° η δέσμη παθαίνει ολική ανάκλαση στη γυάλινη πλάκα. Αν ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού είναι n_b= 1,5, να βρεθεί ο δείκτης διάθλασης του υγρού.

[Απ: $\sqrt{3}$]

2.41 Ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία συχνότητας $f = 5,1\times10^{14}$Hz έχει - στο νερό - μήκος κύματος $\lambda = 4,4\times10^{-7}$ m. Να βρείτε το δείκτη διάθλασης του νερού. Η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι $c = 3\times10^{8}$ m/s.

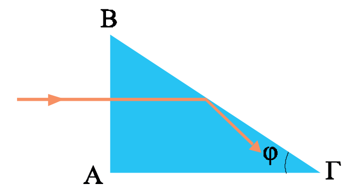
[Απ: 1,33]

2.42 Το μήκος κύματος μιας μονοχρωματικής ακτινοβολίας στον αέρα είναι 650nm.
α) Ποια είναι η συχνότητα της ακτινοβολίας;
β) Ποιο είναι το μήκος κύματος της ακτινοβολίας όταν διέρχεται από γυαλί που έχει δείκτη διάθλασης $1{,}4$;
γ) Ποια είναι η ταχύτητα της ακτινοβολίας στο γυαλί;
Δίνεται $c = 3\times10^{8}\ \text{m/s}$.

[Απ: α) $4,6\times10^{14}Hz$, β) $464nm$, γ) $2,14\times10^{8}m/s$]

2.43 Το κίτρινο φως που δίνει η λάμπα νατρίου διαδίδεται σε κάποιο υγρό με ταχύτητα $1{,}92\times10^{8}\ \text{m/s}$. Ποιος είναι ο δείκτης διάθλασης του υγρού αυτού για το κίτρινο φως;
Δίνεται $c = 3\times10^{8}\ \text{m/s}$.

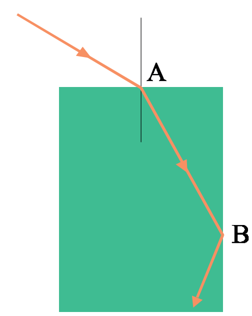
[Απ: $n = 1,56$]



Σχήμα 2-54.

2.44 Μονοχρωματική δέσμη φωτός πέφτει κάθετα στην επιφάνεια πρίσματος με δείκτη διάθλασης $n = \sqrt{2}$ όπως στο σχήμα 2.54. Υπολογίστε τη μεγαλύτερη τιμή της γωνίας φ για την οποία η δέσμη υφίσταται ολική ανάκλαση στην επιφάνεια $ΒΓ$ του πρίσματος.

[Απ: $\varphi_{\max} = 45^{o}$]



Σχήμα 2-55.

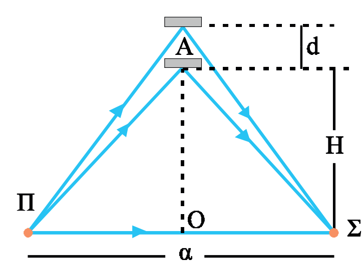
2.45 Μονοχρωματική δέσμη προσπίπτει στο σημείο Α μιας γυάλινης πλάκας με γωνία πρόσπτωσης $60°$ (σχ. 2.55). Ποιος πρέπει να είναι ο ελάχιστος δείκτης διάθλασης του γυαλιού ώστε η δέσμη να υποστεί ολική ανάκλαση στο σημείο Β; (Η γυάλινη πλάκα βρίσκεται στον αέρα).

[Απ: 1,32]

Προβλήματα

2.46 Δύο σύγχρονες πηγές Π_1 και Π_2 δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού κύματα, με πλάτος $A = 3\ \text{mm}$ και περίοδο $T = 0{,}4\ \text{s}$. Η ταχύτητα των κυμάτων είναι $\upsilon = 5\ m/s$. Ένα μικρό κομμάτι φελλού βρίσκεται σε κάποιο σημείο της επιφάνειας, σε αποστάσεις $r_1 = 6\ \text{m}$ και $r_2 = 5{,}5\ \text{m}$ από τις πηγές. Η κίνηση του φελλού είναι αποτέλεσμα της συμβολής των δύο κυμάτων. Να περιγράψετε την κίνησή του.

[Απ: απλή αρμονική ταλάντωση, με πλάτος $A' = 3\sqrt{2}\ mm$ και περίοδο 0,4 s]



Σχήμα 2-56.

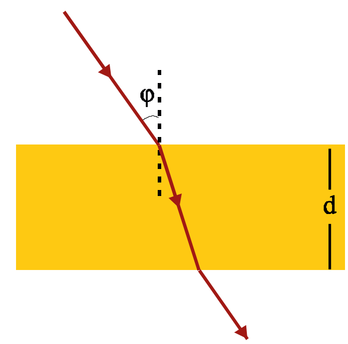
2.47 Σε κάποιο σημείο στην επιφάνεια ενός υγρού δημιουργούμε κύματα με την πηγή Π. Στο σημείο Σ της επιφάνειας, σε απόσταση α από την πηγή, τα κύματα μπορούν να φτάσουν ή απευθείας (ακολουθώντας τη διαδρομή ΠΣ) ή αφού ανακλαστούν στον ανακλαστήρα Α που βρίσκεται στην επιφάνεια του υγρού και πάνω στη μεσοκάθετο του τμήματος ΠΣ. Αν μετακινήσουμε τον ανακλαστήρα παρατηρούμε ότι όταν απέχει απόσταση H από το Ο, το σημείο Σ παραμένει συνέχεια ακίνητο, ενώ, για πρώτη φορά, κάνει ταλάντωση με μέγιστο πλάτος, όταν ο ανακλαστήρας μετακινείται κατά d. Να βρείτε το μήκος του κύματος.

[Απ: $2\sqrt{4(H+d)^2+a^2}-2\sqrt{4H^2+a^2}$]

2.48 Μια σημειακή πηγή μονοχρωματικού φωτός βρίσκεται σε βάθος h, μέσα σε υγρό με δείκτη διάθλασης n για το φως που εκπέμπει η πηγή. Να υπολογίσετε την ακτίνα του φωτεινού δίσκου που βλέπει στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού ένας παρατηρητής που βρίσκεται έξω από το υγρό.

[Απ: $\dfrac{h}{\sqrt{n^2-1}}$]

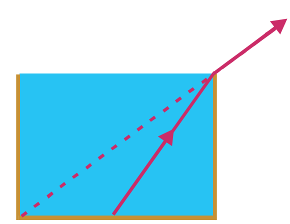
2.49 Μια ακτίνα μονοχρωματικού φωτός πέφτει πάνω σε γυάλινη πλάκα πάχους d. Η γωνία πρόσπτωσης της ακτίνας είναι φ και ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού n.
α) Δείξτε ότι η ακτίνα που εξέρχεται από το γυαλί είναι παράλληλη στην αρχική.
β) Υπολογίστε την παράλληλη μετατόπιση που υφίσταται η ακτίνα από το γυαλί.



Σχήμα 2-57.

[Απ: $l=d\eta\mu\varphi\left(1-\dfrac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\sqrt{n^2-\eta\mu^2\varphi}}\right)$]

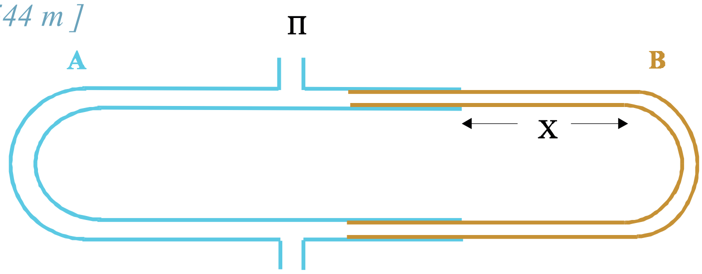
2.50 Κυλινδρικό δοχείο έχει διάμετρο βάσης $8\sqrt{2}$ cm και άγνωστο ύψος. Ένας παρατηρητής βρίσκεται σε τέτοια θέση, ώστε μόλις να βλέπει την απέναντι εσωτερική άκρη του πυθμένα, όταν το δοχείο είναι κενό. Αν το δοχείο είναι γεμάτο με νερό ο παρατηρητής, χωρίς να αλλάξει θέση βλέπει το κέντρο του πυθμένα. Να υπολογίσετε το ύψος του δοχείου. Δίνεται ότι ο δείκτης διάθλασης του νερού είναι $n=\sqrt{2}$.


Σχήμα 2-58.

[Απ: 8 cm]

2.51 Η διάταξη του σχήματος 2.59 αποτελείται από δύο σωλήνες Α και Β. Ο σωλήνας Β μπορεί να μετακινείται. Με τον τρόπο αυτό μεταβάλλεται το μήκος x. Μια ηχητική πηγή Π δημιουργεί στο ανοιχτό άκρο του σωλήνα ήχο συχνότητας 1,25kHz. Στο άλλο άκρο (Σ) του σωλήνα φτάνουν ταυτόχρονα δύο ηχητικά κύματα. Τα κύματα δημιουργούνται από την πηγή και διαδίδονται μέσω του αέρα στους σωλήνες Α και Β. Όταν μετακινούμε το σωλήνα Β (μεταβάλλεται τότε η απόσταση x) παρατηρούμε ότι η ένταση του ήχου στο σημείο Σ αυξομειώνεται. Η ένταση του ήχου στο σημείο Σ είναι μηδέν όταν η απόσταση x είναι $x_0 = 0{,}408\ m$. Ποια είναι η επόμενη τιμή της απόστασης x ($x > 0{,}408\ m$) για την οποία μηδενίζεται ξανά η ένταση του ήχου; Δίνεται η ταχύτητα του ήχου στον αέρα $\upsilon = 340 m/s$.

[Απ: 0,544 m]



Σχήμα 2-59.

2.52 Πηγές κυμάτων Π_1 και Π_2 δημιουργούν στην επιφάνεια υγρού εγκάρσια κύματα. Ένα σημείο K που απέχει r_1 και r_2 από τις πηγές έχει κάθε στιγμή απομάκρυνση $y_1 = A\eta\mu(2\pi t - \pi r_1 + \varphi_0)$ (S.I.) εξαιτίας του κύματος που δημιουργεί η πηγή Π_1 και $y_2 = A\eta\mu(2\pi t - \pi r_2)$ (S.I.) εξαιτίας του κύματος που δημιουργεί η πηγή Π_2.

α) Να βρείτε την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στην επιφάνεια του υγρού.

β) Αν $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$ ποια πρέπει να είναι η διαφορά των αποστάσεων $r_1 - r_2$ του σημείου Κ από τις δύο πηγές ώστε

i. να διατηρείται συνεχώς ακίνητο και

ii. να ταλαντώνεται με πλάτος $2A$;

γ) Ποια πρέπει να είναι η τιμή της φ_o, ώστε ένα σημείο Μ της επιφάνειας του υγρού που βρίσκεται σε απόσταση $r_1 = 12m$ από την Π_1 και $r_1 = 10m$ από την Π_2 να παραμένει διαρκώς ακίνητο;

[Απ: $2m/s, \left(2N+\frac{3}{2}\right)m, N=0,\pm1,\pm2,...., \left(2N+\frac{1}{2}\right)m \;\; N=0,\pm1,\pm2,...., \pi\, rad$]

2.53 Το άκρο Ο, γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου που εκτείνεται κατά τη διεύθυνση του ημιάξονα Οx αρχίζει, τη χρονική στιγμή $t = 0$, να ταλαντώνεται σύμφωνα με την εξίσωση: $y = 5\eta\mu 10\pi t$ (το y σε cm το t σε s).

Η ταλάντωση του σημείου Ο διαδίδεται στο μέσο με ταχύτητα $\upsilon = 20$ cm/s.

α) Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.

β) Να παραστήσετε γραφικά τις φάσεις των σημείων του μέσου στο οποίο διαδίδεται το κύμα σε συνάρτηση με την απόσταση (x) από την πηγή Ο, τη χρονική στιγμή $t_1 = 1$s.

γ) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_1.

[Απ: α) $y = 5\eta\mu 2\pi\left(5t - \frac{x}{4}\right)$ (τα x,y σε cm το t σε s)]

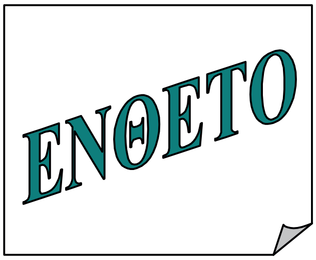
2.54 Σε γραμμικό ελαστικό μέσον που εκτείνεται κατά μήκος του άξονα x΄x έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα που περιγράφεται από την εξίσωση $y = 8\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi x}{2}\eta\mu 10\pi t$ (τα x, y σε cm, το t σε s).

α) Ποια είναι η ταχύτητα των κυμάτων η συμβολή των οποίων έδωσε αυτό το στάσιμο κύμα;

β) Ποια είναι, τη χρονική στιγμή $t = 1/40\ s$, η απομάκρυνση και η ταχύτητα του σημείου M του υλικού που βρίσκεται στη θέση $x_M = 0{,}5cm$;

γ) Πόσοι δεσμοί υπάρχουν μεταξύ των σημείων A και B του υλικού που βρίσκονται στις θέσεις $x_A = -4cm$ και $x_B = 10cm$;

[Απ: α) 20 cm/s, β) $y_M = 4cm$, $\upsilon_M = 40\pi$ cm/s, γ) επτά]



Περιοχές Ραδιοκυμάτων

Ο Hertz, πρώτος, το 1887, στηριζόμενος στις προβλέψεις της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας του Maxwell, επέτυχε την παραγωγή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Στα χρόνια που ακολούθησαν έγινε μεγάλη προσπάθεια για τη μετάδοση μηνυμάτων μέσω ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Το 1900 ο Ροpov στη Ρωσία και ο Marconi κατάφεραν να μεταδώσουν μηνύματα σε απόσταση μερικών δεκάδων χιλιομέτρων.

Σήμερα είμαστε εξοικειωμένοι με τις διάφορες μορφές επικοινωνίας που στηρίζονται στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, από το ραδιόφωνο και την τηλεόραση μέχρι τα ασύρματα τηλέφωνα και τις συνδέσεις μεταξύ υπολογιστών. Η ανάπτυξη των επικοινωνιών δημιούργησε τον κίνδυνο να γίνονται διαφορετικές εκπομπές στην ίδια συχνότητα, γι' αυτό, ύστερα από διεθνείς συμφωνίες, καθορίστηκαν οι ζώνες των επικοινωνιών, δηλαδή περιοχές συχνοτήτων που διατίθενται για το ραδιόφωνο, την τηλεόραση, τις επικοινωνίες των πλοίων, των αεροπλάνων κ.λ.π.

Πριν προχωρήσουμε στην περιγραφή αυτών των περιοχών θα πρέπει να μιλήσουμε για δυο παράγοντες που επηρεάζουν τις επικοινωνίες. Πρόκειται για το έδαφος και την ιονόσφαιρα. Τα κύματα που διαδίδονται κοντά στην επιφάνεια της Γης απορροφώνται από αυτή. Η απορρόφηση είναι μεγαλύτερη για τα μικρότερα μήκη κύματος. Η ιονόσφαιρα είναι στρώμα της ατμόσφαιρας που βρίσκεται σε ύψος από 60 km έως 350 km και παρουσιάζει σημαντική αγωγιμότητα. Η αγωγιμότητα της ιονόσφαιρας οφείλεται στο μεγάλο αριθμό ιόντων και ηλεκτρονίων που περιέχει. Η δημιουργία αυτού του στρώματος οφείλεται στο βομβαρδισμό που υφίσταται η Γη από διάφορες ακτινοβολίες που προέρχονται κυρίως από τον Ήλιο. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που ξεκινούν από τη Γη και φτάνουν στην ιονόσφαιρα, όταν έχουν μήκος κύματος μεγαλύτερο από ένα όριο, ανακλώνται και επιστρέφουν στη Γη. Έτσι μέσω της ανάκλασης τα κύματα αυτά φτάνουν σε μεγάλες αποστάσεις.

Μακρά κύματα : Έχουν μήκος κύματος από 1000 m έως 2000 m. Τα κύματα αυτά ταξιδεύουν πάνω από το έδαφος και μπορούν να διανύσουν μεγάλες αποστάσεις πάνω στη Γη χωρίς σημαντική εξασθένιση. Απορροφώνται όμως πιο εύκολα από τη θάλασσα και έτσι δε μπορούν να διανύσουν μεγάλες αποστάσεις πάνω από αυτή.

Μεσαία κύματα : Έχουν μήκος κύματος από 100 m έως 1000 m. Παρουσιάζουν μεγαλύτερη απορρόφηση από την επιφάνεια της Γης αλλά ανακλώνται πάνω στην ιονόσφαιρα και φτάνουν σε μεγάλες αποστάσεις.

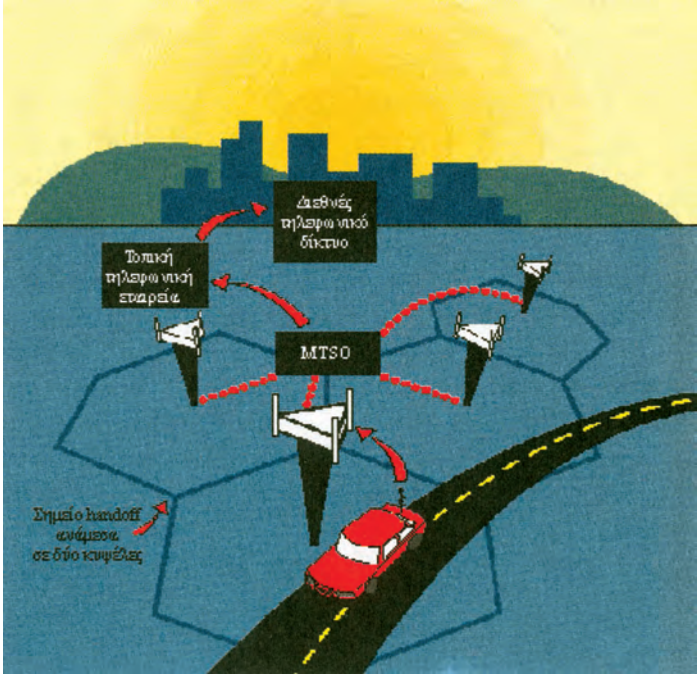
Βραχέα χαρακτηρίζονται τα μήκη κύματος από 10 m έως 100 m. Διαπερνούν εύκολα τα χαμηλότερα στρώματα της ιονόσφαιρας αλλά ανακλώνται από τα υψηλότερα, που βρίσκονται σε ύψος πάνω από 180 km. Με διαδοχικές ανακλάσεις μεταξύ ιονονόσφαιρας και της επιφάνειας της Γης μπορούν να φτάσουν σε μεγάλες αποστάσεις, να κάνουν ακόμα και το γύρο της Γης χωρίς να εμποδίζονται από την καμπυλότητά της. Πολλοί από τους ραδιοσταθμούς που «πιάνουμε» στα βραχέα εμφανίζουν αστάθεια κατά τη λήψη τους. Αυτό οφείλεται στην αστάθεια που παρουσιάζει η ιονόσφαιρα. Οι διάφορες περιοχές της ιονόσφαιρας μετακινούνται, με το χρόνο, αλλάζουν σύσταση, έκταση και μορφή, ανάλογα με τη θέση του Ήλιου, με φαινόμενα που συμβαίνουν στην επιφάνεια του Ήλιου, με τις εποχές του χρόνου κ.ά.

Περιοχές VHF και UHF. Τα VHF αντιστοιχούν σε μήκη κύματος από 1 m έως 10 m (συχνότητες 20 MHz έως 300 MHz) και τα UHF από 10 cm έως 1 m (συχνότητες από 300 MHz έως 30000 MHz). Τα κύματα αυτά διαπερνούν την ιονόσφαιρα και απορροφώνται πολύ γρήγορα από το έδαφος. Γι’ αυτό, στην τηλεόραση όπου χρησιμοποιούνται αυτές οι συχνότητες, πρέπει οι κεραίες των σπιτιών μας να έχουν οπτική επαφή με την κεραία του σταθμού εκπομπής ή του αναμεταδότη που συνήθως βρίσκεται σε ένα κοντινό βουνό.

Μικροκύματα: Αντιστοιχούν σε μήκη κύματος από 0,1 mm έως 1 cm. Τα μικροκύματα διαπερνούν την ιονόσφαιρα και προσφέρονται για επικοινωνίες μέσω δορυφόρων.

Κυψελωτή (Κινητή) Τηλεφωνία

Το κυψελωτό σύστημα λέγεται έτσι επειδή χωρίζει την περιοχή κάλυψης σε σχεδόν εξαγωνικά κομμάτια. Το κάθε κομμάτι έχει στο κέντρο του έναν σταθμό βάσης (κεραία). Γειτονικές κυψέλες χρησιμοποιούν διαφορετικές συχνότητες, ενώ μη γειτονικές μπορούν να χρησιμοποιούν τις ίδιες, εξασφαλίζοντας μεγάλη χωρητικότητα με ένα περιορισμένο εύρος συχνοτήτων (bandwidth). Κάθε σταθμός ελέγχου εκπέμπει την ταυτότητά του σε μία κοινή συχνότητα ελέγχου έτσι ώστε το σύστημα να ξέρει σε ποια κυψέλη βρίσκεται. Καθώς ο κινητός σταθμός κινείται μέσα στο σύστημα, επαναλαμβάνει την ίδια διαδικασία κάθε φορά που εντοπίζει ότι βρίσκεται σε διαφορετική κυψέλη



Σχήμα 2-60.

Όταν ο συνδρομητής δέχεται ένα τηλεφώνημα, το κέντρο στέλνει μέσω της κοινής συχνότητας εντολή στον ανάλογο κινητό σταθμό (τηλέφωνο) να χτυπήσει, αφού ξέρει σε ποια κυψέλη βρίσκεται. Το κέντρο δίνει στο σταθμό ένα συγκεκριμένο κανάλι στο οποίο γίνεται η επικοινωνία.

Παρόμοια, όταν ο συνδρομητής θέλει να κάνει μία κλήση, στέλνει μία εντολή στο κέντρο μέσω της κοινής συχνότητας. Το κέντρο απαντάει με ένα κανάλι στο οποίο γίνεται η επικοινωνία.

Κατά τη διάρκεια ενός τηλεφωνήματος, καθώς το τηλέφωνο του συνδρομητή (κινητός σταθμός) κινείται μέσα στο σύστημα, το κέντρο ελέγχει συνεχώς την ισχύ του σήματος που λαμβάνει. Γειτονικοί σταθμοί βάσης μπορεί επίσης να λαμβάνουν το ίδιο σήμα καθώς ο κινητός σταθμός κινείται προς αυτούς. Όταν το σήμα εξασθενήσει αρκετά στον αρχικό σταθμό βάσης και λαμβάνεται πιο δυνατά σε έναν άλλο, το κέντρο δίνει εντολή στον κινητό σταθμό να αλλάξει κανάλι, σε ένα κανάλι που ανήκει στο νέο σταθμό βάσης. Αυτή η διαδικασία λέγεται hand-off. Όταν αλλάζει το κανάλι, ο συνδρομητής αντιλαμβάνεται μόνο μία μικρή διακοπή στη μετάδοση. Έτσι ο συνδρομητής μπορεί να συνεχίσει μια συνομιλία, ακόμη κι αν μετακινηθεί σε μεγάλες αποστάσεις.

Τα πρώτα κυψελωτά συστήματα ήταν αναλογικά, δηλαδή η μετάδοση του ήχου είναι αναλογική. Τέτοια συστήματα είναι το AMPS [Advanced Mobile Phone System, (Προηγμένο Σύστημα Κινητών Τηλεφώνων)] που χρησιμοποιήθηκε κυρίως στη Βόρεια Αμερική στα 800MHz, το NMT 450 και 900 (Nordic Mobile Telephone στα 450 και 900MHz) στις σκανδιναβικές χώρες και TACS [Total Access Communication System, (Σύστημα Επικοινωνίας Πλήρους Πρόσβασης)] που χρησιμοποιήθηκε σε μερικές ευρωπαϊκές και ασιατικές χώρες και είναι σχεδόν ίδιο με το AMPS. Το πρώτο εμπορικό σύστημα AMPS λειτούργησε στο Chicago, το 1983. Αρχικά χρησιμοποιούσε 666 κανάλια πλάτους 30kHz, αλλά μετά επεκτάθηκε στα 832. Ο ήχος διαμορφώνεται με διαμόρφωση FM.

Σήμερα χρησιμοποιούνται κυρίως ψηφιακά συστήματα όπως το GSM [(Global System for Mobile communications, (Παγκόσμιο Σύστημα για Κινητές Επικοινωνίες)], το IS-136 (Industry Standard 136) και το IS-95 (Industry Standard 95). Το GSM είναι το πιο δημοφιλές που χρησιμοποιείται στην Ελλάδα. Υπάρχει σε εκδόσεις στα 900, 1800 και 1900MHz. Στην Ελλάδα λειτουργεί στα 900 και 1800 MHz. Χρησιμοποιεί κανάλια πλάτους 100 kHz. Το κάθε κανάλι εξυπηρετεί περισσότερους από έναν συνδρομητές. Αυτό γίνεται μέσω της χρήσης TDMA [Time Division Multiple Access, (Πολλαπλή Πρόσβαση Διαίρεσης Χρόνου)], που μοιράζει το κανάλι σε 8 χρονικές σχισμές. Κάθε συνδρομητής παίρνει μία από τις σχισμές και εκπέμπει μόνο κατά τη διάρκειά της, ενώ μένει σιωπηρός κατά τη διάρκεια των άλλων 7. Έτσι 8 συνδρομητές χρησιμοποιούνε το κανάλι συγχρόνως, εξασφαλίζοντας μεγαλύτερη χωρητικότητα. Λόγω της ψηφιακής μετάδοσης η ποιότητα του ήχου είναι καλύτερη και εξασφαλίζει το απόρρητο των συνδιαλέξεων. Επίσης γίνονται δυνατές διάφορες προηγμένες υπηρεσίες, όπως η μετάδοση δεδομένων και η αποστολή συντόμων γραπτών μηνυμάτων.

3 ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ

3.1. Εισαγωγή

Οι φυσικοί και οι μηχανικοί αποδίδουν το χαρακτηρισμό «ρευστά» στα υγρά και τα αέρια σώματα, τα οποία - αντίθετα με τα στερεά - δεν έχουν δικό τους σχήμα αλλά παίρνουν το σχήμα του δοχείου που τα περιέχει.

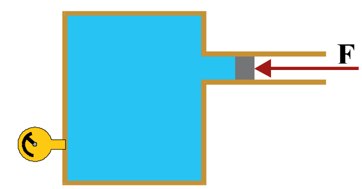
Η διάκριση των ρευστών σε υγρά και αέρια βασίζεται στη σταθερότητα του όγκου τους (για ορισμένη θερμοκρασία). Τα υγρά είναι πρακτικά **ασυμπίεστα**, έχουν δηλαδή σταθερό όγκο, ανεξάρτητο από την πίεση. Αντίθετα τα αέρια είναι **συμπιεστά**. Αυτό σημαίνει ότι ο όγκος τους εξαρτάται από την πίεσή τους.

Κινούμαστε μέσα σε ρευστά (στον ατμοσφαιρικό αέρα ή στο νερό της θάλασσας) μεταφέρουμε τεράστιες ποσότητες ρευστών με σωλήνες, εκμεταλλευόμαστε την ενέργεια των ρευστών για να λύσουμε πρακτικά μας προβλήματα ....

Η ανάπτυξη της τεχνολογίας στους τομείς αυτούς βασίστηκε στη μελέτη των νόμων που διέπουν την κίνηση των ρευστών.

3.2. Υγρά Σε Ισορροπία

Η πίεση[1] στα διάφορα σημεία του χώρου που καταλαμβάνει κάποιο υγρό και στα τοιχώματα του δοχείου μέσα στο οποίο περιέχεται οφείλεται ή στο βάρος του υγρού ή σε εξωτερικό αίτιο. Ως εξωτερικό αίτιο μπορούμε να θεωρήσουμε την πίεση που κάποιο έμβολο ασκεί σε μια περιοχή του υγρού. Η πίεση που μετράει το μανόμετρο στο δοχείο του σχήματος 3.1 οφείλεται και στο βάρος του υγρού που περιέχεται στο δοχείο αλλά και στη δράση του εμβόλου.



Η πίεση στα διάφορα σημεία ενός υγρού οφείλεται στο βάρος του και σε εξωτερικά αίτια.
Σχήμα 3-1.

Υδροστατική πίεση

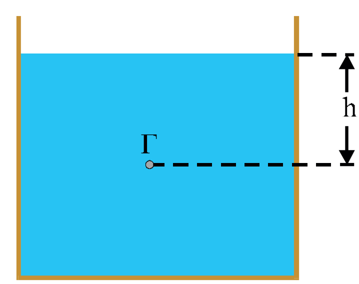
Η πίεση που οφείλεται στο βάρος του υγρού ονομάζεται υδροστατική πίεση.

Η υδροστατική πίεση έχει νόημα μόνο εφόσον το υγρό βρίσκεται μέσα σε πεδίο βαρύτητας.

Η σχέση που δίνει την υδροστατική πίεση σε κάποιο σημείο Γ του χώρου που καταλαμβάνει ένα υγρό σε ισορροπία είναι

$\boxed{p = \rho g h}$ (**Θεμελιώδης νόμος της υδροστατικής**)

όπου h: το βάθος του σημείου Γ (η απόσταση από την ανώτερη επιφάνεια του υγρού) και
ρ: η πυκνότητα του υγρού.



Η υδροστατική πίεση σε βάθος h είναι $\rho g h$.
Σχήμα 3-2.

Αρχή του Pascal (Πασκάλ)

Όταν ένα υγρό βρίσκεται εκτός πεδίου βαρύτητας, σε όλη του την έκταση επικρατεί η ίδια πίεση. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι

η πίεση που δημιουργεί ένα εξωτερικό αίτιο σε κάποιο σημείο του υγρού μεταφέρεται αναλλοίωτη σε όλα τα σημεία του.

[1]Υπενθυμίζεται ότι η πίεση ορίζεται ως το πηλίκο του μέτρου της δύναμης που ασκείται κάθετα σε μία επιφάνεια προς το εμβαδόν της επιφάνειας αυτής: $p = \frac{dF}{dA}$.
Στο S.I. η πίεση μετριέται σε Pa (Pascal). $1\,Pa = 1\,N/m^2$.

(αρχή του Pascal)

Για παράδειγμα, στο δοχείο του σχήματος 3.3, τα μανόμετρα δείχνουν όλα την ίδια πίεση όταν το δοχείο βρίσκεται εκτός πεδίου βαρύτητας. Αν αυξηθεί η δύναμη που ασκείται στο έμβολο κατά ΔF θα αυξηθεί και η πίεση σε όλα τα μανόμετρα κατά $\dfrac{\Delta F}{A}$ (A εμβαδόν του εμβόλου).

Εάν τώρα το δοχείο βρίσκεται εντός του πεδίου βαρύτητας, η πίεση που δείχνουν τα μανόμετρα είναι διαφορετική στο κάθε ένα από αυτά ανάλογα με το βάθος στο οποίο βρίσκεται. Αν πάλι αυξηθεί η δύναμη που ασκείται στο έμβολο κατά ΔF θα αυξηθεί και η πίεση σε όλα τα μανόμετρα κατά $\dfrac{\Delta F}{A}$.

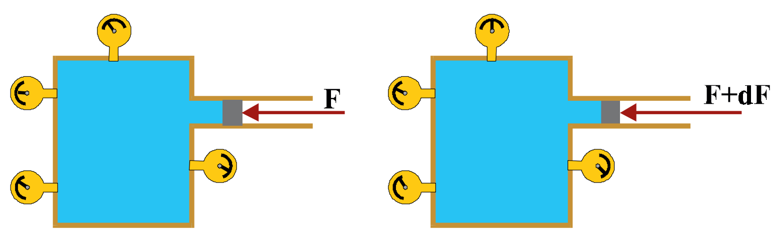
Blaise Pascal (1623-1662). Γάλλος επιστήμονας και φιλόσοφος. Ανήσυχο πνεύμα, παλινδρομούσε συνεχώς ανάμεσα στο θρησκευτικό του συναίσθημα και τις επιστημονικές του ανησυχίες, προσπαθώντας να τα συμβιβάσει.

Εικόνα 3-1.

Σημείωση : Αν κάποιο υγρό ισορροπεί σε ανοιχτό δοχείο, στην ελεύθερη επιφάνειά του ασκείται η ατμοσφαιρική πίεση. Έτσι η πίεση σε βάθος h θα είναι

$$p = p_{at} + \rho g h,$$

ακριβώς επειδή, όπως προβλέπει η αρχή του Pascal, η ατμοσφαιρική πίεση μεταφέρεται σε όλα τα σημεία του υγρού.



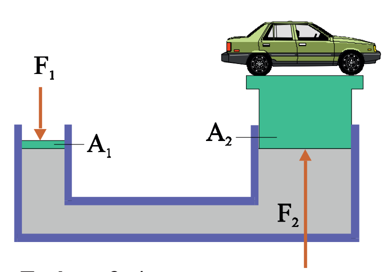
(α) (β)

(α) Το δοχείο βρίσκεται εκτός πεδίου βαρύτητας. Η πίεση που δημιουργεί η δύναμη μεταφέρεται σε όλα τα σημεία του υγρού (β) Αν αυξηθεί η δύναμη, η πίεση στο υγρό αυξάνεται ομοιόμορφα σε όλα τα σημεία του.

Σχήμα 3-3.

Παράδειγμα 3.1

Υδραυλικός ανυψωτήρας χρησιμοποιείται για την ανύψωση αυτοκινήτου βάρους $w = 18000\ N$. Πόση δύναμη πρέπει να ασκήσουμε στο μικρής διατομής έμβολο του σχήματος 3.4 ώστε να πετύχουμε την ανύψωση με το μεγάλης διατομής έμβολο; Τα έμβολα είναι κυλινδρικά και έχουν ακτίνες $r_1 = 4\,cm$ και $r_2 = 20\,cm$ αντίστοιχα.



Σχήμα 3-4.

Απάντηση :

Σύμφωνα με την αρχή του Pascal η επιπλέον πίεση που οφείλεται στη δύναμη που ασκήσαμε στο μικρό έμβολο θα μεταφερθεί και στο μεγάλο.

Άρα $\quad \Delta p_1 = \Delta p_2 = p \qquad$ **(3.1)**

Όμως $\quad \Delta p_1 = F_1 / A_1 \qquad$ **(3.2)**

και $\quad \Delta p_2 = F_2 / A_2 \qquad$ **(3.3)**

Αντικαθιστώντας τις (3.3) και (3.2) στην (3.1) προκύπτει

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

οπότε $$F_1 = F_2 \frac{A_1}{A_2}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι το μέτρο της F_2 πρέπει να είναι τουλάχιστον ίσο με το μέτρο του βάρους w του αυτοκινήτου, καταλήγουμε

$$F_1 = (18000N) \cdot \frac{\pi\left(4\times10^{-2} m\right)^2}{\pi\left(20\times10^{-2} m\right)^2} = 720\ N$$

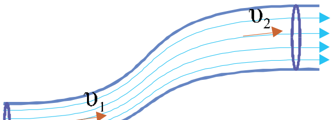
Ρίχνοντας χρώματα μέσα σε ένα ρευστό που κάνει τυρβώδη ροή έχουμε μια εικόνα των δινών που σχηματίζει.
Εικόνα 3-2.

3.3. Ρευστά Σε Κίνηση

Κατά την κίνηση των ρευστών αναπτύσσονται δυνάμεις τριβής μεταξύ των μορίων τους (εσωτερική τριβή) αλλά και μεταξύ των μορίων τους και των τοιχωμάτων του σωλήνα μέσα στον οποίο πραγματοποιείται η κίνηση (δυνάμεις συναφείας). Αν οι δυνάμεις που προαναφέραμε υπερβούν κάποιο όριο το ρευστό δημιουργεί κατά τη ροή του δίνες και η ροή λέγεται **τυρβώδης** ή στροβιλώδης. Η μελέτη μιας τέτοιας κίνησης είναι πολύπλοκη. Εμείς θα περιοριστούμε στη μελέτη της ροής ενός ρευστού που δεν παρουσιάζει εσωτερικές τριβές και τριβές με τα τοιχώματα του σωλήνα μέσα στον οποίο ρέει και επιπλέον είναι ασυμπίεστο. Ένα τέτοιο ρευστό χαρακτηρίζεται ως **ιδανικό**.

Στην πραγματικότητα η συμπεριφορά των κινούμενων ρευστών διαφέρει πολύ ή λίγο από τη συμπεριφορά των ιδανικών ρευστών. Για να διακρίνουμε τα υπαρκτά ρευστά από τα ιδανικά θα τα ονομάζουμε **πραγματικά ρευστά**.

Η ροή ενός ιδανικού ρευστού είναι **στρωτή**, δηλαδή δεν παρουσιάζει στροβίλους.

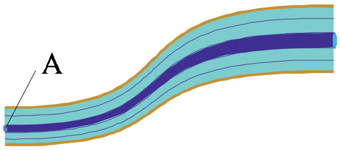


Ρευματική γραμμή είναι η τροχιά ενός μορίου του υγρού.
Σχήμα 3-5.

Ρευματικές γραμμές - Φλέβα - Παροχή

Το σύνολο των θέσεων από τις οποίες περνά κάθε μόριο του ρευστού στη διάρκεια της κίνησής του ορίζει μια γραμμή που την ονομάζουμε **ρευματική γραμμή**. Εφόσον η ρευματική γραμμή είναι στην πραγματικότητα η τροχιά του μορίου, η ταχύτητά του σε κάθε θέση θα είναι εφαπτομένη της ρευματικής γραμμής πράγμα που σημαίνει ότι δύο ρευματικές γραμμές δεν είναι δυνατόν να τέμνονται (σχ. 3.5).

Αν θεωρήσουμε μια επιφάνεια A κάθετη στη διεύθυνση του σωλήνα[1], μέσα στον οποίο κινείται ένα ρευστό και από κάθε σημείο του περιγράμματος της A σχεδιάσουμε την αντίστοιχη ρευματική γραμμή



Σε κάθε σημείο στο περίγραμμα της επιφάνειας Α αντιστοιχεί μια ρευματική γραμμή. Όλες αυτές οι ρευματικές γραμμές ορίζουν μία φλέβα.
Σχήμα 3-6.

[1] *Ως σωλήνες θεωρούμε κάθε μορφής τοιχώματα που περιορίζουν το κινούμενο ρευστό. Για παράδειγμα σωλήνες μπορούν να θεωρηθούν η κοίτη και τα πλευρικά τοιχώματα στη ροή των ποταμών ή οι κοιλάδες στην κίνηση των ανέμων.*

μέσα στο ρευστό σχηματίζεται ένας νοητός σωλήνας που ονομάζεται **φλέβα** (σχ. 3.6).

Όπως φαίνεται από τον ορισμό της το ρευστό που κυλάει σε κάποια φλέβα δεν αναμιγνύεται με το περιεχόμενο άλλης φλέβας του σωλήνα.

Από μια διατομή του σωλήνα ή της φλέβας σε χρόνο Δt περνάει ένας όγκος υγρού ΔV. Το πηλίκο

$$\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} \qquad (3.4)$$

ονομάζεται **παροχή** του σωλήνα ή της φλέβας και μετριέται σε m^3/s.

Αν η διατομή του σωλήνα είναι A και το υγρό στο χρονικό διάστημα Δt έχει μετατοπιστεί κατά Δx, μπορούμε να γράψουμε

$$\Delta V = A\Delta x \qquad (3.5)$$

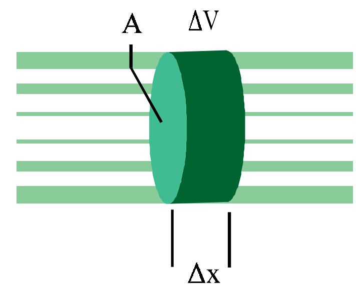
Αντικαθιστώντας την (3.5) στην (3.4) προκύπτει

$$\Pi = \frac{A\Delta x}{\Delta t}$$

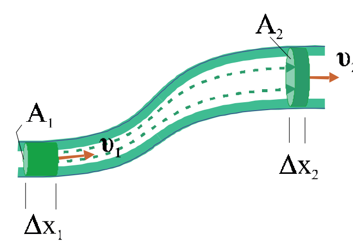
και επειδή το πηλίκο $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ ισούται με την ταχύτητα του υγρού στη θέση αυτή

$$\boxed{\Pi = A\upsilon}$$

Η παροχή σωλήνα ή φλέβας σε κάποια θέση είναι ίση με το γινόμενο του εμβαδού της διατομής επί την ταχύτητα του ρευστού στη θέση αυτή.



Στο χρονικό διάστημα Δt, από μια διατομή A του σωλήνα περνάει υγρό όγκου $A\ \Delta x$.
Σχήμα 3-7.



Αν το ρευστό που ρέει στο σωλήνα είναι ασυμπίεστο, το γινόμενο $A\ \upsilon$ είναι σταθερό.
Σχήμα 3-8.

(3.4.) Διατήρηση Ύλης και η Εξίσωση Συνέχειας

Θεωρούμε ένα ασυμπίεστο ρευστό που ρέει μέσα σ' ένα σωλήνα μεταβλητής διατομής (σχ. 3.8). Υποθέτουμε ότι η ροή είναι στρωτή.

Επειδή το ρευστό θεωρείται ασυμπίεστο θα πρέπει η μάζα Δm_1 που περνάει από μία διατομή A_1 του σωλήνα σε χρόνο Δt να είναι ίση με τη μάζα Δm_2 που περνάει στο ίδιο χρονικό διάστημα από μία άλλη διατομή του σωλήνα A_2. Είναι δηλαδή

$$\Delta m_1 = \Delta m_2 \qquad (3.6)$$

ή

$$\rho\Delta V_1 = \rho\Delta V_2$$

όπου ΔV_1 και ΔV_2 οι στοιχειώδεις όγκοι που καταλαμβάνουν μέσα στο σωλήνα οι μάζες Δm_1 και Δm_2 αντίστοιχα.

Αλλά $\Delta V_1 = A_1\Delta x_1 = A_1\upsilon_1\Delta t$ και $\Delta V_2 = A_2\Delta x_2 = A_2\upsilon_2\Delta t$ όπου υ_1 και υ_2 οι ταχύτητες του ρευστού στις διατομές A_1 και A_2 αντίστοιχα.[1]

Η εξίσωση (3.6) γίνεται $A_1\upsilon_1\Delta t = A_2\upsilon_2\Delta t \qquad (3.7)$

και τελικά $\boxed{A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2} \qquad (3.8)$

[1] *Υπενθυμίζεται ότι το ρευστό θεωρείται ασυμπίεστο. Αυτό σημαίνει ότι η πυκνότητά του είναι ίδια σε όλη την έκτασή του.*

Η εξίσωση αυτή ονομάζεται **εξίσωση της συνέχειας** και είναι άμεση συνέπεια της αρχής διατήρησης της ύλης.

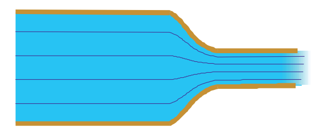
Επειδή $\Pi = A\upsilon$ η (3.8) γράφεται και

$$\Pi_1 = \Pi_2 \quad \text{ή} \quad \Pi = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o} \qquad (3.9)$$

Η σχέση (3.9) ισχύει για σωλήνα αλλά και για φλέβα και διατυπώνεται ως εξής :

Κατά μήκος ενός σωλήνα ή μιας φλέβας η παροχή διατηρείται σταθερή.

Από τη σχέση (3.8) φαίνεται ότι κατά μήκος ενός σωλήνα που δεν έχει σταθερή διατομή, η ταχύτητα του υγρού δεν είναι παντού ίδια. Σε σημεία όπου ο σωλήνας στενεύει η ταχύτητα ροής είναι πιο μεγάλη. Κατά μήκος ενός ποταμού με σταθερό πλάτος πολλές φορές το βάθος ποικίλει. Όπου το ποτάμι έχει μικρό βάθος έχει και μικρή εγκάρσια διατομή. Επειδή η παροχή είναι σταθερή, στις περιοχές όπου το ποτάμι είναι ρηχό το νερό κυλάει γρηγορότερα. Παραστατικά μπορούμε να πούμε ότι εκεί που οι ρευματικές γραμμές πυκνώνουν η ταχύτητα ροής είναι πιο μεγάλη (σχ. 3.9).



Η ταχύτητα ροής είναι μεγαλύτερη εκεί που πυκνώνουν οι ρευματικές γραμμές.
Σχήμα 3-9.

Παράδειγμα 3.2

Ένας κυλινδρικός σωλήνας συνδέεται με βρύση παροχής $0{,}001\ m^3/s$. α) Εάν ο σωλήνας έχει διάμετρο $3\ cm$ ποια η ταχύτητα ροής του νερού μέσα στο σωλήνα; β) Με τι ταχύτητα εκτοξεύεται το νερό αν μειώσουμε με το δάχτυλό μας, στο μισό, τη διατομή του σωλήνα;

Απάντηση :

α) $\dfrac{\Delta V}{\Delta t} = A\upsilon$ άρα $\upsilon = \dfrac{1}{A}\dfrac{\Delta V}{\Delta t}$ οπότε

$$\upsilon = \frac{1}{\pi\dfrac{\left(3\times 10^{-2}\, m\right)^2}{4}}\, 0{,}001\ m^3/s = 1{,}42\ m/s$$

β) $A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2$ οπότε $\upsilon_2 = \upsilon_1\dfrac{A_1}{A_2}$ και τελικά

$$\upsilon_2 = \left(1{,}42\ m/s\right)\cdot 2 = 2{,}48\ m/s$$

3.5. Η Διατήρηση Ενέργειας και η Εξίσωση του Bernoulli (Μπερνούλι)

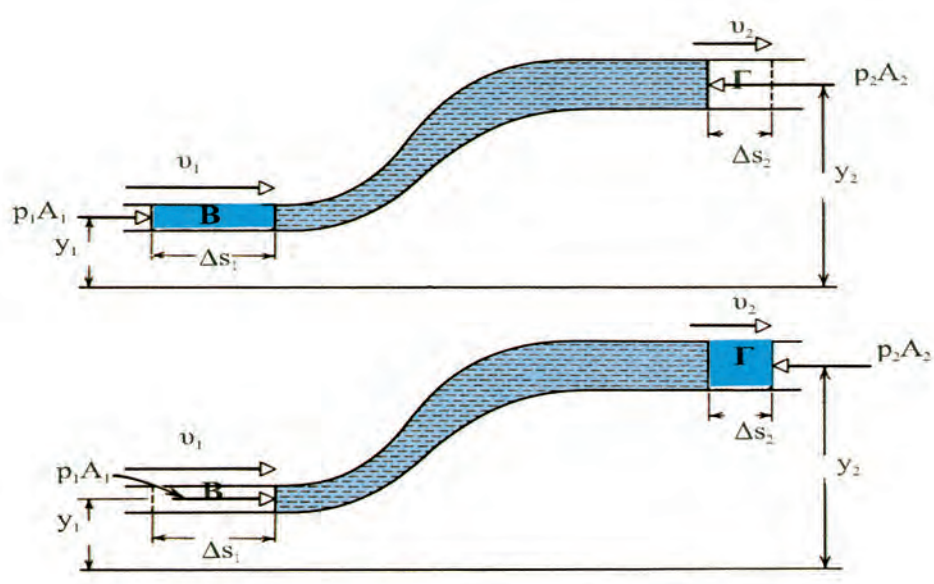
Από την καθημερινή μας εμπειρία γνωρίζουμε ότι η πίεση ενός ρευστού που ρέει μέσα σε ένα σωλήνα είναι, εν γένει, διαφορετική ανάμεσα σε δύο σημεία που έχουν υψομετρική διαφορά. Το νερό στις βρύσες του πέμπτου ορόφου έχει μικρότερη πίεση από το νερό στις βρύσες του ισογείου.

Σε ένα σωλήνα που η διατομή του δεν είναι παντού ίδια, η ταχύτητα του υγρού μεταβάλλεται (εξίσωση της συνέχειας). Δηλαδή μια μικρή μάζα Δm του υγρού σε άλλες περιοχές του σωλήνα επιταχύνεται και σε άλλες επιβραδύνεται. Στις περιπτώσεις αυτές η συνολική δύναμη που δέχεται αυτή η μάζα από το περιβάλλον υγρό δεν είναι μηδενική και κατά συνέπεια η πίεση δε μπορεί να είναι ίδια σε όλες τις περιοχές του σωλήνα.

Το 1738 ο Ελβετός Daniel Bernoulli βρήκε μια σχέση που συνδέει την πίεση με την ταχύτητα και με το ύψος.

Έστω ότι έχουμε ένα σωλήνα μεταβλητής διατομής μέσα στον οποίο ρέει ένα ασυμπίεστο ρευστό (σχ. 3.10). Θα εξετάσουμε την πίεση σε δύο σημεία Β, Γ, του σωλήνα. Το σημείο Β βρίσκεται σε ύψος y_1 από το έδαφος και ο σωλήνας έχει στην περιοχή του Β διατομή A_1. Η πίεση του ρευστού στο Β είναι p_1. Το σημείο Γ βρίσκεται σε ύψος y_2 από το έδαφος, η διατομή του σωλήνα εκεί είναι A_2 και η πίεση p_2. Αν θεωρήσουμε σαν σύστημα το ρευστό από το Β μέχρι το Γ, βλέπουμε ότι δέχεται από το υπόλοιπο ρευστό μια δύναμη p_1A_1 στην περιοχή του Β και μια δύναμη, την p_2A_2 στην περιοχή του Γ, με φορά αντίθετη με τη φορά της p_1A_1. Σ' ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα Δt ένα στοιχειώδες τμήμα του ρευστού στην περιοχή του Β μετατοπίζεται κατά Δs_1 ενώ ένα αντίστοιχο τμήμα του ρευστού ίσης μάζας, άρα και όγκου, στην περιοχή του Γ μετατοπίζεται κατά Δs_2.

Daniel Bernoulli (1700-1782). Ελβετός φυσικός και μαθηματικός, από οικογένεια διάσημων μαθηματικών. Η πιο φημισμένη του εργασία ήταν πάνω στην υδροδυναμική. Οι μελέτες του Bernoulli πάνω στα ρευστά αποτέλεσαν την απαρχή της κινητικής θεωρίας των αερίων. Ο Bernoulli τιμήθηκε πολύ στη διάρκεια της ζωής του με σειρά από αξιώματα και θέσεις στα πανεπιστήμια της εποχής του.
Εικόνα 3-3.



Ασυμπίεστο ρευστό ρέει με στρωτή ροή μέσα σε ένα σωλήνα. Το ρευστό που βρίσκεται στο μέρος του σωλήνα με μήκος Δs_1 μετακινείται στο μέρος του σωλήνα που έχει μήκος Δs_2. Οι όγκοι του ρευστού στα δύο μέρη είναι ίσοι.
Σχήμα 3-10.

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας στο μικρό χρονικό διάστημα Δt. Σύμφωνα με αυτό

$$W + W_B = \Delta K \quad \mathbf{(3.10)}$$

όπου W το έργο που προσφέρεται στο τμήμα του ρευστού από το Β στο Γ από το περιβάλλον ρευστό. Το έργο αυτό θα είναι το έργο της δύναμης p_1A_1 (θετικό) συν το έργο της p_2A_2 (αρνητικό)

$$W = p_1A_1\Delta s_1 - p_2A_2\Delta s_2 \qquad (3.11)$$

Όμως $$A_1\Delta s_1 = A_2\Delta s_2 = \Delta V$$

Οπότε $$W = (p_1 - p_2)\Delta V$$

Το έργο του βάρους στο ίδιο χρονικό διάστημα είναι

$$W_B = -\Delta m\, g(y_2 - y_1) = -\rho\Delta V\, g(y_2 - y_1) \qquad (3.12)$$

καθώς, στην ουσία, ένα τμήμα του ρευστού Δm έφυγε από το ύψος y_1 και βρέθηκε στο ύψος y_2.

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας θα είναι

$$\Delta K = \frac{1}{2}\Delta m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}\rho\Delta V\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right) \qquad (3.13)$$

όπου υ_1 η ταχύτητα του ρευστού στο Β και υ_2 η ταχύτητα του ρευστού στο Γ.

Αντικαθιστώντας τις (3.11), (3.12) και (3.13) στη σχέση (3.10) έχουμε

$$(p_1 - p_2)\Delta V - \rho\Delta V g(y_2 - y_1) = \frac{1}{2}\rho\Delta V\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right)$$

Απλοποιούμε τα ΔV και αναδιατάσσοντας την εξίσωση έχουμε

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g y_2$$

Η σχέση αυτή ισχύει για οποιοδήποτε ζεύγος σημείων άρα μπορεί να γραφτεί και με τη μορφή

$$\boxed{p + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + \rho g y = \text{σταθερό}}$$

Η παραπάνω σχέση είναι η **εξίσωση του Bernoulli** για ιδανικό ρευστό.

Από την εξίσωση του Bernoulli προκύπτει ότι

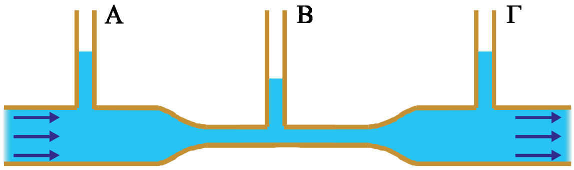
το άθροισμα της πίεσης (p), της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου ($\frac{1}{2}\rho\upsilon^2$) και της δυναμικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου ($\rho g y$) έχει την ίδια σταθερή τιμή σε οποιοδήποτε σημείο της ρευματικής γραμμής.

Η εξίσωση του Bernoulli αποτελεί έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας στη ροή των ρευστών.

Αν ο σωλήνας είναι οριζόντιος η εξίσωση του Bernoulli παίρνει τη μορφή

$$p + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = \text{σταθερό}$$

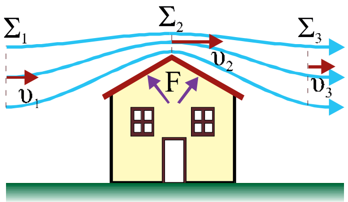
από όπου φαίνεται ότι σε περιοχές όπου πυκνώνουν οι ρευματικές γραμμές (μικρή διατομή του σωλήνα) και η ταχύτητα ροής αυξάνεται, η πίεση ελαττώνεται.



Στο στενό μέρος του σωλήνα η ταχύτητα του υγρού είναι μεγαλύτερη. Το ύψος της στάθμης του υγρού πάνω από την περιοχή αυτή δείχνει ότι η πίεση στο σωλήνα είναι μικρότερη.
Σχήμα 3-11.

Εφαρμογή 3-1

Γιατί ο δυνατός άνεμος παρασέρνει τις στέγες των σπιτιών;



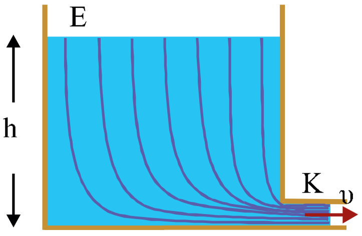
Σχήμα 3-12.

Ο δυνατός άνεμος όταν συναντά το σπίτι (σχ. 3.12) περνά πάνω από αυτό, με αποτέλεσμα η φλέβα του αέρα να στενεύει στη θέση Σ_2 πάνω από τη στέγη, άρα η ταχύτητά του υ_2 να είναι μεγαλύτερη από τις ταχύτητες υ_1 και υ_3 που έχει στις θέσεις Σ_1 και Σ_3, αντίστοιχα, πριν και μετά απ' αυτήν (εξίσωση συνέχειας).

Επειδή στη θέση Σ_2 η ταχύτητα του ανέμου είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα στις θέσεις Σ_1 και Σ_3, σύμφωνα με το νόμο του Bernoulli η πίεση στο Σ_2 θα είναι μικρότερη από αυτήν στις θέσεις Σ_1 και Σ_3. Η πίεση πάνω από τη στέγη θα είναι ακόμη μικρότερη από αυτήν που επικρατεί στο εσωτερικό του σπιτιού όπου ο αέρας είναι ακίνητος. Η ισορροπία δυνάμεων που διατηρεί τη στέγη στη θέση της διαταράσσεται, με αποτέλεσμα η στέγη να τείνει να ανυψωθεί.

Εφαρμογή 3-2

Θεώρημα Torricelli (Υπολογισμός ταχύτητας εκροής υγρού από ανοικτό δοχείο)



Σχήμα 3-13.

Έστω ότι έχουμε το δοχείο του σχήματος 3.13 στη βάση του οποίου υπάρχει στόμιο εκροής.

Εφαρμόζουμε το νόμο του Bernoulli για τις θέσεις Ε (ελεύθερη επιφάνεια) και Κ (στόμιο εκροής):

$$p_E + \frac{1}{2}\rho\upsilon_E^2 + \rho gh = p_K + \frac{1}{2}\rho\upsilon_K^2 + 0 \qquad (3.14)$$

Η πίεση τόσο στην ελεύθερη επιφάνεια όσο και στο σημείο εξόδου είναι η ατμοσφαιρική, δηλαδή :

$$p_E = p_K = p_{at} \qquad (3.15)$$

Η ταχύτητα με την οποία κατεβαίνει η στάθμη του υγρού μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα συγκριτικά με την ταχύτητα με την οποία ρέει το νερό στο Κ

$$\upsilon_E = 0 \qquad (3.16)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (3.15) και (3.16) και επιλύοντας την (3.14) ως προς υ_K βρίσκουμε

$$\upsilon_K = \sqrt{2gh}$$

που αποτελεί τη μαθηματική έκφραση του **θεωρήματος του Torricelli** (Τορικέλι).

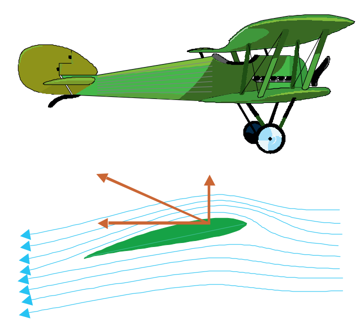
Η ταχύτητα εκροής υγρού από στόμιο που βρίσκεται σε βάθος *h* από την ελεύθερη επιφάνειά του είναι ίση με την ταχύτητα που θα είχε το υγρό αν έπεφτε ελεύθερα από ύψος *h*.

Εφαρμογή 3.3

Ποια δύναμη ανυψώνει τα αεροπλάνα;

Οι πτέρυγες των αεροπλάνων είναι έτσι σχεδιασμένες ώστε, όταν κινούνται, οι ρευματικές γραμμές του αέρα να παρουσιάζουν πύκνωση στο επάνω μέρος τους και αραίωση στο κάτω (σχ. 3.14).

Η πίεση στο άνω μέρος των πτερύγων είναι μικρότερη από αυτήν στο κάτω μέρος. Η δύναμη που δέχονται οι πτέρυγες λόγω αυτής της διαφοράς πίεσης λέγεται **αεροδύναμη** ενώ η κατακόρυφη συνιστώσα της λέγεται **δυναμική άνωση**.



Σχήμα 3-14

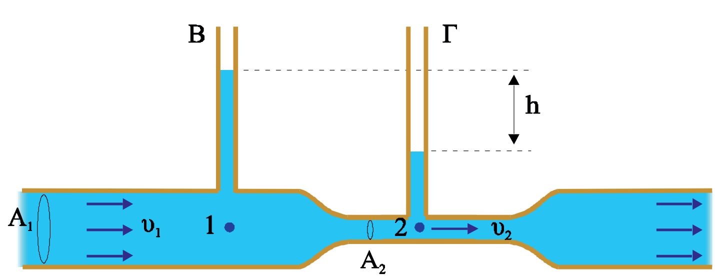
Οι πιέσεις που αναπτύσσονται είναι συνάρτηση της ταχύτητας του ρευστού, στην περίπτωσή μας του αέρα, ή, αν το δούμε αντίστροφα, της ταχύτητας του αεροπλάνου ως προς τον αέρα.

Αν η ταχύτητα του αεροπλάνου είναι τέτοια ώστε η δυναμική άνωση που προκύπτει να είναι μεγαλύτερη από το βάρος του αεροπλάνου, το αεροπλάνο ανυψώνεται.

Στην πραγματικότητα το φαινόμενο είναι πολυπλοκότερο. Η ροή του αέρα πάνω και κάτω από τις πτέρυγες είναι τυρβώδης και για να υπολογισθεί ακριβέστερα η δυναμική άνωση απαιτούνται πολύπλοκοι υπολογισμοί.

Παράδειγμα 3.3

Το ροόμετρο του Ventouri. Το σχήμα 3.15 δείχνει μία διάταξη που χρησιμεύει για τη μέτρηση της ταχύτητας ροής σε ένα σωλήνα. Αν είναι γνωστές οι διατομές A_1 και A_2, του σωλήνα και η υψομετρική διαφορά h στη στάθμη των δύο κατακόρυφων ανοιχτών σωλήνων B και Γ, να βρεθεί η ταχύτητα ροής στην περιοχή του σωλήνα που έχει διατομή A_1.



Σχήμα 3-15.

Απάντηση :

Εφαρμόζοντας την εξίσωση του Bernoulli στα σημεία 1 και 2 που βρίσκονται στο ίδιο ύψος έχουμε

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \qquad (3.17)$$

Από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε ότι

$$A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \text{ ή } \upsilon_2 = \frac{A_1}{A_2}\upsilon_1 \qquad (3.18)$$

Αντικαθιστώντας την (3.18) στην (3.17) έχουμε

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\frac{A_1^2}{A_2^2}\upsilon_1^2 \quad \text{ή} \quad p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right) \qquad (3.19)$$

Όμως $$p_1 = p_{at} + \rho g h_1 \text{ και } p_2 = p_{at} + \rho g h_2 \qquad (3.20)$$

όπου h_1 το ύψος της στήλης του νερού πάνω από το σωλήνα μετρημένο από το σημείο 1 και h_2 το ύψος της στήλης του νερού μετρημένο από το σημείο 2.

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (3.20) παίρνουμε

$$p_1 - p_2 = \rho g\left(h_1 - h_2\right) = \rho g h \qquad (3.21)$$

Αντικαθιστώντας στην (3.19) την (3.21)

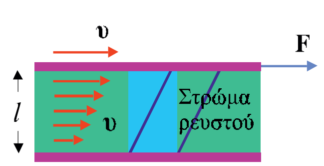
βρίσκουμε $\rho g h = \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right)$ και τελικά $\upsilon_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\left(A_1 / A_2\right)^2 - 1}}$

3.6. Η Τριβή στα Ρευστά

Μέχρι τώρα θεωρήσαμε ότι τα ρευστά ρέουν χωρίς να αναπτύσσονται δυνάμεις τριβής στο εσωτερικό τους, δηλαδή δυνάμεις που να αντιτίθενται στην κίνηση ενός τμήματος του ρευστού ως προς ένα άλλο τμήμα του. Στα πραγματικά ρευστά οι δυνάμεις αυτές υπάρχουν κι έχουν πολύ σημαντικές πρακτικές εφαρμογές, όπως για παράδειγμα στη λίπανση των τμημάτων μιας μηχανής που θα ήταν αδύνατη αν το λιπαντικό δεν παρουσίαζε κατά τη ροή του τέτοιες δυνάμεις.

Η εσωτερική τριβή μέσα σ' ένα ρευστό ονομάζεται ιξώδες.

Ας θεωρήσουμε δύο γυάλινες οριζόντιες πλάκες εμβαδού A όπως στο σχήμα 3.16. Σταθεροποιούμε την κάτω πλάκα και απλώνουμε πάνω της ένα στρώμα από μέλι πάχους l. Στη συνέχεια τοποθετούμε τη δεύτερη πλάκα πάνω στο μέλι και τη μετακινούμε με σταθερή ταχύτητα υ σε σχέση με την κάτω ακίνητη πλάκα. Διαπιστώνουμε ότι για να συνεχιστεί η κίνηση απαιτείται να ασκηθεί κάποια δύναμη F. Η δύναμη αυτή απαιτείται για να αντισταθμίσει τις τριβές (ιξώδες), που αναπτύσσονται μεταξύ των στρωμάτων του μελιού που κινούνται το



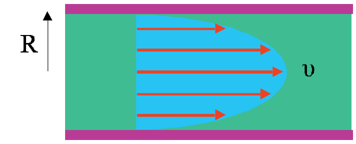
Στρώμα υγρού που περιέχεται μεταξύ δύο γυάλινων οριζόντιων πλακών, από τις οποίες η κάτω είναι ακίνητη ενώ η επάνω κινείται με ταχύτητα υ.

Σχήμα 3-16.

ένα σε σχέση με το άλλο.

Βλέπουμε ότι το ανώτερο στρώμα έχει προσκολληθεί στην πάνω πλάκα και κινείται με ταχύτητα υ ενώ το κατώτερο έχει προσκολληθεί στην κάτω πλάκα και παραμένει ακίνητο. Όλα τα ενδιάμεσα στρώματα έχουν ταχύτητες διαφορετικές μεταξύ τους, που αυξάνουν σταδιακά από 0 έως υ καθώς πηγαίνουμε από την κάτω πλάκα προς την πάνω.

Εάν αντικαταστήσουμε το μέλι με ένα άλλο ρευστό που ρέει ευκολότερα, για παράδειγμα το λάδι, διαπιστώνουμε ότι η δύναμη που πρέπει να ασκούμε στην πάνω πλάκα για να διατηρείται η ταχύτητά της σταθερή είναι μικρότερη. Επίσης η δύναμη είναι μικρότερη εάν, για το ίδιο ρευστό, μεταξύ των πλακών αυξήσουμε το πάχος του l. Αντίθετα η δύναμη γίνεται μεγαλύτερη αν οι επιφάνειες των πλακών είναι μεγαλύτερες ή αν επιχειρήσουμε να μετακινήσουμε την πάνω πλάκα με μεγαλύτερη ταχύτητα.



Διάγραμμα ταχυτήτων για ένα ρευστό σε κυλινδρικό σωλήνα ακτίνας R.

Σχήμα 3-17.

Αποδεικνύεται ότι το μέτρο της δύναμης F δίνεται από τη σχέση

$$\boxed{F = \eta A \frac{\upsilon}{l}} \qquad (3.22)$$

Ο συντελεστής η είναι χαρακτηριστικός κάθε ρευστού ονομάζεται **συντελεστής ιξώδους** και όπως φαίνεται και από την (3.22), στο S.I., μετριέται σε $N \cdot s / m^2$. Στην πράξη ο συντελεστής ιξώδους μετριέται σε **poise** (πουάζ) $\left(1P = 1 dyn \cdot s / cm^2\right)$.

Παρακάτω παραθέτουμε έναν πίνακα με το συντελεστή ιξώδους διαφόρων ρευστών.

Ρευστό	θ (°C)	Συντελεστής Ιξώδους η (Ns/m²)
Νερό	20	$1,0 \times 10^{-3}$
Νερό	100	$0,3 \times 10^{-3}$
Αίμα	37	$2,7 \times 10^{-3}$
Γλυκερίνη	20	830×10^{-3}
Μηχανέλαιο (δεκάρι)	30	250×10^{-3}

Πρέπει να πούμε ότι δεν υπακούουν όλα τα ρευστά στην εξίσωση (3.22). Δεν υπάρχει σε όλα τα ρευστά γραμμική αναλογία ανάμεσα στην εσωτερική τριβή που παρουσιάζουν κατά τη ροή τους και την ταχύτητα ροής. Τα ρευστά που υπακούουν στην (3.22) τα ονομάζουμε **νευτώνεια ρευστά**.

Το αίμα παρουσιάζει κάποια ενδιαφέρουσα ιδιαιτερότητα. Το αίμα είναι ένα αιώρημα στερεών σωματιδίων μέσα σε υγρό. Καθώς αυξάνει η ταχύτητα ροής, για να μην αυξηθούν υπέρμετρα οι εσωτερικές τριβές, τα σωματίδια παραμορφώνονται και προσανατολίζονται με τέτοιο τρόπο ώστε να διευκολύνουν τη ροή.

Σύνοψη

Τα υγρά και τα αέρια τα ονομάζουμε με έναν όρο ρευστά.

Συμπιεστά λέγονται τα ρευστά των οποίων η πυκνότητα μεταβάλλεται αν μεταβληθεί η πίεσή τους για δεδομένη θερμοκρασία.

Ασυμπίεστα λέγονται τα ρευστά των οποίων η πυκνότητα δε μεταβάλλεται αν μεταβληθεί η πίεσή τους πάλι για μια δεδομένη θερμοκρασία.

Η πίεση που δημιουργεί ένα εξωτερικό αίτιο σε κάποιο σημείο του υγρού μεταφέρεται αναλλοίωτη σε όλα τα σημεία του. (**Νόμος του Pascal**).

Η πίεση στο εσωτερικό ενός ακίνητου ρευστού σε σχέση με το βάθος από την ελεύθερη επιφάνειά του δίνεται από την εξίσωση

$$p = p_{at} + \rho g h$$

Ένα ρευστό θα θεωρείται **ιδανικό**

1. Αν κινείται χωρίς εσωτερικές τριβές και τριβές με τα τοιχώματα του σωλήνα που το περιορίζει.
2. Αν το ρευστό είναι ασυμπίεστο.

Για όλα τα σημεία μιας φλέβας ρευστού η παροχή είναι σταθερή.

$$A_1 \upsilon_1 = A_2 \upsilon_2 \qquad \textbf{(εξίσωση συνέχειας)}$$

Η εξίσωση συνέχειας εκφράζει την αρχή διατήρησης της ύλης στο ρευστό.

Το άθροισμα της πίεσης, της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου και της δυναμικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου έχει την ίδια σταθερή τιμή σε οποιοδήποτε σημείο της ρευματικής γραμμής.

$$p + \frac{1}{2}\rho \upsilon^2 + \rho g y = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o} \qquad \textbf{(εξίσωση του Bernoulli)}$$

Η εξίσωση του Bernoulli αποτελεί έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας στη ροή των ρευστών.

Η εσωτερική τριβή ενός ρευστού ονομάζεται ιξώδες.

Το μέτρο της συνισταμένης των εσωτερικών τριβών που αναπτύσσονται στο ρευστό κατά τη ροή του δίνεται από τη σχέση

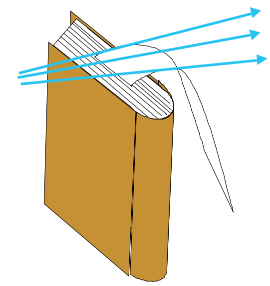
$$F = \eta A \frac{\upsilon}{l}$$

όπου η συντελεστής ιξώδους.

Δραστηριότητες

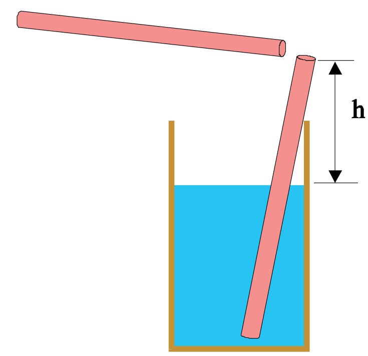
1. Κρατήστε στα χέρια σας δύο φύλλα χαρτιού ώστε να κρέμονται κατακόρυφα, με τις επιφάνειές τους παράλληλες. Φυσήξτε ανάμεσά τους. Θα τα δείτε να πλησιάζουν. Πώς εξηγείται το φαινόμενο;

2. Τοποθετήστε την άκρη μίας χάρτινης λουρίδας ανάμεσα στις σελίδες ενός βιβλίου. Κρατήστε το βιβλίο όπως στο σχήμα 3.18 και φυσήξτε με δύναμη πάνω από τη χάρτινη λουρίδα. Η λουρίδα ανυψώνεται και μάλιστα περισσότερο όταν φυσάμε πιο δυνατά. Τι εξήγηση δίνετε;



Σχήμα 3-18.

3. Στην άκρη ενός νήματος στερεώστε ένα μπαλάκι του πινγκ-πονγκ. Κρατώντας την άλλη άκρη του σχοινιού πλησιάστε το μπαλάκι κοντά στο νερό μιας βρύσης. Το μπαλάκι κινείται προς τη μεριά της φλέβας του νερού; Πώς εξηγείται αυτό;
4. Τοποθετήστε ένα καλαμάκι μέσα σε ένα ποτήρι με νερό (σχ. 3.19). Με ένα άλλο καλαμάκι φυσήξτε στη πάνω άκρη του πρώτου. Θα προκληθεί ψεκασμός. Πώς εξηγείται το φαινόμενο; Είναι το ίδιο εύκολος ο ψεκασμός όποια και αν είναι η απόσταση h; Ελέγξτε το πειραματικά. Πώς το αιτιολογείτε;



Σχήμα 3-19.

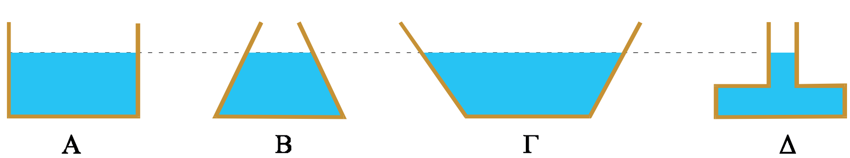
Ερωτήσεις

Υδροστατική πίεση - αρχή του Pascal

3.1 Συμπληρώστε τα κενά :
Ασυμπίεστο χαρακτηρίζεται ένα ρευστό στο οποίο η.................. του δε μεταβάλλεται όταν μεταβάλλεται η.................... του. Στην πράξη ασυμπίεστα ρευστά θεωρούμε τα ....

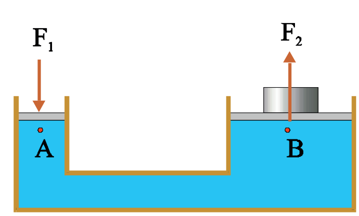
3.2 Για ποιο λόγο τα φράγματα στις τεχνητές λίμνες κατασκευάζονται σχετικά λεπτά στην κορυφή τους και πολύ φαρδιά στη βάση τους;

3.3 Στο σχήμα 3.20 φαίνονται τέσσερα δοχεία διαφορετικού σχήματος που οι βάσεις τους έχουν το ίδιο εμβαδόν.
α) Ποιο δοχείο περιέχει περισσότερο υγρό;
β) Συγκρίνατε τις πιέσεις στον πυθμένα των δοχείων.



Σχήμα 3-20.

3.4 Στο σχήμα 3.21 φαίνεται ένα υδραυλικό πιεστήριο (αρχή). Ασκούμε στο μικρό έμβολο δύναμη μέτρου F_1.
1) Η πίεση στα σημεία Α και Β του υγρού θα αυξηθεί α) κατά το ίδιο ποσό β) περισσότερο στο Α γ) περισσότερο στο Β.
2) Το μέτρο της δύναμης $\mathbf{F_2}$ που θα ασκήσει το υγρό στο μεγάλο έμβολο θα είναι α) ίσο με F_1 β) μεγαλύτερο από F_1 γ) μικρότερο από F_1.



Σχήμα 3-21.

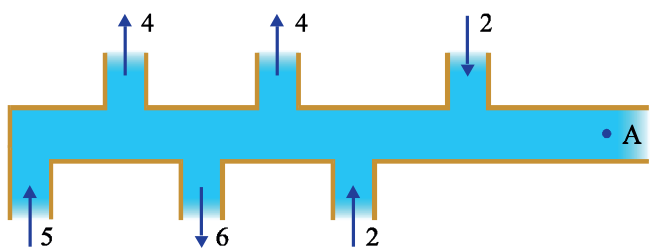
3) Το έργο της $\mathbf{F_2}$ θα είναι α) ίσο με το έργο της $\mathbf{F_1}$ β) μεγαλύτερο από το έργο της $\mathbf{F_1}$ γ) μικρότερο από το έργο της $\mathbf{F_1}$.
Επιλέξτε τις σωστές προτάσεις.

Η εξίσωση της συνέχειας

3.5 Συμπληρώστε τις λέξεις που λείπουν :
Ένα ρευστό χαρακτηρίζεται ιδανικό αν δεν εμφανίζει .... τριβές και .... με τα τοιχώματα του σωλήνα που το περιέχει. Επίσης πρέπει να είναι ....

3.6 Η φλέβα του νερού της βρύσης γίνεται στενότερη καθώς πέφτει. Εξηγήστε γιατί συμβαίνει αυτό.

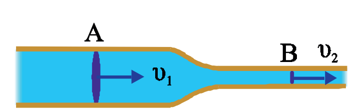
3.7 Στο σχήμα 3.22 δίνονται οι παροχές (σε m^3/s) και οι κατευθύνσεις στις οποίες κινείται το υγρό σε ορισμένες περιοχές του σωλήνα. Ποια είναι η παροχή του σωλήνα και η κατεύθυνση στην οποία κινείται το υγρό στην περιοχή του σημείου Α;



Σχήμα 3-22.

3.8 Ένα ποτάμι έχει σταθερό πλάτος. Εξηγήστε γιατί όπου το ποτάμι είναι ρηχό το νερό κινείται πιο γρήγορα. Η παροχή του ποταμού σε μια τέτοια περιοχή είναι μεγαλύτερη από την παροχή του σε περιοχές που το βάθος είναι μεγαλύτερο;

3.9 Η διατομή του σωλήνα στην περιοχή Α είναι τετραπλάσια της διατομής του στην περιοχή Β.
1) Σε ένα δευτερόλεπτο από τη διατομή Α διέρχονται $8\ cm^3$. Στον ίδιο χρόνο από τη διατομή Β διέρχονται
α) $8\ cm^3$ β) $16\ cm^3$ γ) $32\ cm^3$ δ) $4\ cm^3$ ε) $2\ cm^3$.
2) Η ταχύτητα υ_1 του υγρού στην περιοχή Α είναι $10\ cm/s$. Η ταχύτητα στην περιοχή Β είναι
α) $2{,}5\ cm/s$ β) $5\ cm/s$ γ) $10\ cm/s$ δ) $20\ cm/s$ ε) $40\ cm/s$.
Επιλέξτε τη σωστή απάντηση σε κάθε περίπτωση.



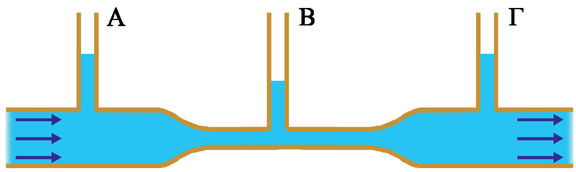
Σχήμα 3-23.

3.10 Όταν θέλουμε να φτάσει μακριά το νερό που βγαίνει από το λάστιχο του ποτίσματος κλείνουμε με το δάχτυλό μας ένα μέρος της διατομής του ή πιέζουμε την άκρη του. Πώς εξηγείται αυτό;

Η εξίσωση του Bernoulli

3.11 Τα πλοία δεν επιτρέπεται να κινούνται παράλληλα, σε μικρή μεταξύ τους απόσταση, γιατί «το ρεύμα τα σπρώχνει να πλησιάσουν πιο πολύ και υπάρχει κίνδυνος να συγκρουστούν». Πώς δικαιολογείται αυτή η πρόταση;

3.12 Εξηγήστε γιατί η στάθμη του νερού στο σωλήνα Β είναι πιο χαμηλά από ό,τι στους σωλήνες Α και Γ.

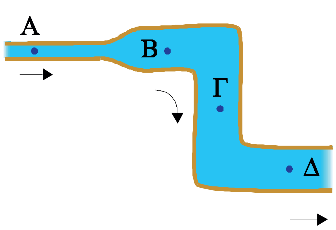


Σχήμα 3-24.

3.13 Γιατί οι πιλότοι προτιμούν να απογειώνουν τα αεροπλάνα αντίθετα στον άνεμο;

3.14 Ένα αεροπλάνο που πετάει με σταθερή οριζόντια ταχύτητα σε ύψος h δέχεται δυναμική άνωση A_1. Το ίδιο αεροπλάνο όταν πετάει με την ίδια ταχύτητα σε ύψος $2h$ δέχεται δυναμική άνωση A_2 για την οποία ισχύει:
α) $A_1 < A_2$ β) $A_1 = A_2$ γ) $A_1 > A_2$.
Επιλέξτε τη σωστή απάντηση

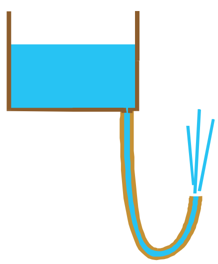
3.15 Το σχήμα παριστάνει ένα σωλήνα μέσα στον οποίο ρέει νερό. Ταξινομήστε τα σημεία Α, Β, Γ και Δ κατά τη σειρά με την οποία
α) αυξάνεται η ταχύτητα ροής του νερού.
β) αυξάνεται η πίεση.



Σχήμα 3-25.

3.16 Συμπληρώστε τις προτάσεις :
Σύμφωνα με το νόμο του Bernoulli το άθροισμα της πίεσης, της .... ενέργειας και .... ενέργειας ανά μονάδα όγκου έχει την ίδια τιμή σε κάθε σημείο κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής. Ο νόμος του Bernoulli είναι έκφραση της αρχής .... στα ρευστά.

3.17 Μέχρι ποιο ύψος θα φτάσει ο πίδακας του νερού; Θεωρήστε ότι η επιφάνεια του νερού στο δοχείο είναι πολύ μεγάλη και ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



Σχήμα 3-26.

Ασκήσεις

Νόμος του Pascal - Υδροστατική πίεση

3.18 Το μικρό έμβολο υδραυλικού ανυψωτήρα που χρησιμοποιείται για την ανύψωση αυτοκινήτων έχει διατομή εμβαδού $3\ cm^2$ ενώ το μεγάλο έχει διατομή εμβαδού $200\ cm^2$. Πόση δύναμη πρέπει να ασκηθεί στο μικρό έμβολο ώστε το μεγάλο να ανυψώσει ένα αυτοκίνητο βάρους 10000 N;

[Απ: 150 N]

Εξίσωση συνέχειας

3.19 Η ταχύτητα με την οποία ρέουν τα νερά ενός ποταμού σταθερού πλάτους σε ένα σημείο όπου το μέσο βάθος είναι $h_1 = 1,5\ m$, είναι $\upsilon_1 = 1,3\ m/s$. Πόσο είναι το μέσο βάθος σ' ένα άλλο σημείο όπου τα νερά τρέχουν με ταχύτητα $\upsilon_2 = 0,3\ m/s$;

[Απ: 6,5 m]

3.20 Η παροχή ενός πυροσβεστικού κρουνού είναι $0,012\ m^3/s$. Το λάστιχο της πυροσβεστικής καταλήγει στο ελεύθερό του άκρο σ' ένα στένωμα εσωτερικής διαμέτρου 2,2 cm. Με τι ταχύτητα εκτοξεύεται το νερό από το στένωμα;

[Απ: 31,6 m / s]

Εξίσωση του Bernoulli

3.21 Από το πλευρικό άνοιγμα μιας ανοιχτής δεξαμενής βγαίνει νερό με ταχύτητα 8,86 m/s. Με πόση ταχύτητα θα βγαίνει αν η πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια γίνει 2 atm; Δίνεται η πυκνότητα του νερού $\rho = 10^3\ kg/m^3$ και ότι $1\ atm = 1,033 \times 10^5\ Pa$.

[Απ: 16,76 m / s]

3.22 Κατά τη διάρκεια καταιγίδας ο αέρας κινείται πάνω από τη στέγη ενός σπιτιού με ταχύτητα 108 km/h. Ποια η διαφορά στην πίεση κάτω και πάνω από τη στέγη; Υπολογίστε την ανυψωτική δύναμη που δέχεται η στέγη. Η στέγη είναι επίπεδη και έχει εμβαδόν $A = 100\ m^2$. Θεωρήστε την πυκνότητα του αέρα σταθερή και ίση με $1,2\ kg/m^3$.

[Απ: 540 Pa, 54×10^3 N]

Προβλήματα

3.23 Η φλέβα του νερού της βρύσης γίνεται στενότερη καθώς το νερό πέφτει. Η διατομή της φλέβας είναι $A_1 = 1,2\ cm^2$ κοντά στο στόμιο της βρύσης και $A_2 = 0,4\ cm^2$ σε απόσταση $h = 4$ cm από αυτό. Υπολογίστε την παροχή της βρύσης. Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.

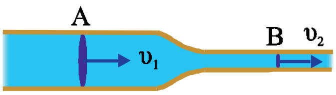
[Απ: $1,2\sqrt{10} \times 10^{-5}\ m^3/s$]

3.24 Ανοικτή δεξαμενή που περιέχει νερό έχει στο πλευρικό τοίχωμά της, σε βάθος $h = 1,8\ m$ κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού, βρύση διατομής $A = 0,5\ cm^2$. Πόση ώρα χρειάζεται για να γεμίσουμε ένα δοχείο όγκου 1 L από τη βρύση;

Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.

[Απ: 3,33 s]

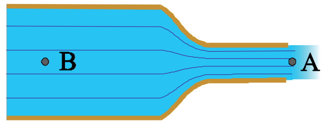
3.25 Νερό ρέει σε οριζόντιο σωλήνα (σχ. 3.27). Η διατομή του σωλήνα στη θέση Α είναι $A_1 = 10^{-2}\ m^2$ και στη θέση Β γίνεται $A_2 = A_1/2$. Η παροχή του σωλήνα είναι $\Pi = 2 \times 10^{-2}\ m^3/s$. Να βρείτε τη διαφορά της πίεσης του νερού ανάμεσα στα σημεία Α και Β. Δίνεται η πυκνότητα του νερού $\rho = 10^3\ kg/m^3$.



Σχήμα 3-27.

[Απ: 6000 Pa]

3.26 Νερό που κινείται μέσα σε οριζόντιο σωλήνα (σχ. 3.28) βγαίνει από το άκρο Α με ταχύτητα $\upsilon_2 = 10$ m/s. Το εμβαδόν διατομής του σωλήνα στα σημεία Α και Β είναι 16 cm^2 και 20 cm^2, αντίστοιχα.
α) Πόσα m^3 νερού δίνει ο σωλήνας σε μία ώρα;
β) Ποια η πίεση στο σημείο Β;
Η πυκνότητα του νερού είναι $\rho = 10^3$ kg/m^3. Θεωρήστε ότι η ατμοσφαιρική πίεση είναι 10^5 Pa.



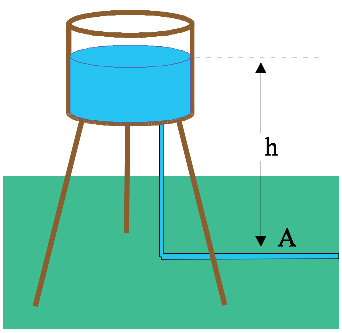
Σχήμα 3-28.

[Απ: 57,6 m^3, 118 kPa]

3.27 Μια αντλία χρησιμοποιείται για την άντληση νερού από πηγάδι βάθους 5m. Το νερό βγαίνει από την αντλία με σωλήνα διατομής 10 cm^2 και με ταχύτητα υ = 20 m/s. Υπολογίστε την ισχύ της αντλίας. Δίνεται η πυκνότητα του νερού $\rho = 10^3$ kg/m^3 και $g = 10\ m/s^2$.

[Απ: 5 kW]

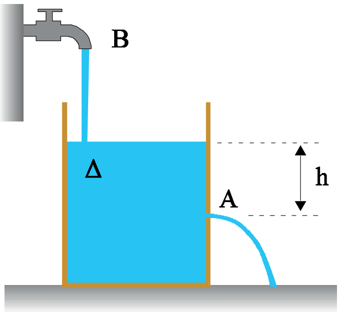
3.28 Μια ανοιχτή δεξαμενή νερού, μεγάλου όγκου, βρίσκεται ψηλά πάνω από το έδαφος (σχ. 3.29). Όταν χρησιμοποιούμε το νερό της δεξαμενής η ταχύτητα του νερού, σε κάποιο σημείο Α, στο σωλήνα που βρίσκεται στο έδαφος είναι υ = 12 m/s. Υπολογίστε την πίεση στο σημείο Α. Δίνεται ότι η στάθμη του νερού βρίσκεται σε ύψος h = 10 m πάνω από το έδαφος. Η πυκνότητα του νερού είναι $\rho = 10^3$ kg/m^3, η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\ m/s^2$ και η ατμοσφαιρική πίεση 10^5 Pa.



Σχήμα 3-29.

[Απ: 128×10^3 Pa]

3.29 Στο δοχείο Δ πέφτει συνέχεια νερό από τη βρύση Β (σχ. 3.30). Το δοχείο δε μπορεί να γεμίσει επειδή χύνεται νερό από το πλευρικό άνοιγμα Α. Αν η παροχή της βρύσης είναι $22\ cm^3/s$ και το εμβαδόν του ανοίγματος 1 cm^2, να βρείτε σε ποιο ύψος h πάνω από το σημείο Α θα σταθεροποιηθεί η ελεύθερη επιφάνεια. Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.



Σχήμα 3-30.

[Απ: 24,2 cm]

3.30 Ένα δοχείο με κατακόρυφα τοιχώματα (σχ. 3.31) περιέχει νερό μέχρι ύψος h. Σε ποιο ύψος (x) από τον πυθμένα πρέπει να τρυπήσουμε το δοχείο, ώστε η φλέβα που θα δημιουργηθεί να συναντά το έδαφος στη μεγαλύτερη δυνατή απόσταση από τη βάση του δοχείου;

[Απ: $x = h / 2$]

3.31 Ποσότητα νερού είναι αποθηκευμένη σε ανοικτό κυλινδρικό δοχείο. Το ύψος του νερού στο δοχείο είναι $h = 1\ m$. Το δοχείο έχει μικρή τρύπα στο πλευρικό του τοίχωμα και σε απόσταση $20\ cm$ κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού. Να υπολογίσετε:

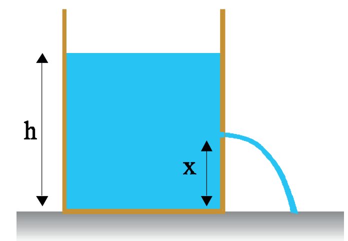
α) Την ταχύτητα με την οποία βγαίνει το νερό από την τρύπα.

β) Πόσο απέχει από το δοχείο το σημείο του δαπέδου στο οποίο φτάνει η φλέβα του νερού.

γ) Σε ποιο ύψος από τη βάση του δοχείου πρέπει να ανοιχτεί δεύτερη τρύπα στο πλευρικό τοίχωμα ώστε η φλέβα του νερού που θα βγαίνει από αυτή να πέφτει στο ίδιο σημείο με την προηγούμενη.

δ) Σε ποιο ύψος από τη βάση του κυλίνδρου πρέπει να ανοίξουμε τρύπα ώστε η φλέβα του νερού να φτάνει στο δάπεδο στη μεγαλύτερη δυνατή απόσταση από το δοχείο.

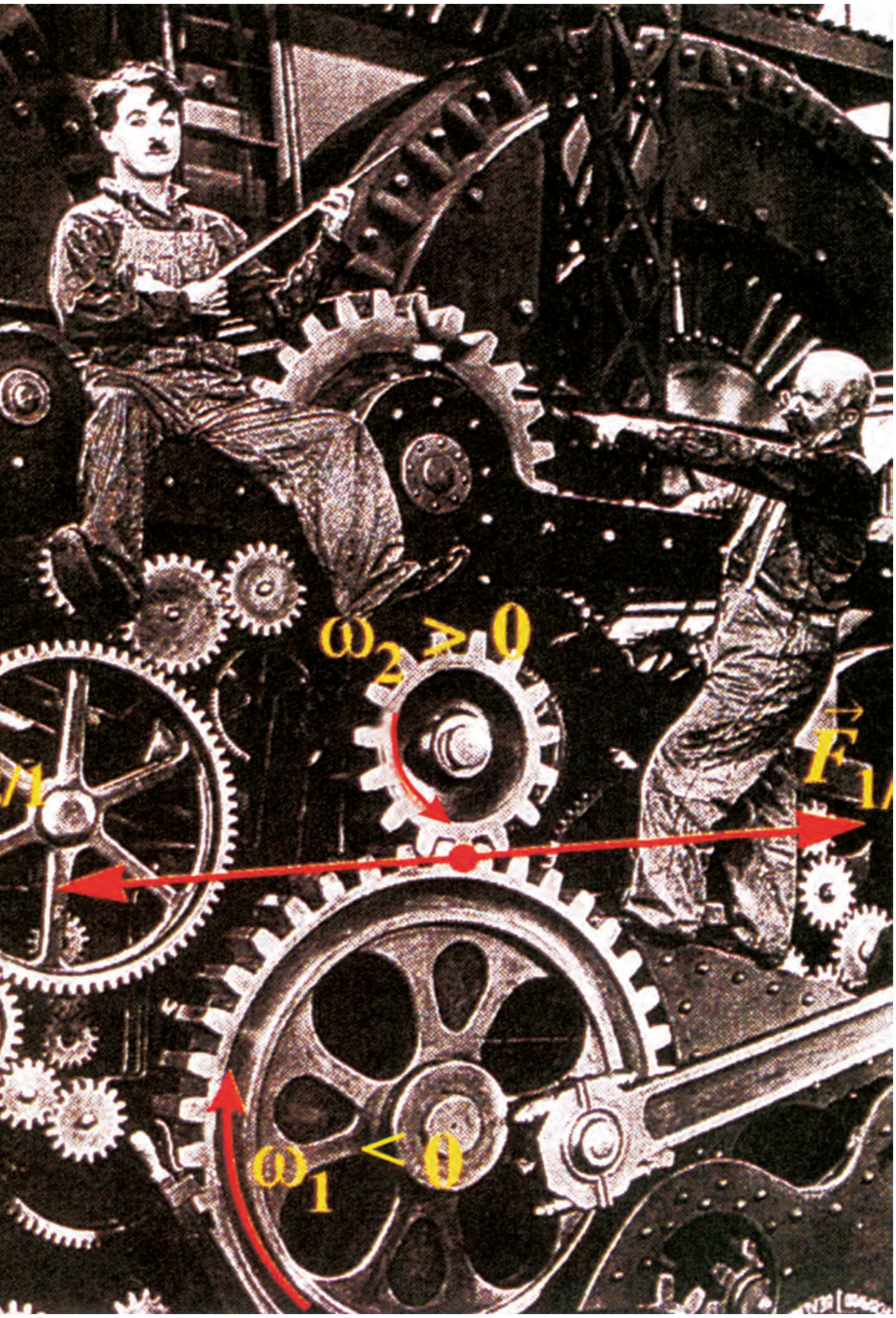
Δίνεται $g = 10\ m / s^2$.



Σχήμα 3-31.

[Απ: $2\ m / s$, $0,8\ m$, $0,2\ m$, $0,5\ m$]

4 ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ



4.1. Εισαγωγή

Στην προσπάθειά μας να απλοποιήσουμε τη μελέτη της κίνησης των σωμάτων, αντιμετωπίσαμε ως τώρα τα σώματα ως **υλικά σημεία**. Το υλικό σημείο ορίζεται ως σώμα που έχει όλες τις άλλες ιδιότητες της ύλης εκτός από διαστάσεις. Ένα υλικό σημείο, μη έχοντας διαστάσεις, έχει τη δυνατότητα να εκτελεί μόνο μεταφορικές κινήσεις.

Στην πραγματικότητα όλα τα σώματα έχουν διαστάσεις και γι' αυτό, εκτός από το να εκτελούν μεταφορική κίνηση, μπορούν να αλλάζουν προσανατολισμό στο χώρο, να εκτελούν δηλαδή περιστροφική (στροφική) ή, ακόμη, σύνθετη κίνηση, δηλαδή συνδυασμό μεταφορικής και στροφικής κίνησης.

Αν σε κάποιο στερεό σώμα ασκηθούν δυνάμεις το σώμα παραμορφώνεται, λίγο ή πολύ και μόνιμα ή προσωρινά. Τα υποθετικά στερεά που δεν παραμορφώνονται όταν τους ασκούνται δυνάμεις λέγονται **μηχανικά στερεά**.

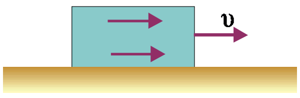
Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τη μελέτη της ισορροπίας και της κίνησης μηχανικών στερεών. Όπου αναφερόμαστε σε στερεό θα εννοούμε μηχανικό στερεό.

4.2. Οι Κινήσεις των Στερεών Σωμάτων

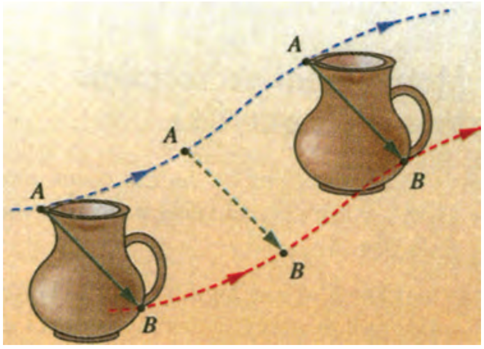
Ένα στερεό σώμα μπορεί να κάνει μεταφορική, στροφική και σύνθετη κίνηση.

Στη μεταφορική κίνηση κάθε στιγμή όλα τα σημεία του σώματος έχουν την ίδια ταχύτητα. Παράδειγμα τέτοιας κίνησης είναι η κίνηση ενός κιβωτίου που ολισθαίνει πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Στη μεταφορική κίνηση των στερεών ισχύουν οι νόμοι που διέπουν την κίνηση των υλικών σημείων.

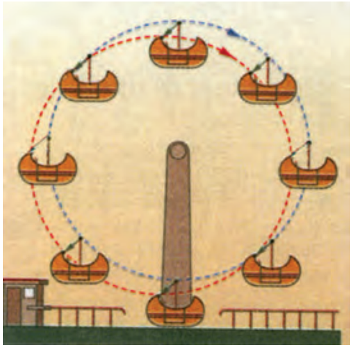
Μεταφορική μπορεί να είναι και μια καμπυλόγραμμη κίνηση. Το σώμα του σχήματος 4.2α κάνει μεταφορική κίνηση αν η ταχύτητα του σημείου A είναι ίση με την ταχύτητα του σημείου B. Αυτό είναι δυνατό. Όταν ένα στερεό κάνει μεταφορική κίνηση, το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο τυχαία σημεία του μετατοπίζεται παράλληλα προς τον εαυτό του. Μεταφορική είναι και η κίνηση που εκτελούν οι θαλαμίσκοι στον τροχό του λούνα πάρκ (σχ. 4.2β).



Το κιβώτιο εκτελεί μεταφορική κίνηση. Όλα του τα σημεία έχουν την ίδια ταχύτητα.
Σχήμα 4-1.



(α)



(β)

(α) Η τροχιά κάθε σημείου είναι καμπύλη. Η κίνηση του σώματος είναι μεταφορική αφού το ευθύγραμμο τμήμα AB παραμένει διαρκώς παράλληλο προς τον εαυτό του. (β) Ο τροχός του λούνα πάρκ κάνει στροφική κίνηση. Ωστόσο κάθε θαλαμίσκος κάνει μεταφορική κίνηση.
Σχήμα 4-2.

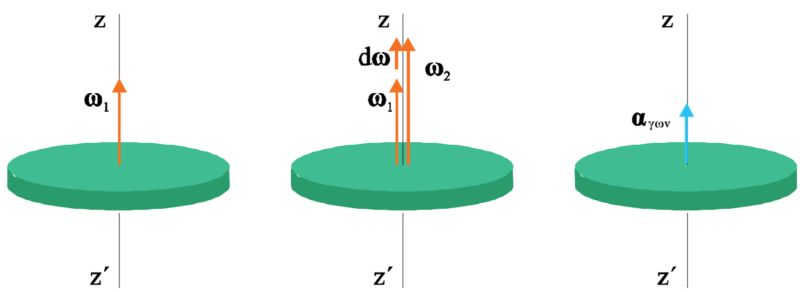
Στη στροφική κίνηση το σώμα αλλάζει προσανατολισμό. Στη στροφική κίνηση υπάρχει μια ευθεία - **ο άξονας περιστροφής** - που όλα της τα σημεία παραμένουν ακίνητα ενώ τα υπόλοιπα σημεία του σώματος κάνουν κυκλική κίνηση.

Κατάλληλο μέγεθος για να περιγράψει το πόσο γρήγορα περιστρέφεται ένα σώμα κάποια στιγμή, είναι η **γωνιακή ταχύτητα ω**. Η γωνιακή ταχύτητα είναι διάνυσμα πάνω στον άξονα περιστροφής.

Στο σώμα που στρέφεται, κάθε σημείο κινείται με γωνιακή ταχύτητα ω και γραμμική ταχύτητα που υπολογίζεται από τη σχέση $\upsilon = \omega r$, όπου r η απόστασή του από τον άξονα περιστροφής.

Αν η γωνιακή ταχύτητα ενός σώματος που περιστρέφεται είναι σταθερή θα λέμε ότι κάνει **ομαλή στροφική κίνηση**.

Ας υποθέσουμε ότι ο δίσκος του σχήματος 4.3 τη χρονική στιγμή t_1 έχει γωνιακή ταχύτητα ω_1 ενώ τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + dt$ η γωνιακή του ταχύτητα γίνεται $\omega_2 = \omega_1 + d\omega$.



(α) Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου αυξάνεται κατά $d\omega$. Ο δίσκος έχει γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}$.

Σχήμα 4-3.

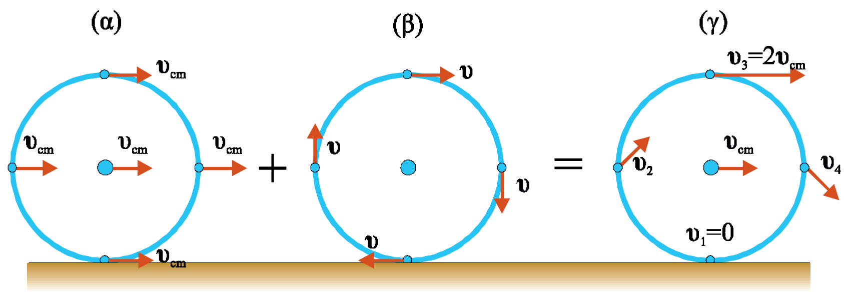
Ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας του σώματος τη στιγμή t, ονομάζεται γωνιακή επιτάχυνση του σώματος.

$$\boxed{\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt}}$$

Η γωνιακή επιτάχυνση έχει την κατεύθυνση του διανύσματος $d\omega$ και μονάδα $1\ rad/s^2$.

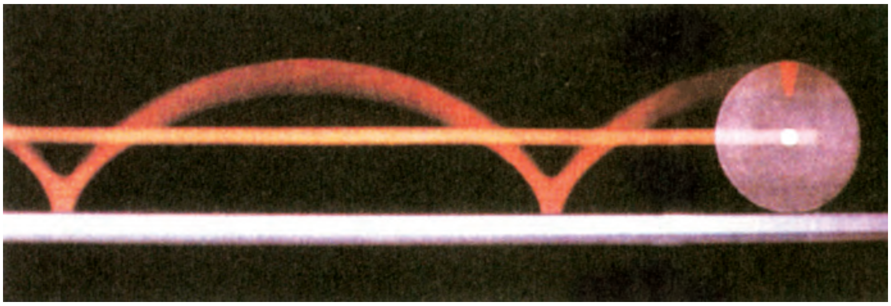
Όταν ένα σώμα μετακινείται στο χώρο και ταυτόχρονα αλλάζει ο προσανατολισμός του λέμε ότι κάνει σύνθετη κίνηση. Τέτοια κίνηση κάνει π.χ. ο τροχός ενός αυτοκινήτου, όταν κινείται το αυτοκίνητο. Όπως συμβαίνει και με το υπόλοιπο αυτοκίνητο, ο τροχός αλλάζει θέση στο χώρο (μεταφορική κίνηση) και ταυτόχρονα περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του. Σύνθετη κίνηση είναι και η κίνηση που κάνει μια ρακέτα αν κρατώντας τη από τη λαβή την πετάξουμε ψηλά. **Η σύνθετη κίνηση μπορεί να μελετηθεί ως επαλληλία μιας μεταφορικής και μιας στροφικής κίνησης**.

Το σχήμα 4.4 δείχνει ένα τροχό που κυλίεται. Η κίνησή του μπορεί να θεωρηθεί ως το αποτέλεσμα της επαλληλίας μιας μεταφορικής κίνησης, στην οποία όλα τα σημεία του τροχού, κάθε στιγμή, έχουν την ίδια ταχύτητα υ_{cm} (σχ. 4.4α) και μιας στροφικής κίνησης, γύρω από άξονα που περνάει από το κέντρο του τροχού και είναι κάθετος σ' αυτόν (σχ. 4.4β). Στη στροφική κίνηση όλα τα σημεία του τροχού που απέχουν το ίδιο από τον άξονα περιστροφής έχουν ταχύτητες με το ίδιο μέτρο υ, εφαπτόμενες στην κυκλική τους τροχιά. Η ταχύτητα κάθε σημείου του τροχού είναι η συνισταμένη της ταχύτητας $\boldsymbol{\upsilon}_{cm}$, λόγω μεταφορικής κίνησης και της $\boldsymbol{\upsilon}$ λόγω της στροφικής (σχ. 4.4γ). Όπως γνωρίζουμε για την ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}$ λόγω στροφικής κίνησης ισχύει $\upsilon = \omega R$. Θα δούμε παρακάτω ότι ισχύει και $\upsilon_{cm} = \omega R$, δηλαδή $\upsilon = \upsilon_{cm}$.



Η κύλιση του τροχού (γ) είναι επαλληλία της μεταφορικής κίνησης (α) και της στροφικής κίνησης (β). Η ταχύτητα κάθε σημείου του τροχού είναι η συνισταμένη της ταχύτητας που έχει λόγω μεταφορικής κίνησης (υ_{cm}) και της ταχύτητας λόγω περιστροφής (υ).

Σχήμα 4-4.



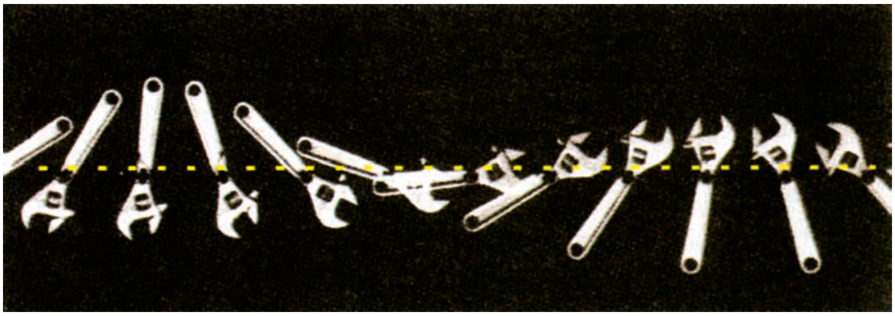
Η τροχιά ενός μικρού λαμπτήρα που τοποθετήθηκε στην περιφέρεια κυλιόμενου τροχού. Το κέντρο του τροχού κινείται ευθύγραμμα.

Εικόνα 4-1.

Το κέντρο μάζας.

Μια έννοια που απλοποιεί τη μελέτη του στερεού σώματος είναι η έννοια του **κέντρου μάζας** του σώματος.

Στην εικόνα 4.2 φαίνεται η κίνηση ενός κλειδιού πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο μετά από μία ώθηση που δέχτηκε. Η συνολική δύναμη που ασκείται στο κλειδί είναι μηδέν. Αν το κλειδί ήταν υλικό σημείο θα έκανε ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Παρατηρήστε ότι υπάρχει ένα σημείο του που κάνει ακριβώς τέτοια κίνηση. Το σημείο αυτό είναι το κέντρο μάζας του κλειδιού.



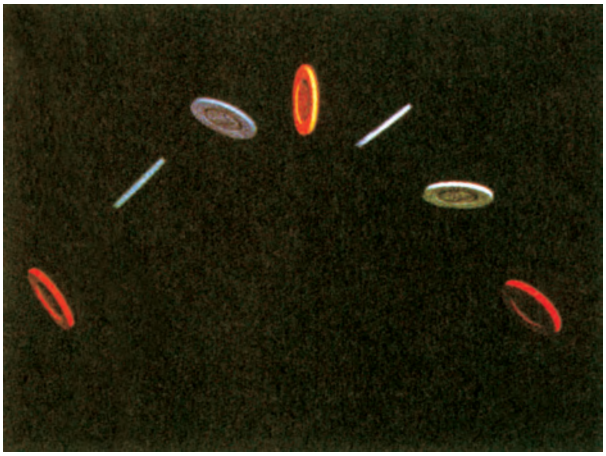
Το κλειδί της φωτογραφίας κάνει σύνθετη κίνηση. Το κέντρο μάζας του όμως κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Εικόνα 4-2.

Κέντρο μάζας (cm) ενός στερεού σώματος ονομάζεται το σημείο εκείνο που κινείται όπως ένα υλικό σημείο με μάζα ίση με τη μάζα του σώματος, αν σε αυτό ασκούνταν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.

Το κέντρο μάζας ομογενών και συμμετρικών σωμάτων συμπίπτει με το κέντρο συμμετρίας τους. Π.χ. το κέντρο μάζας ενός κύβου είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του, το κέντρο μάζας μιας σφαίρας είναι το κέντρο της σφαίρας.

Το κέντρο μάζας ενός σώματος μπορεί να βρίσκεται και έξω από το σώμα. Τέτοια είναι η περίπτωση ισοπαχούς ομογενούς δακτυλίου, το κέντρο μάζας του οποίου βρίσκεται στο κέντρο του. Αν ένα σώμα βρίσκεται μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας το κέντρο μάζας του συμπίπτει με το κέντρο βάρους, το σημείο δηλαδή από το οποίο περνάει πάντα το βάρος του σώματος, όπως και να τοποθετηθεί.



Το κέντρο μάζας του δίσκου κινείται όπως ένα υλικό σημείο που βάλλεται πλάγια.

Εικόνα 4-3.

Η κύλιση του τροχού

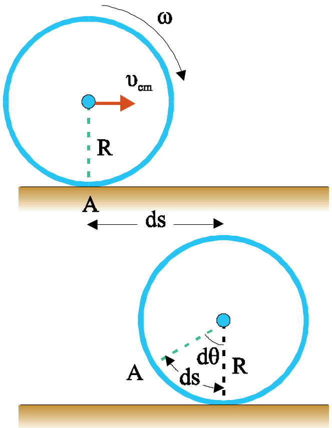
Ας επανέλθουμε στην κύλιση του τροχού (σχ. 4.5). Κατά την κύλιση κάθε σημείο του τροχού έρχεται διαδοχικά σε επαφή με το δρόμο. Έτσι, όταν ο τροχός σε χρόνο dt μετακινηθεί κατά ds, ένα σημείο A της περιφέρειας του θα έχει στραφεί κατά τόξο μήκους ds, στο οποίο αντιστοιχεί η επίκεντρη γωνία $d\theta$. Η ταχύτητα υ_{cm} του κέντρου μάζας του τροχού είναι

$$\upsilon_{cm} = \frac{ds}{dt} \qquad (4.1)$$

όμως $d\theta = \dfrac{ds}{R}$ ή $ds = R\,d\theta$

αντικαθιστώντας στην (4.1) έχουμε $\upsilon_{cm} = R\dfrac{d\theta}{dt}$ και, επειδή $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega$,

τελικά παίρνουμε $\boxed{\upsilon_{cm} = \omega R}$



Όταν το κέντρο μάζας του τροχού μετακινηθεί κατά ds, κάθε σημείο στην περιφέρειά του στρέφεται κατά το ίδιο τόξο.

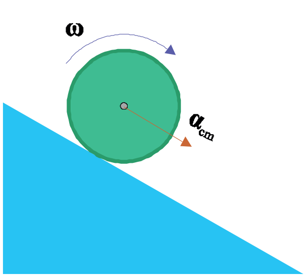
Σχήμα 4-5.

Έστω ένας τροχός που κυλίεται πάνω σε πλάγιο επίπεδο (σχ. 4.6). Η γωνιακή ταχύτητα του τροχού αυξάνεται, δηλαδή έχει γωνιακή επιτάχυνση. Το κέντρο μάζας του τροχού εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Αν η ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού κάποια στιγμή είναι υ_{cm}, θα ισχύει

$$\upsilon_{cm} = \omega R \quad \text{οπότε} \quad \frac{d\upsilon_{cm}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}R \quad \text{και τελικά}$$

$$\boxed{a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R}$$

όπου a_{cm} η επιτάχυνση του κέντρου μάζας και $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ η γωνιακή επιτάχυνση περιστροφής του τροχού.



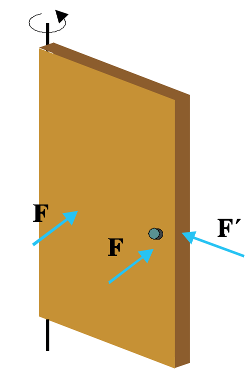
Στον τροχό που κυλάει: $a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$

Σχήμα 4-6.

4.3. Ροπή Δύναμης

Αν ασκήσουμε μια δύναμη σε ένα σώμα που έχει τη δυνατότητα να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα το σώμα περιστρέφεται εκτός αν ο φορέας της δύναμης περνάει από τον άξονα περιστροφής. Από την εμπειρία μας γνωρίζουμε ότι η περιστροφή που προκαλεί μια δύναμη εξαρτάται όχι μόνο από την κατεύθυνση και το μέγεθος της δύναμης αλλά και από το σημείο στο οποίο ασκείται η δύναμη. Για να κλείσουμε μια πόρτα τη σπρώχνουμε κοντά στο πόμολο και όχι κοντά στον άξονα περιστροφής της (μεντεσέδες), γιατί ακόμα και μικρή δύναμη μπορεί να προκαλέσει στροφή της πόρτας όταν εφαρμόζεται μακριά από τον άξονα περιστροφής.

Το μέγεθος το οποίο περιγράφει την ικανότητα μιας δύναμης να στρέφει ένα σώμα ονομάζεται **ροπή της δύναμης** και συμβολίζεται με το ελληνικό τ.



Η ίδια δύναμη περιστρέφει την πόρτα πιο εύκολα όταν ασκείται μακριά από τον άξονα περιστροφής. Η **F΄** *που ο φορέας της διέρχεται από τον άξονα δε μπορεί να περιστρέψει το σώμα.*
Σχήμα 4-7.

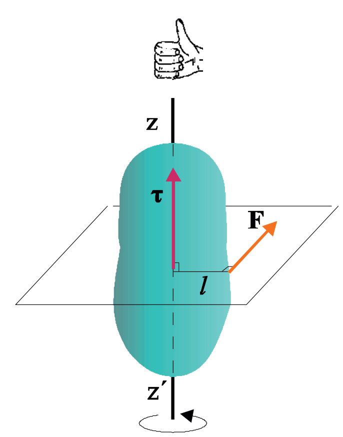
Α) Ροπή δύναμης ως προς άξονα

Έστω ένα σώμα που έχει τη δυνατότητα να στρέφεται γύρω από τον άξονα $z'z$. Στο σώμα ασκείται δύναμη $\mathbf{F}$ που βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής.

Ροπή της δύναμης $\mathbf{F}$, ως προς τον άξονα περιστροφής ονομάζεται το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί την κάθετη απόσταση l της δύναμης από τον άξονα περιστροφής (μοχλοβραχίονας).

$$\boxed{\tau = Fl}$$

Η ροπή έχει τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής και η φορά της δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Μονάδα ροπής είναι το $1\ \mathrm{N\,m}$.



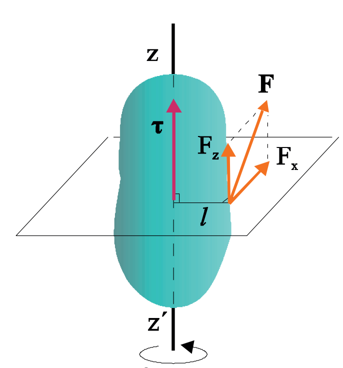
Η φορά της ροπής της δύναμης **F** *βρίσκεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού.*
Σχήμα 4-8.

Για να προσδιορίσουμε τη φορά της ροπής κλείνουμε τα δάχτυλα του δεξιού χεριού και τα τοποθετούμε έτσι ώστε να δείχνουν τη φορά κατά την οποία τείνει να περιστρέψει το σώμα η δύναμη. Ο αντίχειρας τότε δίνει τη φορά του διανύσματος της ροπής.

Αν η δύναμη $\mathbf{F}$ δε βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής, η ροπή της είναι ίση με τη ροπή που δημιουργεί η συνιστώσα της που βρίσκεται πάνω στο κάθετο επίπεδο (σχ. 4.9)

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε μόνο περιπτώσεις στις οποίες όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

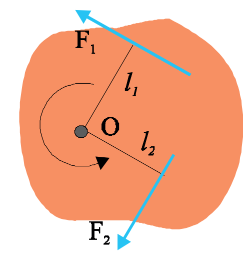
Σε τέτοια προβλήματα, για να περιγράψουμε την τάση μιας δύναμης να περιστρέψει ένα σώμα προς τη μια ή την άλλη φορά, χρησιμοποιούμε την αλγεβρική τιμή της ροπής. Κατά σύμβαση θεωρούμε θετική τη ροπή της δύναμης που τείνει να περιστρέψει το σώμα αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού και αρνητική τη ροπή της δύναμης που τείνει να το περιστρέψει κατά τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.



Η ροπή της δύναμης **F** *έχει μέτρο* $F_x\, l$
Σχήμα 4-9.

Στο σώμα του σχήματος 4.10 δρουν οι δυνάμεις $\mathbf{F}_1$ και $\mathbf{F}_2$. Το σώμα έχει τη δυνατότητα να στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το σημείο O και είναι κάθετος στο επίπεδο της σελίδας. Η συνολική ροπή που δέχεται το σώμα είναι

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = F_1 l_1 - F_2 l_2$$



Στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις $\mathbf{F}_1$ *και* $\mathbf{F}_2$*. Η φορά περιστροφής του σώματος καθορίζεται από το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών.*

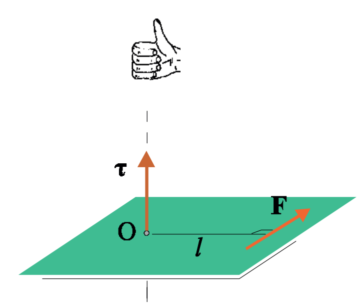
Σχήμα 4-10.

Β) Ροπή δύναμης ως προς σημείο

Αν σ' ένα ελεύθερο σώμα ασκηθεί δύναμη που ο φορέας της διέρχεται από το κέντρο μάζας του, το σώμα δεν περιστρέφεται (θα εκτελέσει μεταφορική κίνηση). Αν όμως ο φορέας της δύναμης δε διέρχεται από το κέντρο μάζας του, το σώμα μαζί με τη μεταφορική κίνηση θα εκτελέσει και περιστροφική γύρω από ένα νοητό άξονα (ελεύθερος άξονας) που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζεται από τη δύναμη και το κέντρο μάζας του σώματος.

Μπορείτε να διαπιστώσετε τα παραπάνω με ένα μολύβι που βρίσκεται πάνω σε ένα τραπέζι. Ωθώντας το μολύβι στο κέντρο μάζας του, το μολύβι κάνει μόνο μεταφορική κίνηση. Αν όμως ασκήσετε δύναμη στη μια του άκρη (ο φορέας της δεν πρέπει να διέρχεται από το κέντρο μάζας του) τότε το μολύβι στρέφεται γύρω από έναν νοητό άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και ταυτόχρονα μετακινείται. Η μεταφορική κίνηση μπορεί να μην είναι εμφανής αν η τριβή ανάμεσα στο μολύβι και το τραπέζι είναι σημαντική .

Στις περιπτώσεις που δεν υπάρχει σταθερός άξονας περιστροφής χρησιμοποιείται η έννοια της ροπής της δύναμης ως προς σημείο.



Προσδιορισμός της φοράς της ροπής δύναμης ως προς σημείο με τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Σχήμα 4-11.

Ροπή δύναμης $\mathbf{F}$ ως προς σημείο O ονομάζουμε το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί την απόστασή της από το σημείο O

$$\boxed{\tau = F\, l}$$

διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από τη δύναμη και το σημείο O και φορά που δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

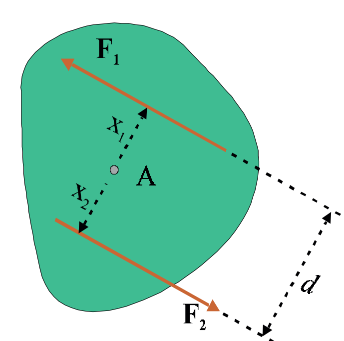
Αξιοσημείωτη είναι η περίπτωση που σε ένα σώμα δρουν δύο αντίρροπες δυνάμεις $\mathbf{F}_1$ και $\mathbf{F}_2$ με ίσα μέτρα. Δυο τέτοιες δυνάμεις αποτελούν **ζεύγος δυνάμεων**. Αν η απόσταση των φορέων των δυο δυνάμεων είναι d, η αλγεβρική τιμή της ροπής του ζεύγους ως προς κάποιο σημείο A (σχ. 4.12) που απέχει απόσταση x_1 από τη δύναμη $\mathbf{F}_1$ και x_2 από την $\mathbf{F}_2$, είναι

$$\tau = F_1 x_1 + F_2 x_2 = F_1\left(x_1 + x_2\right) = F_1 d$$

επομένως

$$\boxed{\tau = F_1 d}$$

Το ίδιο αποτέλεσμα θα είχαμε και ως προς οποιοδήποτε άλλο σημείο. Επομένως, **η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο**.

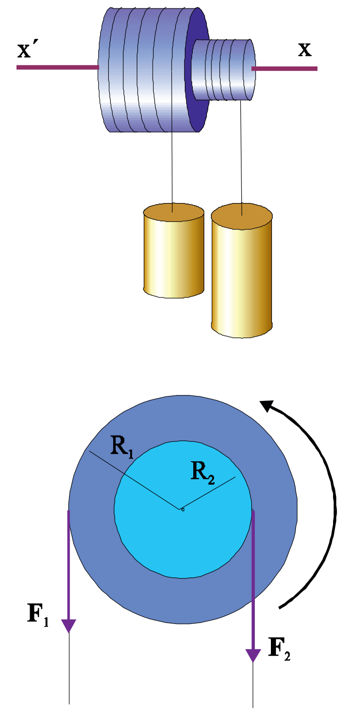


Οι δυνάμεις $\mathbf{F}_1$ *και* $\mathbf{F}_2$ *αποτελούν ζεύγος. Η ροπή τους είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου τους.*

Σχήμα 4-12.

Παράδειγμα 4.1

Το στερεό του σχήματος 4.13 αποτελείται από δύο ομοαξονικούς κυλίνδρους, με ακτίνες $R_1 = 4$ cm και $R_2 = 3$ cm, που στέφονται γύρω από σταθερό άξονα $x'x$. Ο άξονας $x'x$ συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας των κυλίνδρων. Εξ αιτίας των βαρών που κρέμονται από τους δύο κυλίνδρους, τα σκοινιά ασκούν στους κυλίνδρους δυνάμεις $F_1 = 6$ N και $F_2 = 10$ N. Να υπολογίσετε την ολική ροπή που δέχεται το στερεό.



Σχήμα 4-13.

Απάντηση:

Η δύναμη $\mathbf{F_1}$ τείνει να στρέψει το στερεό κατά τη θετική φορά και δημιουργεί θετική ροπή $\tau_1 = F_1\ R_1$.

Η δύναμη $\mathbf{F_2}$ τείνει να το στρέψει κατά την αρνητική φορά και δημιουργεί ροπή $\tau_2 = -F_2\ R_2$.

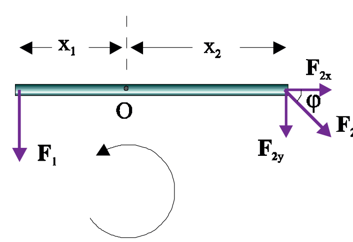
Η συνολική ροπή που δέχεται το στερεό είναι

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = F_1 R_1 - F_2 R_2 = -0,06\ N \cdot m$$

Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι το στερεό θα στραφεί όπως στρέφονται οι δείκτες του ρολογιού.

Παράδειγμα 4.2

Η αβαρής ράβδος του σχήματος 4.14 μπορεί να στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο και είναι κάθετος σε αυτή. Το Ο απέχει από τα άκρα της ράβδου $x_1 = 5$ cm και $x_2 = 8$ cm. Στα άκρα της ράβδου ασκούνται οι δυνάμεις $F_1 = 50$ N και $F_2 = 40$ N. Η δύναμη F_2 σχηματίζει γωνία $\varphi = 30°$ με τη ράβδο. Πόση είναι η ολική ροπή που δέχεται η ράβδος;



Σχήμα 4-14.

Απάντηση :

Η ροπή της F_1 είναι θετική γιατί η δύναμη τείνει να στρέψει τη ράβδο κατά τη θετική φορά. Είναι

$$\tau_1 = F_1 x_1 = 2,5 Nm$$

Για να υπολογίσουμε τη ροπή της $\mathbf{F_2}$ την αναλύουμε στις συνιστώσες $\mathbf{F_{2x}}$ και $\mathbf{F_{2y}}$ με μέτρα $F_{2x} = F_2\ \sigma\upsilon\nu 30^\circ$ και $F_{2y} = F_2\ \eta\mu 30^\circ$. Η ροπή της $\mathbf{F_{2x}}$ είναι μηδέν διότι ο φορέας της διέρχεται από τον άξονα (η απόσταση της $\mathbf{F_{2x}}$ από τον άξονα είναι μηδέν), ενώ η ροπή της $\mathbf{F_{2y}}$ είναι αρνητική και ίση με

$$\tau_2 = -F_2\ \eta\mu 30^\circ x_2 = -1,6 Nm.$$

Η συνολική ροπή που δέχεται η ράβδος είναι

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = 0,9 Nm.$$

Η συνολική ροπή είναι θετική, επομένως η ράβδος θα στραφεί αντίθετα με τη φορά της κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

4.4. Ισορροπία Στερεού Σώματος

Ας δούμε με ποιες προϋποθέσεις ισορροπεί ένα αρχικά ακίνητο στερεό στο οποίο ασκούνται δυνάμεις.

Αν το στερεό έχει σταθερό άξονα μπορεί να κάνει μόνο στροφική κίνηση. Επομένως, για να ισορροπεί, αρκεί η συνισταμένη των ροπών ως προς τον άξονα να είναι μηδέν.

Ένα ελεύθερο στερεό, όμως, μπορεί να εκτελέσει και μεταφορική και στροφική κίνηση. Αν η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα είναι μηδέν το σώμα δε θα εκτελέσει μεταφορική κίνηση. Αυτό όμως δεν εξασφαλίζει ότι δε θα στραφεί. Αν υπάρχουν ροπές το σώμα θα στραφεί. Όταν η συνισταμένη δύναμη είναι μηδέν, αν υπάρχουν ροπές, αυτές θα οφείλονται σε ζεύγη δυνάμεων. Η ροπή ζεύγους, όμως, είναι ίδια ως προς όλα τα σημεία. Επομένως, για να μη στραφεί το σώμα θα πρέπει η συνισταμένη ροπή να είναι μηδέν ως προς ένα οποιοδήποτε σημείο (τότε θα είναι μηδέν και ως προς κάθε άλλο).

Επομένως **για να ισορροπεί ένα αρχικά ακίνητο στερεό σώμα στο οποίο ασκούνται πολλές ομοεπίπεδες δυνάμεις θα πρέπει πρώτον η συνισταμένη δύναμη να είναι μηδέν**

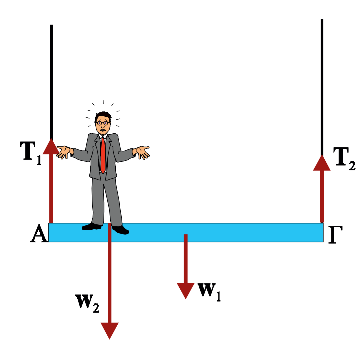
$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \quad \text{ή} \quad \boxed{\begin{matrix} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{matrix}}$$

και δεύτερον το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς οποιοδήποτε σημείο να είναι μηδέν

$$\boxed{\Sigma \tau = 0}$$

Παράδειγμα 4.3

Ομογενής οριζόντια δοκός ΑΓ που έχει μήκος $l = 4m$ και βάρος $w_1 = 200N$, κρέμεται από δύο κατακόρυφα σκοινιά που είναι δεμένα στα άκρα της και ισορροπεί. Πάνω στη δοκό και σε απόσταση $x = 1m$ από το άκρο της στέκεται άνθρωπος βάρους $w_2 = 600\ N$. Ποια είναι τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούν τα σκοινιά στη δοκό;



Σχήμα 4-15.

Απάντηση :

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό είναι το βάρος της (w_1), η δύναμη που δέχεται από τον άνθρωπο - είναι ίση με το βάρος του w_2 - και οι δυνάμεις T_1 και T_2 από τα σκοινιά.

Εφόσον η ράβδος ισορροπεί η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \quad \text{επομένως} \quad T_1 + T_2 - w_1 - w_2 = 0 \qquad (4.2)$$

και το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων, ως προς οποιοδήποτε σημείο είναι επίσης μηδέν. Οι υπολογισμοί μας απλουστεύονται αν οι ροπές αναφέρονται σε σημείο από το οποίο περνάει μία από τις άγνωστες δυνάμεις. Επιλέγουμε το σημείο Α.

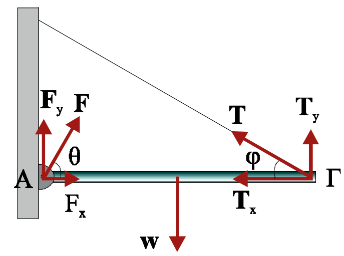
$$\Sigma\tau_A = 0 \text{, άρα } T_2 l - w_1\frac{l}{2} - w_2 x = 0,$$

από όπου προκύπτει ότι $T_2 = \dfrac{w_1 l + 2w_2 x}{2l} = 250\,N$

Αντικαθιστώντας στην (4.2) βρίσκουμε $T_1 = 550N$

Παράδειγμα 4.4

Ομογενής δοκός ΑΓ, μήκους l και βάρους $w = 400$ N, ισορροπεί οριζόντια. Το άκρο Α της δοκού στηρίζεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο. Το άλλο άκρο της Γ συνδέεται με τον τοίχο με σκοινί που σχηματίζει γωνία $\varphi = 30°$ με τη δοκό. Να βρείτε τις δυνάμεις που δέχεται η δοκός από το σκοινί και από την άρθρωση.



Σχήμα 4-16.

Απάντηση :

Αναλύουμε όλες τις δυνάμεις σε μια οριζόντια και μια κατακόρυφη διεύθυνση.

$$T_x = T\,\sigma\upsilon\nu 30^\circ \text{ και } T_y = T\,\eta\mu 30^\circ$$

Εφόσον η ράβδος ισορροπεί

$$\Sigma F_x = 0 \text{ ή } T\,\sigma\upsilon\nu 30^\circ = F_x \qquad (4.3)$$

$$\Sigma F_y = 0 \text{ ή } T\,\eta\mu 30^\circ + F_y = w \qquad (4.4)$$

Επίσης $\Sigma\tau = 0$ ως προς οποιοδήποτε σημείο
Υπολογίζουμε το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς το σημείο Α

$$T\,\eta\mu 30^\circ\, l - w\frac{l}{2} = 0 \qquad (4.5)$$

Οι δυνάμεις F_x F_y και T_x έχουν μηδενικές ροπές ως προς το σημείο Α.
Από τη σχέση (4.5) προκύπτει

$$2T\,\eta\mu 30^\circ = w \text{ επομένως } T = 400N \qquad (4.6)$$

Από την (4.3) λαμβάνοντας υπόψη την (4.6) έχουμε

$$F_x = 200\sqrt{3}\,N$$

και από την (4.4)

$$F_y = 200N$$

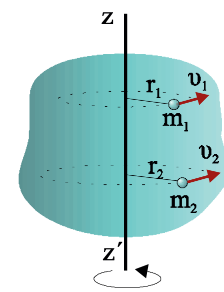
Επομένως η δύναμη **F** έχει μέτρο $F = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2} = 400N$

και σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία θ για την οποία

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ άρα } \theta = 30^\circ$$

4.5. Ροπή Αδράνειας

Έστω ένα στερεό το οποίο στρέφεται γύρω από το σταθερό άξονα zz' (σχ.4.17). Χωρίζουμε το σώμα σε στοιχειώδη τμήματα με μάζες m_1, m_2 ...., τόσο μικρά ώστε καθένα από αυτά να μπορεί να θεωρηθεί υλικό σημείο. Οι μάζες m_1, m_2... κινούνται κυκλικά γύρω από τον άξονα, σε κύκλους ακτίνων r_1,r_2 ...



Το στερεό μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από στοιχειώδη τμήματα.

Σχήμα 4-17.

Ονομάζουμε ροπή αδράνειας ενός στερεού ως προς κάποιο άξονα το άθροισμα των γινομένων των στοιχειωδών μαζών από τις οποίες αποτελείται το σώμα επί τα τετράγωνα των αποστάσεών τους από τον άξονα περιστροφής.

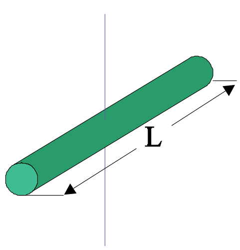
$$\boxed{I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + ...}$$

Η ροπή αδράνειας είναι μονόμετρο μέγεθος και έχει μονάδα το $1\ kg\ m^2$.

Ο υπολογισμός της ροπής αδράνειας ενός σώματος συνήθως δεν είναι εύκολος.

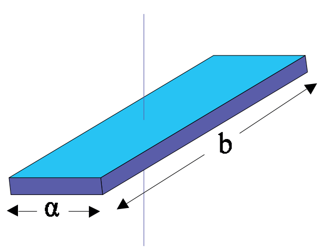
Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται οι ροπές αδράνειας κάποιων σωμάτων ως προς έναν από τους άπειρους άξονες που διέρχονται από το κέντρο μάζας τους. Ο συγκεκριμένος άξονας για κάθε σώμα εικονίζεται στο σχήμα.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕ ΤΙΣ ΡΟΠΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ ΩΣ ΠΡΟΣ ΑΞΟΝΑ ΠΟΥ ΔΙΕΡΧΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ



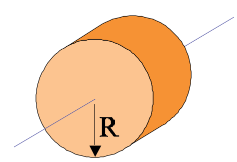
(α) Λεπτή ράβδος

$$I = \frac{1}{12} ML^2$$



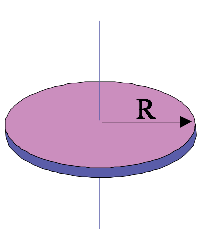
(β) Ορθογώνια πλάκα

$$I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$$



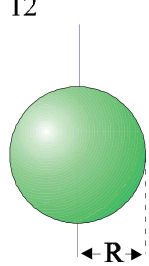
(γ) Συμπαγής κύλινδρος

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$



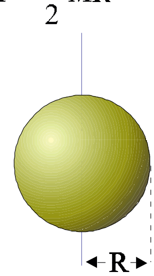
(δ) Δίσκος

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$



(ε) Σφαιρικος φλοιός

$$I = \frac{2}{3} MR^2$$



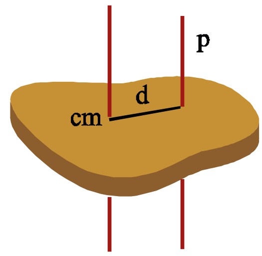
(στ) Συμπαγής σφαίρα

$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

Μεταξύ της ροπής αδράνειας I_{cm} ενός σώματος ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και της ροπής αδράνειας I_p ως προς οποιοδήποτε άλλο άξονα p, παράλληλο με τον πρώτο σε απόσταση d από αυτόν, υπάρχει μια απλή σχέση, γνωστή ως το **θεώρημα παραλλήλων αξόνων** ή **θεώρημα Steiner** (Στάινερ).

Αν I_{cm} η ροπή αδράνειας ενός σώματος μάζας M, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας, η ροπή αδράνειάς του ως προς ένα άξονα που είναι παράλληλος και απέχει απόσταση d από τον πρώτο είναι ίση με το άθροισμα της ροπής αδράνειας ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος και του γινομένου της μάζας του σώματος επί το τετράγωνο της απόστασης d.

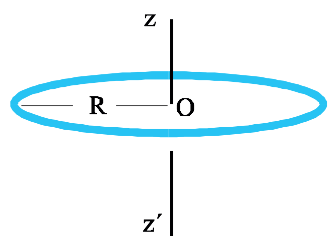
$$\boxed{I_p = I_{cm} + Md^2}$$



Το θεώρημα παραλλήλων αξόνων δίνει τη ροπή αδράνειας ως προς τυχαίο άξονα που απέχει απόσταση d από το κέντρο μάζας.
Σχήμα 4-18.

Παράδειγμα 4.5

Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας ομογενούς δακτυλίου μάζας M και ακτίνας R, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζει. Το πάχος του δακτυλίου είναι αμελητέο σε σχέση με την ακτίνα του.



Σχήμα 4-19.

Απάντηση :

Θεωρούμε ότι ο δακτύλιος αποτελείται από τις στοιχειώδεις μάζες m_1, m_2 .... Είναι φανερό ότι $m_1 + m_2 + ... = M$

Επειδή το πάχος του δακτυλίου είναι αμελητέο σε σχέση με την ακτίνα του R, όλες οι στοιχειώδεις μάζες έχουν την ίδια απόσταση R από τον άξονα περιστροφής.

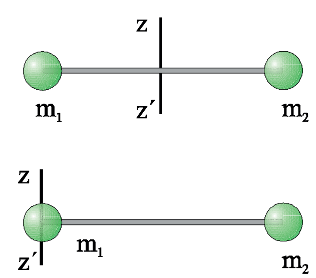
Σύμφωνα με τον ορισμό της ροπής αδράνειας

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + ... = m_1 R^2 + m_2 R^2 + ... = \left(m_1 + m_2 + ...\right) R^2$$

Άρα $$I = MR^2$$

Παράδειγμα 4.6

Δυο σώματα αμελητέων διαστάσεων, με ίσες μάζες m_1 και m_2, ($m_1 = m_2 = m$), συνδέονται μεταξύ τους με αβαρή ράβδο, μήκους l. Ποια είναι η ροπή αδράνειας του συστήματος, ως προς άξονα που είναι κάθετος στη ράβδο και διέρχεται α) από το μέσον της ράβδου β) από τη μάζα m_1;



Σχήμα 4-20.

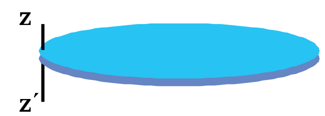
Απάντηση :

α) $I = m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2 = 2m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{2}$

β) $I = m_1 l^2 + 0 = m l^2$

Παράδειγμα 4.7

Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας ενός λεπτού ομογενούς δίσκου, μάζας M και ακτίνας R, ως προς άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδό του, που περνάει από το άκρο του δίσκου.



Σχήμα 4-21.

Απάντηση :

Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας του είναι

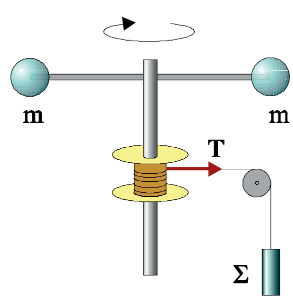
$$I_{cm} = MR^2 / 2$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα παραλλήλων αξόνων για $d = R$ έχουμε

$$I_p = I_{cm} + Md^2 = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3MR^2}{2}$$

4.6. Θεμελιώδης Νόμος της Στροφικής Κίνησης

Στην περίπτωση ενός υλικού σημείου, από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής $\Sigma \mathbf{F} = m\boldsymbol{\alpha}$ προκύπτει ότι για να μεταβληθεί η ταχύτητά του πρέπει να ασκηθεί σε αυτό δύναμη. Αντίστοιχος νόμος ισχύει στη στροφική κίνηση στερεών σωμάτων. Σύμφωνα με αυτόν, για να μεταβληθεί η γωνιακή ταχύτητα ενός σώματος που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα πρέπει να ασκηθεί σ' αυτό ροπή. Η σχέση ανάμεσα στην αιτία (ροπή) και το αποτέλεσμα (μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας) είναι



Το σώμα Σ, μέσω του σκοινιού, ασκεί ροπή στον άξονα περιστροφής με αποτέλεσμα η γωνιακή ταχύτητα των μαζών m να αυξάνεται.
Σχήμα 4-22.

$$\boxed{\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu}} \qquad (4.7)$$

Η παραπάνω σχέση είναι γνωστή ως **ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης**, δηλαδή,

το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δρουν πάνω σε ένα στερεό σώμα το οποίο περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα ισούται με το γινόμενο της ροπής αδράνειας (υπολογισμένης ως προς τον άξονα περιστροφής) και της γωνιακής επιτάχυνσης του σώματος.

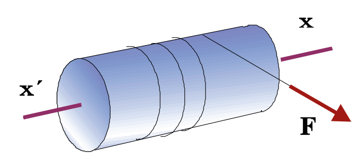
Από τη σχέση (4.7) φαίνεται ότι όσο μεγαλύτερη είναι η ροπή αδράνειας ενός σώματος τόσο πιο δύσκολα αλλάζει η περιστροφική κατάσταση του σώματος. **Η ροπή αδράνειας** εκφράζει στην περιστροφή, ό,τι εκφράζει η μάζα στη μεταφορική κίνηση, δηλαδή **την αδράνεια του σώματος στη στροφική κίνηση**. Ενώ όμως η μάζα ενός σώματος είναι σταθερό μέγεθος, η ροπή αδράνειας εξαρτάται κάθε φορά από τη θέση του άξονα περιστροφής.

Αν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών είναι μηδέν, από τη σχέση (4.7) προκύπτει ότι και η γωνιακή επιτάχυνση του σώματος είναι μηδέν, επομένως το σώμα διατηρεί την προηγούμενη περιστροφική του κατάσταση, δηλαδή αν το σώμα είναι ακίνητο θα εξακολουθήσει να ηρεμεί, ενώ αν στρέφεται θα συνεχίσει να στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

Μέχρι τώρα αναφερθήκαμε σε στροφικές κινήσεις γύρω από σταθερό άξονα περιστροφής. Τα συμπεράσματά μας για την κίνηση αυτή μπορούν να επεκταθούν και στις περιπτώσεις που ο άξονας περιστροφής μετατοπίζεται. Αυτό συμβαίνει στις σύνθετες κινήσεις, στις οποίες το σώμα κάνει ταυτόχρονα μεταφορική και στροφική κίνηση, όπως στην κίνηση ενός τροχού που κυλάει. Ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης ισχύει και στις περιπτώσεις αυτές, αρκεί ο άξονας γύρω από τον οποίο περιστρέφεται το σώμα να διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος, να είναι άξονας συμμετρίας και να μην αλλάζει κατεύθυνση κατά τη διάρκεια της κίνησης.

Παράδειγμα 4.8

Ομογενής κύλινδρος μάζας $M = 40$ kg και ακτίνας $R = 40$ cm, μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον άξονά του που είναι σταθερός. Στην επιφάνεια του κυλίνδρου έχουμε τυλίξει σκοινί, το ελεύθερο άκρο του οποίου έλκεται με σταθερή δύναμη $F = 6$ N. Το σκοινί ξετυλίγεται, χωρίς ολίσθηση, περιστρέφοντας ταυτόχρονα τον κύλινδρο. Ποια είναι η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου;
Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$.



Σχήμα 4-23.

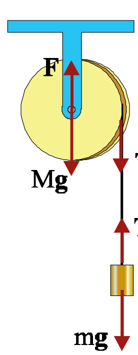
Απάντηση :

Η δύναμη που ασκεί το σκοινί στον κύλινδρο προκαλεί ροπή $\tau = FR$
Σύμφωνα με το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης $\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$ ή
$FR = \frac{1}{2}MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu}$
Λύνοντας ως προς α και αντικαθιστώντας τις τιμές των μεγεθών βρίσκουμε

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2F}{MR} = \frac{2 \cdot 6N}{40kg \cdot 40 \cdot 10^{-2}\,m} = 0,75\ rad/s^2$$

Παράδειγμα 4.9

Μία τροχαλία ακτίνας R, και ροπής αδράνειας I μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της, όπως φαίνεται στο σχήμα. Γύρω από την τροχαλία έχουμε τυλίξει αβαρές νήμα στην ελεύθερη άκρη του οποίου κρέμεται σώμα μάζας m. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σώματος, τη γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας και την τάση του νήματος.



Σχήμα 4-24.

Απάντηση :

Θα εφαρμόσουμε τους νόμους της μηχανικής χωριστά σε κάθε σώμα. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα m, είναι το βάρος του mg και η τάση του νήματος **T**.

Σύμφωνα με το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής $mg - T = ma$ **(4.8)**

Στον τροχό ασκούνται η **T** (από το νήμα), η δύναμη **F** (από τον άξονα) και το βάρος του ***Mg***.

Οι δυνάμεις ***Mg*** και **F** δε δημιουργούν ροπή γιατί ο φορέας τους περνάει από τον άξονα περιστροφής. Ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής για τη στροφική κίνηση δίνει

$$\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad ή \quad TR = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \qquad (4.9)$$

Λύνοντας την (4.8) ως προς T έχουμε $\quad T = mg - ma$

Αντικαθιστώντας στην (4.9) $\quad mgR - mRa = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \qquad$ **(4.10)**

Η επιτάχυνση a του σώματος είναι ίση με το ρυθμό που αυξάνεται η ταχύτητα ενός σημείου της περιφέρειας της τροχαλίας. Για την επιτάχυνση αυτή ισχύει

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R \qquad (4.11)$$

οπότε η (4.10) γίνεται $\quad mgR - mR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$

Επομένως
$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{mgR}{I + mR^2} \qquad (4.12)$$

Αντικαθιστώντας στην (4.11) βρίσκουμε για τη γραμμική επιτάχυνση

$$a = \frac{mgR^2}{I + mR^2} \qquad (4.13)$$

Η τάση T υπολογίζεται αν αντικαταστήσουμε την (4.12) στην (4.9)

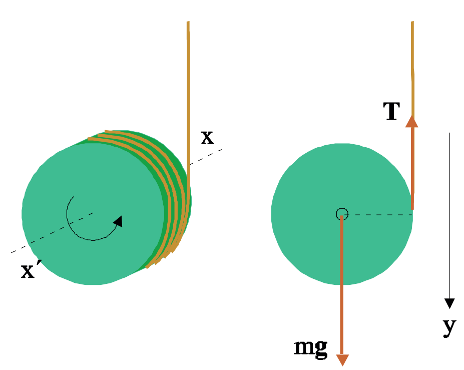
$$T = \frac{I}{R}\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{I}{R}\frac{mgR}{I + mR^2} \quad ή \quad T = \frac{I\,mg}{I + mR^2}$$

Παράδειγμα 4.10

Το γιο - γιο αποτελείται από ένα μικρό κύλινδρο, στο κυρτό μέρος του οποίου έχει τυλιχτεί πολλές φορές ένα σκοινί. Κρατώντας το ελεύθερο άκρο του σκοινιού και αφήνοντας τον κύλινδρο να πέσει, το σκοινί ξετυλίγεται και ο κύλινδρος περιστρέφεται γύρω από ένα νοητό οριζόντιο άξονα, τον xx΄.

Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου $I = \frac{1}{2}mR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g. Θεωρήστε ότι σε όλη τη διάρκεια της κίνησης του κυλίνδρου το σκοινί παραμένει κατακόρυφο.



Σχήμα 4-25.

Απάντηση :

Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο είναι το βάρος του **mg** και η δύναμη **T** από το σκοινί. Για τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου ισχύει:

$$\Sigma F_y = ma_{cm} \quad ή \quad mg - T = ma_{cm} \quad οπότε \quad T = mg - ma_{cm} \qquad (4.14)$$

Εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης ως προς τον άξονα xx' έχουμε

$$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad \text{ή} \quad TR = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \qquad (4.15)$$

Αντικαθιστώντας την (4.14) στην (4.15) βρίσκουμε

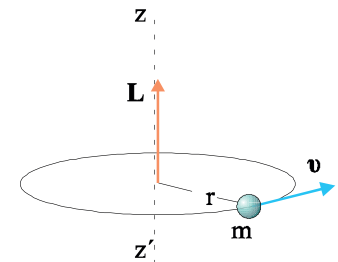
$$mgR - mRa_{cm} = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$$

ή $\quad mgR - mRa_{cm} = \frac{1}{2}mR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad$ ή $\quad g - a_{cm} = \frac{1}{2}R\alpha_{\gamma\omega\nu} \qquad (4.16)$

Όμως $\; a_{cm} = R\alpha_{\gamma\omega\nu} \;$ οπότε $\; \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{a_{cm}}{R}$

Αντικαθιστώντας στην (4.16) βρίσκουμε

$$g - a_{cm} = \frac{1}{2}a_{cm} \quad \text{ή} \quad a_{cm} = \frac{2g}{3}$$

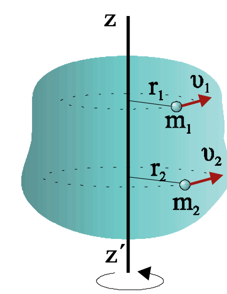


Το υλικό σημείο μάζας m κινείται κυκλικά. Η στροφορμή του είναι κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς του.
Σχήμα 4-26.

4.7. Στροφορμή

Η ορμή αποδείχτηκε μέγεθος ιδιαίτερα χρήσιμο για την περιγραφή της μεταφορικής κίνησης των στερεών. Το αντίστοιχο της ορμής του στερεού στη στροφική κίνηση το ονομάζουμε **στροφορμή**.

Θα ορίσουμε πρώτα τη στροφορμή ενός υλικού σημείου που κάνει κυκλική κίνηση, στη συνέχεια θα ορίσουμε τη στροφορμή στερεού σώματος και, τέλος, τη στροφορμή συστήματος σωμάτων.



Το στερεό μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από στοιχειώδη τμήματα με μάζες m_1 m_2 ... Κάθε μάζα εκτελεί κυκλική κίνηση γύρω από τον άξονα περιστροφής.
Σχήμα 4-27.

Α) Στροφορμή υλικού σημείου

Έστω ένα υλικό σημείο μάζας m και ορμής $\mathbf{p}$ που κινείται σε περιφέρεια κύκλου ακτίνας r (σχ. 4.26).

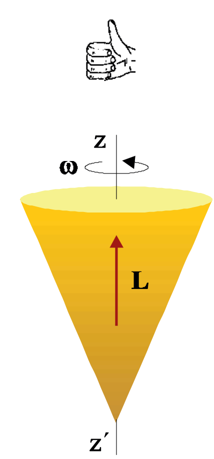
Ονομάζουμε στροφορμή του υλικού σημείου ως προς ένα άξονα z΄z που διέρχεται από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και είναι κάθετος στο επίπεδό της το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο

$$\boxed{L = pr} \quad \text{ή} \quad \boxed{L = m\upsilon r}$$

διεύθυνση αυτή του άξονα z΄z και φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Μονάδα στροφορμής είναι το $1\ \text{kg}\,\text{m}^2/\text{s}$.

Β) Στροφορμή στερεού σώματος

Έστω το στερεό του σχήματος 4.27 που περιστρέφεται γύρω από το σταθερό άξονα $z'z$ με γωνιακή ταχύτητα ω. Κατά την περιστροφή του σώματος τα διάφορα σημεία του διαγράφουν κυκλικές τροχιές τα επίπεδα των οποίων είναι κάθετα στον άξονα περιστροφής. Όλα τα σημεία περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω, η γραμμική ταχύτητά τους όμως είναι διαφορετική, και μάλιστα ανάλογη με την απόστασή τους από τον άξονα περιστροφής. Χωρίζουμε το σώμα σε στοιχειώδη τμήματα, με μάζες m_1, m_2 .... , τόσο μικρά ώστε καθένα



Ο κώνος του σχήματος περιστρέφεται γύρω από τον άξονα $z'z$ με γωνιακή ταχύτητα ω. Η στροφορμή του σώματος είναι $I\omega$, βρίσκεται πάνω στον άξονα και η φορά της δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.
Σχήμα 4-28.

από αυτά να μπορεί να θεωρηθεί υλικό σημείο. Οι στροφορμές των στοιχειωδών αυτών μαζών έχουν όλες την ίδια κατεύθυνση και μέτρα $L_1 = m_1 \upsilon_1 r_1$, $L_2 = m_2 \upsilon_2 r_2$, ... **Η στροφορμή του σώματος είναι το άθροισμα των στροφορμών των υλικών σημείων που το αποτελούν.**

$$L = m_1 \upsilon_1 r_1 + m_2 \upsilon_2 r_2 + \ldots$$

Επειδή τα υλικά σημεία m_1, m_2 ... κάνουν κυκλική κίνηση οι ταχύτητές τους υ_1, υ_2 ... μπορούν να γραφούν $\upsilon_1 = \omega r_1$, $\upsilon_2 = \omega r_2$ κ.ο.κ. οπότε

$$L = m_1 \omega r_1^2 + m_2 \omega r_2^2 + \ldots = \omega\left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots\right)$$

όμως $m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots = I$ επομένως

Η στροφορμή ενός στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από άξονα ισούται με

$$\boxed{L = I\omega} \qquad (4.17)$$

έχει τη διεύθυνση του άξονα και η φορά της ορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Στροφορμή μερικών σωμάτων	
Τροχιακή κίνηση της Γης	$2,7 \times 10^{40}$ kg m²/s
Περιστροφή της Γης	$5,8 \times 10^{33}$ kg m²/s
Τροχός αυτοκινήτου (υ = 90 km/h)	10^2 kg m²/s
Δίσκος πικ-απ (33 στροφές ανά min)	6×10^{-3} kg m²/s
Τροχιακή κίνηση ηλεκτρονίου	$1,05 \times 10^{-35}$ kg m²/s
Σπιν ηλεκτρονίου	$0,53 \times 10^{-34}$ kg m²/s

Τη στροφορμή που σχετίζεται με την περιστροφική κίνηση ενός σώματος γύρω από άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας του συχνά την ονομάζουμε **σπιν**, για να τη διακρίνουμε από τη στροφορμή που μπορεί να έχει το σώμα λόγω άλλης κίνησης. Για παράδειγμα, η Γη έχει σπιν εξαιτίας της περιστροφής της γύρω από τον άξονά της και στροφορμή εξαιτίας της κίνησής της γύρω από τον Ήλιο, δηλαδή της τροχιακής της κίνησης.

Τα στοιχειώδη σωματίδια - ηλεκτρόνια, πρωτόνια και νετρόνια - έχουν σπιν μέτρου $0,53 \times 10^{-34}$ Js. Αυτή η στροφορμή σπιν συνήθως εκφράζεται ως $\frac{1}{2}\hbar$, όπου $\hbar = 1,05 \times 10^{-34}$ Js (προφέρεται έιτς μπάρ) και είναι μια θεμελιώδης ποσότητα στροφορμής που εμφανίζεται συχνά στη κβαντική φυσική.

Γ) Στροφορμή συστήματος

Σε ένα σύστημα σωμάτων, **στροφορμή ονομάζεται το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών των σωμάτων που απαρτίζουν το σύστημα.** Εάν δηλαδή οι στροφορμές των σωμάτων του συστήματος είναι $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$, ..., η στροφορμή $\mathbf{L}$ του συστήματος είναι

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \ldots$$

Γενικότερη Διατύπωση του Θεμελιώδους Νόμου της Στροφικής Κίνησης

Από τη σχέση 4.17 προκύπτει ότι αν σε απειροστά μικρό χρόνο dt η γωνιακή ταχύτητα του στερεού μεταβληθεί κατά $d\omega$, η στροφορμή του θα μεταβληθεί κατά $dL = I\ d\omega$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει $\dfrac{dL}{dt} = I\ \dfrac{d\omega}{dt} = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$

και εξαιτίας της (4.7)

$$\boxed{\Sigma\tau = \frac{dL}{dt}} \qquad (4.18)$$

Επομένως **το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δρουν σε ένα στερεό που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, είναι ίσο με την αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του.**

Η σχέση αυτή είναι για τη στροφική κίνηση το ανάλογο του **δεύτερου νόμου του Newton**.

Ο νόμος αυτός ισχύει και σε σύστημα σωμάτων. Σε ένα σύστημα σωμάτων, το αλγεβρικό άθροισμα όλων των ροπών, δηλαδή των ροπών που οφείλονται στις εξωτερικές δυνάμεις καθώς και εκείνων που οφείλονται στις εσωτερικές δυνάμεις, είναι ίσο με το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του συστήματος.

Η ολική ροπή των εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική. Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Newton οι εσωτερικές δυνάμεις απαντούν κατά ζεύγη (δράση - αντίδραση). Σε κάθε τέτοιο ζεύγος οι δυνάμεις είναι αντίθετες. Η ροπή κάθε τέτοιου ζεύγους ως προς οποιοδήποτε σημείο είναι μηδενική και επομένως το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών όλων των εσωτερικών δυνάμεων να είναι μηδέν. Έτσι η σχέση 4.18 για σύστημα σωμάτων γράφεται

$$\Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = \frac{dL}{dt} \qquad (4.19)$$

όπου $\tau_{\varepsilon\xi}$ η ροπή μιας εξωτερικής δύναμης και L η στροφορμή του συστήματος.

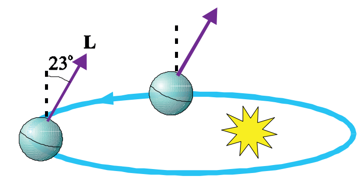
4.8. Διατήρηση της Στροφορμής

Στη στροφική κίνηση ισχύει ένας νόμος διατήρησης, ανάλογος με το νόμο διατήρησης της ορμής που ισχύει στη μεταφορική κίνηση. Το μέγεθος που διατηρείται στη στροφική κίνηση είναι η στροφορμή.

Η διατήρηση της στροφορμής σε ένα σώμα

Αν σε ένα σώμα το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών είναι μηδέν, από τη σχέση $\Sigma\tau = \frac{dL}{dt}$ προκύπτει ότι $\frac{dL}{dt} = 0$, επομένως, $L = σταθ.$ Η στροφορμή του σώματος παραμένει σταθερή.

Για παράδειγμα, κατά την περιστροφή της Γης γύρω από τον εαυτό της (ιδιοπεριστροφή), επειδή η ελκτική δύναμη που δέχεται από τον Ήλιο δε δημιουργεί ροπή, αφού ο φορέας της διέρχεται από το κέντρο μάζας της, η στροφορμή της Γης παραμένει σταθερή. Επομένως η χρονική διάρκεια περιστροφής της Γης γύρω από τον εαυτό της παραμένει σταθερή -24 ώρες.



Η στροφορμή της Γης -λόγω της ιδιοπεριστροφής της- διατηρείται σταθερή.

Σχήμα 4-29.

Η διατήρηση της στροφορμής σε σύστημα σωμάτων.

Ο δεύτερος νόμος του Newton για τη στροφική κίνηση στην περίπτωση συστήματος σωμάτων έχει τη μορφή $\Sigma\tau_{εξ} = \frac{dL}{dt}$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι αν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων στο σύστημα είναι μηδέν, η στροφορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή. Η πρόταση αυτή είναι γνωστή ως **αρχή της διατήρησης της στροφορμής**.

Εάν η συνολική εξωτερική ροπή σε ένα σύστημα είναι μηδέν η ολική στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή.

Αν, λόγω ανακατανομής της μάζας (εξαιτίας εσωτερικών δυνάμεων), μεταβληθεί η ροπή αδράνειας ενός σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής του, μεταβάλλεται και η γωνιακή ταχύτητά του αλλά η στροφορμή του διατηρείται σταθερή. Μπορούμε επομένως να γράψουμε:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

Τα παραδείγματα φαινομένων στα οποία διατηρείται η στροφορμή είναι πολλά. Στην εικόνα 4.4 φαίνεται μια αθλήτρια του καλλιτεχνικού πατινάζ, που στριφογυρίζει στο παγοδρόμιο. Η αθλήτρια μπορεί, συμπτύσσοντας τα χέρια και τα πόδια της, να αυξήσει τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της. Εάν η τριβή των παγοπέδιλων με τον πάγο θεωρηθεί αμελητέα, οι εξωτερικές δυνάμεις - όπως το βάρος και η δύναμη που δέχεται από το έδαφος - δε δημιουργούν ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής της, επομένως η στροφορμή της διατηρείται, δηλαδή το γινόμενο $I\omega$ παραμένει σταθερό. Συμπτύσσοντας τα χέρια και τα πόδια της η ροπή αδράνειας μειώνεται, οπότε, αφού το γινόμενο $I\omega$ μένει σταθερό, αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της.

Η χορεύτρια συμπτύσσοντας τα άκρα της αυξάνει τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της.

Εικόνα 4-4.

Όταν οι ακροβάτες θέλουν να κάνουν πολλές στροφές στον αέρα συμπτύσσουν τα χέρια και τα πόδια τους. Κατά την κίνηση του ακροβάτη στον αέρα, μοναδική εξωτερική δύναμη είναι το βάρος του, το οποίο, επειδή διέρχεται από το κέντρο μάζας, δε δημιουργεί ροπή και η στροφορμή του διατηρείται. Με τη σύμπτυξη των άκρων μειώνεται η ροπή αδράνειας, επομένως αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής. Στο σχήμα 4.30 φαίνεται πως, με την τεχνική αυτή, μια κατάδυση μπορεί να γίνει πολύ θεαματική.

Τα αστέρια τα οποία στο τελευταίο στάδιο της ζωής τους έχουν μάζα από 1,4 έως 2,5 φορές τη μάζα του Ήλιου, μετατρέπονται σε αστέρες νετρονίων ή pulsars. Τα αστέρια αυτά, όταν εξαντλήσουν τις πηγές ενέργειας που διαθέτουν, συρρικνώνονται λόγω της βαρύτητας μέχρις ότου οι πυρήνες των ατόμων τους αρχίσουν να εφάπτονται, με αποτέλεσμα η ακτίνα ενός τέτοιου αστεριού να είναι μόνο 15-20 km. Επειδή η συρρίκνωση οφείλεται σε εσωτερικές δυνάμεις η στροφορμή διατηρείται σταθερή και επειδή η ροπή αδράνειας του αστεριού μειώνεται δραματικά έχουμε μια αντίστοιχη αύξηση της ταχύτητας περιστροφής. Υπολογίζεται ότι ένας αστέρας νετρονίων περιστρέφεται με συχνότητα 3000 στροφές το δευτερόλεπτο. Για σύγκριση, να αναφέρουμε ότι η περίοδος περιστροφής του Ήλιου είναι 25 μέρες.

Με τη σύμπτυξη των άκρων μειώνεται η ροπή αδράνειας της καταδύτριας με συνέπεια την αύξηση της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής της.
Σχήμα 4-30.

Παράδειγμα 4.11

Ο άνθρωπος στο σχήμα 4.31, έχει τα χέρια του τεντωμένα και στο κάθε χέρι του κρατάει ένα βαράκι μάζας $M = 4$ kg. Εξαιτίας μιας ώθησης που δέχτηκε, ο άνθρωπος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = 4$ rad/s. Με ποια γωνιακή ταχύτητα θα στρέφεται αν συμπτύξει τα χέρια του;
Το κάθισμα πάνω στο οποίο κάθεται, ο άνθρωπος μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από κατακόρυφο άξονα, που είναι ο άξονας συμμετρίας. Η ροπή αδράνειας του ανθρώπου (χωρίς τα βαράκια που κρατάει) όταν έχει τα χέρια του τεντωμένα είναι 3,25 kgm^2 και όταν συμπτύσσει τα χέρια του είναι 2,5 kgm^2.
Κάθε βαράκι απέχει από τον άξονα περιστροφής 1 m, στην αρχή και 0,2 m στο τέλος. Η ροπή αδράνειας του καθίσματος είναι αμελητέα.

Σχήμα 4-31.

Απάντηση :

Η αρχική ροπή αδράνειας I_1 του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής, όταν ο άνθρωπος είχε τα χέρια του τεντωμένα, ήταν το άθροισμα της ροπής αδράνειας του ανθρώπου και της ροπής αδράνειας των σωμάτων που κρατάει.

$$I_1 = I_1^{\alpha\nu\theta\rho} + I_1^{\beta\alpha\rho} = I_1^{\alpha\nu\theta\rho} + 2MR_1^2 = 11,25\, kg\, m^2$$

Η ροπή αδράνειας I_2 του συστήματος, όταν ο άνθρωπος κατεβάσει τα χέρια του είναι η νέα ροπή αδράνειας του ανθρώπου και η ροπή αδράνειας των σωμάτων.

$$I_2 = I_2^{\alpha\nu\theta\rho} + I_2^{\beta\alpha\rho} = I_2^{\alpha\nu\theta\rho} + 2MR_2^2 = 2,82\, kg\, m^2$$

Επειδή στο σύστημα δεν ενεργούν εξωτερικές ροπές ως προς τον άξονα περιστροφής, η στροφορμή του διατηρείται. Δηλαδή ισχύει:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \quad \text{ή} \quad \omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 = 16\,rad/s$$

4.9. Κινητική Ενέργεια Λόγω Περιστροφής

Το σώμα του σχήματος 4.32, που στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω, γύρω από τον άξονα $z'z$, έχει κινητική ενέργεια.
Προκειμένου να υπολογίσουμε την κινητική ενέργεια του σώματος, το χωρίζουμε σε στοιχειώδεις μάζες m_1, m_2... Οι μάζες αυτές έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω και γραμμικές ταχύτητες που δίνονται από τις σχέσεις

$$\upsilon_1 = \omega r_1\,,\ \upsilon_2 = \omega r_2\,,\ \ldots \qquad (4.20)$$

Η κινητική ενέργεια του σώματος είναι ίση με το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των μαζών από τις οποίες αποτελείται, δηλαδή

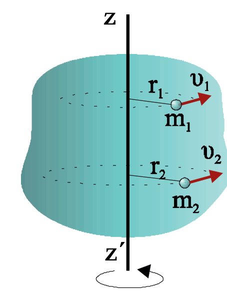
$$K = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 + \ \ldots$$

Η σχέση αυτή γίνεται, από την (4.20)

$$K = \frac{1}{2}m_1\omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2}m_2\omega^2 r_2^2 + \ldots = \frac{1}{2}\left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots\right)\omega^2$$

Όμως $m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots = I$ και επομένως

$$\boxed{K = \frac{1}{2}I\omega^2}$$



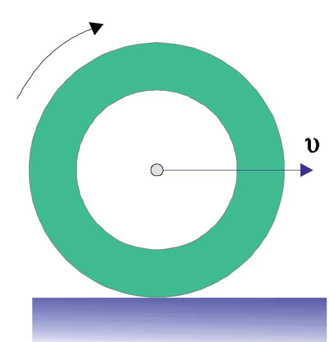
Η κινητική ενέργεια του σώματος είναι το άθροισμα των ενεργειών των στοιχειωδών μαζών από τις οποίες αποτελείται.
Σχήμα 4-32.

Πρέπει να τονιστεί ότι η ενέργεια αυτή δεν είναι μια νέα μορφή ενέργειας. Η σχέση στην οποία καταλήξαμε αποτελεί απλά μια βολική έκφραση για την κινητική ενέργεια ενός σώματος που στρέφεται.

Αν το σώμα εκτελεί ταυτόχρονα μεταφορική και στροφική κίνηση, όπως ο τροχός του σχήματος 4.33 η κινητική του ενέργεια είναι ίση με το άθροισμα της κινητικής ενέργειας λόγω μεταφορικής και λόγω στροφικής κίνησης

$$\boxed{K = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2}$$

όπου M η μάζα του σώματος και υ_{cm} η ταχύτητα του κέντρου μάζας του.



Ο τροχός έχει κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής και λόγω περιστροφικής κίνησης
Σχήμα 4-33.

4.10. Έργο Κατά τη Στροφική Κίνηση

Όταν πατάμε τα πετάλια του ποδηλάτου ασκούμε δύναμη και παράγουμε έργο. Έργο παράγεται και από τη μηχανή του αυτοκινήτου καθώς στρέφει τον άξονα των τροχών. Το έργο μιας δύναμης που στρέφει ένα σώμα μπορούμε να το εκφράσουμε σε συνάρτηση με τη ροπή της.

Έστω ότι η δύναμη **F** ασκείται στην περιφέρεια ενός τροχού ακτίνας R, κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης (σχ. 4.35). Κατά την απειροστά μικρή στροφή του τροχού κατά γωνία $d\theta$ η δύναμη παράγει έργο

$$dW = F\ ds$$

Αν η γωνία μετριέται σε ακτίνια τότε $ds = R\ d\theta$ και

$$dW = F\ R\ d\theta$$

Το γινόμενο FR είναι η ροπή τ της δύναμης.

Επομένως $$dW = \tau\ d\theta \qquad (4.21)$$

Για να υπολογίσουμε το έργο μιας δύναμης καθώς ένα σώμα στρέφεται κατά γωνία θ χωρίζουμε τη γωνία σε απειροστά μικρές γωνίες $d\theta_1$, $d\theta_2$... και αθροίζουμε τα αντίστοιχα έργα. Αν η ροπή της δύναμης είναι σταθερή, όπως στην περίπτωση του σχήματος 4.35, από το άθροισμα προκύπτει

$$\boxed{W = \tau\theta}$$

Από την (4.21) παίρνουμε

$$\frac{dW}{dt} = \tau\frac{d\theta}{dt}$$

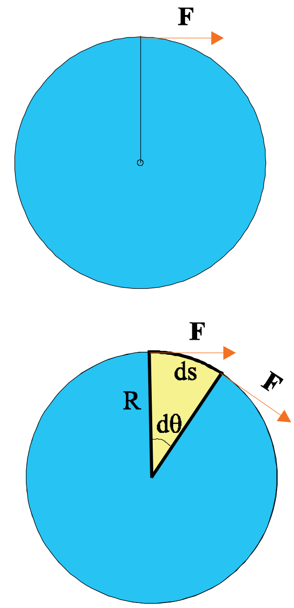
Ο ρυθμός παραγωγής έργου dW/dt είναι **η ισχύς P της δύναμης** και το $d\theta/dt$ είναι η γωνιακή ταχύτητα ω του σώματος, επομένως

$$P = \tau\omega$$

Η ροπή μιας δύναμης μεταβάλλει την κινητική ενέργεια του σώματος κατά ποσότητα ίση με το έργο της. Έτσι, στη στροφική κίνηση, το θεώρημα έργου - ενέργειας παίρνει τη μορφή

$$\boxed{\sum W = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2}$$

δηλαδή **το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των ροπών που ασκούνται στο σώμα είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας περιστροφής του σώματος.**

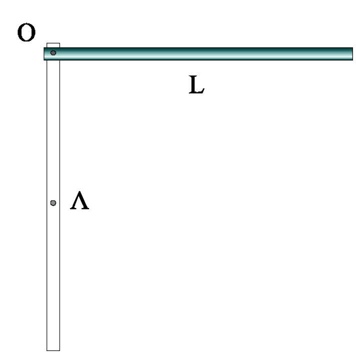


*Με την επίδραση της δύναμης **F** το σώμα στρέφεται κατά γωνία $d\theta$. Το σημείο εφαρμογής της **F** μετατοπίζεται κατά $ds = R\ d\theta$.*

Σχήμα 4-34.

Παράδειγμα 4.12

Ομογενής και ισοπαχής ράβδος μήκους $L = 0{,}3\ \text{m}$ και μάζας M, στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα Ο που διέρχεται από το ένα άκρο της. Αρχικά η ράβδος είναι οριζόντια και στη συνέχεια αφήνεται ελεύθερη. Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητά της τη στιγμή που θα περάσει από την κατακόρυφη θέση; Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα Ο είναι $\frac{1}{3}ML^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\ m/s^2$.



Σχήμα 4-35.

Απάντηση :

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται. Επιλέγουμε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το μέσον της ράβδου Λ όταν βρίσκεται στην κατακόρυφη θέση. Το μέσον της ράβδου είναι το κέντρο μάζας της.

Όταν η ράβδος βρίσκεται στην οριζόντια θέση έχει δυναμική ενέργεια $Mg\frac{L}{2}$

Όταν η ράβδος περάσει από την κατακόρυφη θέση, θα έχει κινητική ενέργεια $\frac{1}{2}I\omega^2$, όπου I η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα O.

Σύμφωνα με το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας ισχύει

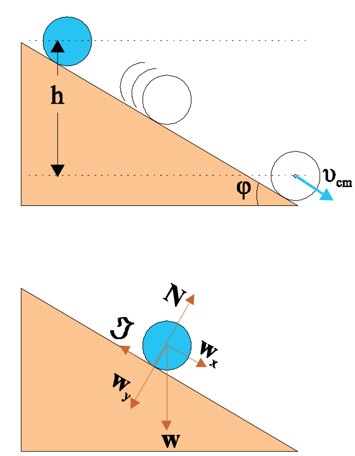
$$Mg\frac{L}{2}=\frac{1}{2}I\omega^2 \quad \text{ή} \quad Mg\frac{L}{2}=\frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\omega^2$$

από όπου
$$\omega=\sqrt{\frac{3g}{L}}=10\ rad/s$$

Παράδειγμα 4.13

Ομογενής κύλινδρος μάζας M και ακτίνας R αφήνεται να κυλήσει κατά μήκος πλάγιου επιπέδου γωνίας φ. Ποια είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου όταν η κατακόρυφη μετατόπισή του είναι h.

Η επιτάχυνση της βαρύτητας (g) θεωρείται γνωστή. Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του $I=\frac{1}{2}MR^2$.



Σχήμα 4-36.

Απάντηση :

Η κύλιση του κυλίνδρου οφείλεται στην τριβή. Η ροπή της τριβής ως προς τον άξονα συμμετρίας του κυλίνδρου είναι αυτή που περιστρέφει τον κύλινδρο. Η τριβή δε μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της, αφού κάθε στιγμή ασκείται σε διαφορετικό σημείο του κυλίνδρου. Πρόκειται, δηλαδή, για στατική τριβή. Επομένως η μηχανική ενέργεια του κυλίνδρου διατηρείται.

Αν θεωρήσουμε ότι στην κατώτερη θέση του η δυναμική ενέργεια του κυλίνδρου είναι ίση με μηδέν, στην ανώτερη θέση του ο κύλινδρος έχει δυναμική ενέργεια Mgh.

Στην κατώτερη θέση του ο κύλινδρος έχει κινητική ενέργεια, που ισούται με το άθροισμα της κινητικής ενέργειας λόγω μεταφοράς $\left(\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2\right)$ και της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής $\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right)$.

Σύμφωνα με το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας

$$Mgh=\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}I\omega^2 \quad \text{ή} \quad Mgh=\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega^2$$

ή $$gh = \frac{1}{2}\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{4}R^2\omega^2 \qquad (4.22)$$

Όμως η ταχύτητα υ_{cm} του κέντρου μάζας είναι

$$\upsilon_{cm} = \omega R \qquad (4.23)$$

Η (4.22) γίνεται από την (4.23)

$gh = \frac{1}{2}\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{4}R^2\left(\frac{\upsilon_{cm}}{R}\right)^2$ από όπου $gh = \frac{1}{2}\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{4}\upsilon_{cm}^2$ και τελικά

$$\upsilon_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

Αντιστοίχιση της Μεταφορικής Κίνησης Στερεού με τη Στροφική Κίνηση

Μεταφορική κίνηση	**Στροφική κίνηση**
Θέση x	Γωνία θ
Ταχύτητα $\upsilon = \frac{dx}{dt}$	Γωνιακή ταχύτητα $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Επιτάχυνση $a = \frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt}$	Γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt}$
Δύναμη $\mathbf{F}$	Ροπή $\boldsymbol{\tau}$
Μάζα m	Ροπή αδράνειας I
Θεμελιώδης νόμος της μηχανικής $\Sigma\mathbf{F} = m\boldsymbol{\alpha}$	Θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης $\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$
Ορμή $\mathbf{p} = m\boldsymbol{\upsilon}$	Στροφορμή $L = I\omega$
Δεύτερος νόμος του Newton $\Sigma\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$	Δεύτερος νόμος του Newton στη στροφική κίνηση $\Sigma\tau = \frac{dL}{dt}$
Διατήρηση της ορμής αν $\Sigma\mathbf{F}_{\varepsilon\xi} = 0$ $\mathbf{p} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$	Διατήρηση της στροφορμής Αν $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = 0$ $L = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$
Κινητική ενέργεια λόγω μεταφοράς $K = \frac{1}{2}m\upsilon^2$	Κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής $K = \frac{1}{2}I\omega^2$

Σύνοψη

Η **γωνιακή επιτάχυνση** είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας.

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt}$$

Ροπή δύναμης F, ως προς άξονα περιστροφής ονομάζεται το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο

$$\tau = Fl$$

όπου l η κάθετη απόσταση της δύναμης από τον άξονα περιστροφής, διεύθυνση αυτή του άξονα περιστροφής και φορά που δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Η μονάδα ροπής είναι το 1N m.

Ροπή δύναμης $\mathbf{F}$ ως προς σημείο $\mathbf{O}$ ονομάζεται το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο $\tau = Fl$ όπου l απόσταση του σημείου από το φορέα της δύναμης, μονάδα το 1N m, διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από τη δύναμη και το σημείο O και φορά που δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Για να ισορροπεί ένα ακίνητο στερεό πρέπει

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \quad \text{ή} \quad \begin{matrix} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{matrix} \quad \text{και} \quad \Sigma \tau = 0$$

Ροπή αδράνειας ενός στερεού ως προς κάποιο άξονα ονομάζεται το άθροισμα των γινομένων των στοιχειωδών μαζών από τις οποίες αποτελείται το σώμα επί τα τετράγωνα των αποστάσεών τους από τον άξονα περιστροφής

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots$$

Ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης είναι

$$\Sigma \tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$$

Στροφορμή υλικού σημείου -που κινείται κυκλικά- ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και είναι κάθετος στο επίπεδό της ονομάζεται το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο

$$L = pr \quad \text{ή} \quad L = m\upsilon r$$

διεύθυνση τη διεύθυνση του άξονα και φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Η μονάδα στροφορμής είναι το $1\text{kg m}^2/\text{s}$.

Στροφορμή στερεού σώματος -που στρέφεται γύρω από άξονα- είναι η συνισταμένη των στροφορμών των στοιχειωδών μαζών από τις οποίες αποτελείται το στερεό. Η στροφορμή στερεού είναι ίση με

$$L = I\omega$$

Η στροφορμή ενός συστήματος διατηρείται σταθερή εάν η συνολική εξωτερική ροπή στο σύστημα είναι μηδέν.

Ο δεύτερος νόμος του Newton στη στροφική κίνηση είναι $\Sigma\tau = \frac{dL}{dt}$

Η κινητική ενέργεια στερεού λόγω περιστροφής είναι $K = \frac{1}{2} I\omega^2$

Το έργο μιας σταθερής ροπής κατά τη στροφή ενός στερεού κατά γωνία θ είναι

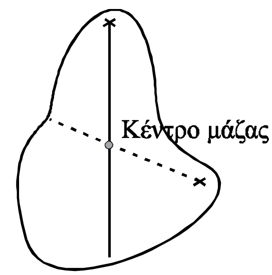
$$W = \tau\theta$$

Η ισχύς μιας ροπής είναι $P = \tau\omega$

Το θεώρημα έργου - ενέργειας στη στροφική κίνηση γράφεται

$$\Sigma W = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2$$

Δραστηριότητες



Σχήμα 4-37.

1. Βρείτε το κέντρο μάζας ενός σώματος δύο διαστάσεων.

Κόψτε ένα χαρτόνι που δεν έχει γεωμετρικό σχήμα και αναρτήστε το από ένα σημείο του. Όταν ισορροπήσει το χαρτόνι χαράξτε πάνω του την κατακόρυφη που περνάει από το σημείο ανάρτησης. Επειδή το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών πρέπει να είναι μηδέν, το κέντρο μάζας του χαρτονιού θα βρίσκεται σ' αυτή την κατακόρυφη. Στη συνέχεια κρεμάστε το σώμα από ένα δεύτερο σημείο και επαναλάβετε τα ίδια. Το κέντρο μάζας βρίσκεται στο σημείο τομής των δύο γραμμών.

2. Κατασκευάστε μια ζυγαριά.

Κόψτε ένα χαρτόνι σε σχήμα τετραγώνου. Κρεμάστε το σε ένα καρφί που περνάει από το σημείο Ο σχήμα 4.38α, ώστε να μπορεί να στρέφεται ελεύθερα. Στο ίδιο καρφί κρεμάστε και ένα ευθύγραμμο σύρμα που θα δείχνει τη διεύθυνση της κατακόρυφης. Στερεώστε στο ένα άκρο του χαρτονιού ένα αντίβαρο γνωστής μάζας (M) και στο άλλο ένα συνδετήρα ώστε να μπορείτε να κρεμάσετε μικρά αντικείμενα (σχ. 4.38β). Σημειώστε πάνω στο χαρτόνι την κατακόρυφη όπως ορίζεται από το σύρμα. Ξεκρεμάστε το χαρτόνι και με ένα μοιρογνωμόνιο χαράξτε πάνω του κλίμακα για τη μέτρηση γωνιών. Το μηδέν της κλίμακας να αντιστοιχεί στη γραμμή που χαράξατε με βάση το σύρμα. Στερεώστε πάλι το χαρτόνι. Αν από το συνδετήρα κρεμάσετε ένα μικρό αντικείμενο άγνωστης μάζας μπορείτε να υπολογίσετε τη μάζα του.

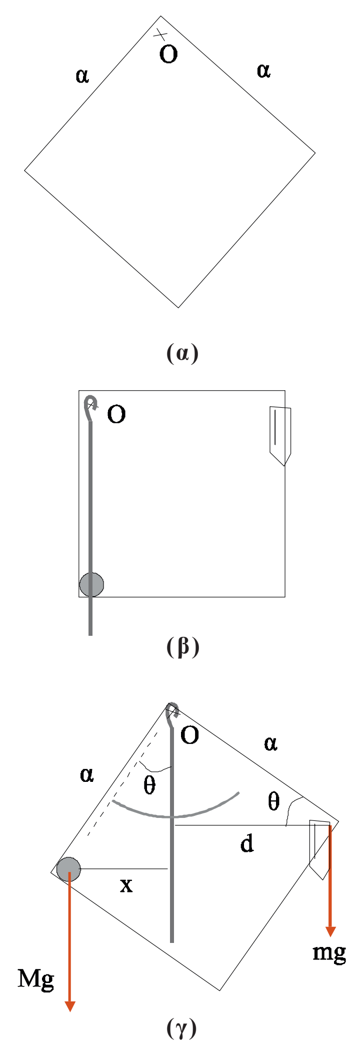
Στη θέση ισορροπίας το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς το Ο είναι μηδέν.

$$Mgx - mgd = 0 \quad \text{ή} \quad Mg\ \alpha\ \eta\mu\theta - mg\alpha\ \sigma\upsilon\nu\theta = 0$$

οπότε

$$m = M\,\varepsilon\varphi\theta$$

Με την προϋπόθεση ότι η μάζα του χαρτονιού είναι μικρή, αν γνωρίζουμε τη μάζα M και μετρήσουμε τη γωνία κατά την οποία στρέφεται το χαρτόνι μπορούμε να υπολογίσουμε τη μάζα m.



Σχήμα 4-38.

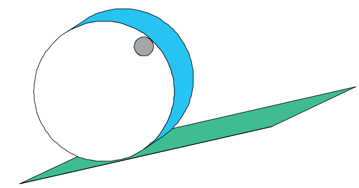
3. Ένας κύλινδρος που «αψηφά» τη βαρύτητα.

Κολλήστε στο εσωτερικό ενός κυλινδρικού κουτιού μεγάλης διαμέτρου μια μικρή μεταλλική ράβδο, παράλληλα με τον άξονα του κουτιού.

Αφού σημειώσετε τη θέση της στο εξωτερικό μέρος του κλείστε το κουτί.

Μπορείτε να κάνετε τους φίλους σας να τα χάσουν, νομίζοντας ότι το κουτί δεν ακολουθεί τους γνωστούς νόμους της φύσης:

Τοποθετήστε τον κύλινδρο σε πλάγιο επίπεδο με μικρή κλίση, όπως δείχνει το σχήμα και αφήστε τον ελεύθερο. Για λίγο ο κύλινδρος πηγαίνει προς τα επάνω. Πώς εξηγείται αυτό;

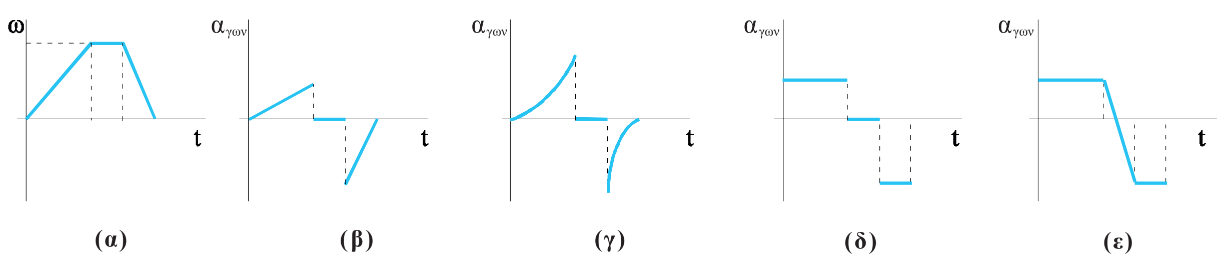


Σχήμα 4-39.

Ερωτήσεις

Κινηματική της περιστροφής

4.1 Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ενός τροχού μεταβάλλεται με το χρόνο όπως φαίνεται στο σχ. 4.40α Ποιο από τα διαγράμματα β, γ, δ, ε παριστάνει τη γωνιακή επιτάχυνση του τροχού σε συνάρτηση με το χρόνο;



Σχήμα 4-40.

4.2 Ένα σώμα κάνει ομαλή στροφική κίνηση. Ποια είναι η γωνιακή του επιτάχυνση;

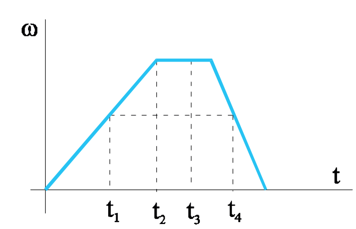
4.3 Ένας δίσκος στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου σε συνάρτηση με το χρόνο παριστάνεται στο διάγραμμα του σχήματος 4.41. Ποια από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστή;

α) Η γωνιακή επιτάχυνση το χρονικό διάστημα t_1-t_2 αυξάνεται.

β) Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης τη χρονική στιγμή t_4 είναι μικρότερο απ’ ό,τι τη χρονική στιγμή t_1.

γ) Τη χρονική στιγμή t_1 το διάνυσμα της γωνιακής επιτάχυνσης έχει αντίθετη κατεύθυνση από την κατεύθυνση που έχει τη χρονική στιγμή t_4.

δ) Τη χρονική στιγμή t_3 η γωνιακή επιτάχυνση έχει μέτρο μεγαλύτερο απ’ ό,τι τη χρονική στιγμή t_1.



Σχήμα 4-41.

4.4 Ένα στερεό στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα. Θεωρήστε δύο στοιχειώδεις μάζες του σώματος σε διαφορετικές αποστάσεις από τον άξονα περιστροφής. Ποια από τα μεγέθη α) γραμμική ταχύτητα β) γωνιακή ταχύτητα γ) γωνιακή επιτάχυνση και δ) κεντρομόλος επιτάχυνση, έχουν την ίδια τιμή για τις δύο μάζες;

4.5 Είναι δυνατό ένα σώμα να έχει, μια χρονική στιγμή, γωνιακή ταχύτητα μηδέν και γωνιακή επιτάχυνση διαφορετική από μηδέν;

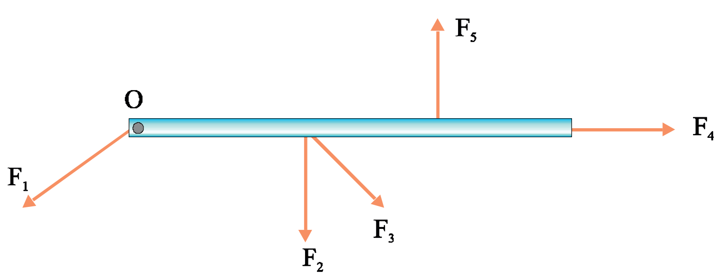
4.6 Ένα στερεό κάνει σύνθετη κίνηση. Υπάρχει κάποιο σημείο του στερεού, έξω από τον άξονα περιστροφής του, που έχει πάντα την ίδια ταχύτητα με το κέντρο μάζας; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Ροπή - ισορροπία στερεού

4.7 Συμπληρώστε τα κενά:
Η ροπή δύναμης ως προς σημείο έχει μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί........... ...., διεύθυνση που είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από .... και φορά που ορίζεται από ....

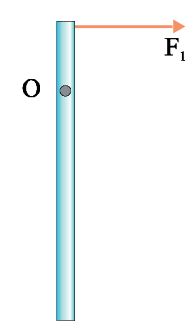
4.8 Τα λεωφορεία και τα μεγάλα φορτηγά έχουν τιμόνι μεγάλης διαμέτρου. Τι εξυπηρετεί αυτό;

4.9 Στη ράβδο του σχήματος 4.42 ασκούνται πέντε ομοεπίπεδες δυνάμεις του ίδιου μέτρου. Η ράβδος μπορεί να στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το σημείο O και είναι κάθετος στο επίπεδο των δυνάμεων. Να κατατάξετε τις δυνάμεις κατά τη σειρά με την οποία το μέτρο της ροπής τους ως προς τον άξονα αυτόν αυξάνεται.



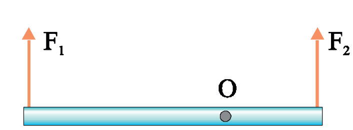
Σχήμα 4-42.

4.10 Η ράβδος του σχήματος 4.43 είναι κατακόρυφη και μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο O. Στο ένα άκρο της ράβδου ασκείται η οριζόντια δύναμη F_1. Για να μη στρέφεται η ράβδος ασκούμε οριζόντια δύναμη F_2 στο άλλο άκρο της.
α) Ποια πρέπει να είναι η κατεύθυνση της F_2;
β) Συγκρίνετε τα μέτρα των F_1 και F_2.



Σχήμα 4-43.

4.11 Στο σχήμα 4.44 φαίνεται μια οριζόντια ράβδος που μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος διέρχεται από το σημείο O. Στα δύο άκρα της ράβδου ασκούνται οι οριζόντιες δυνάμεις F_1 και F_2 κάθετες σε αυτήν. Η ράβδος παραμένει ακίνητη. Η απόσταση της δύναμης F_1 από τον άξονα περιστροφής είναι ίση με τα $2/3$ του μήκους της ράβδου. Το μέτρο της δύναμης F_2 είναι

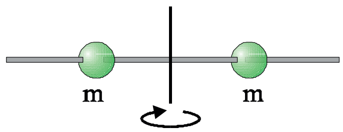


Σχήμα 4-44.

α) $F_1/2$ β) $2F_1/3$ γ) $F_1/3$ δ) $2F_1$ ε) $3F_1/2$ στ) $3F_1$
Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.

Ροπή αδράνειας

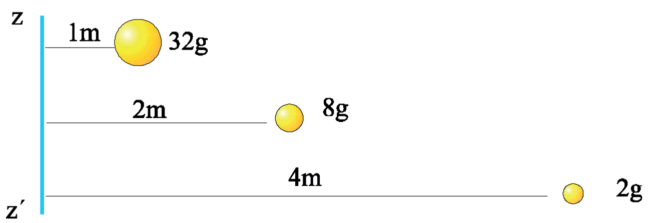
4.12 Η ράβδος του σχήματος 4.45 είναι αβαρής και οι μάζες m απέχουν το ίδιο από τον άξονα περιστροφής. Αν η απόσταση των μαζών από τον άξονα περιστροφής διπλασιαστεί, η ροπή αδράνειας του συστήματος
α) παραμένει ίδια.
β) διπλασιάζεται.
γ) τριπλασιάζεται.
δ) τετραπλασιάζεται.



Σχήμα 4-45.

4.13 Ένας τροχός αυτοκινήτου και ένας τροχός ποδηλάτου περιστρέφονται, χωρίς τριβές, γύρω από τον άξονά τους με την ίδια γωνιακή ταχύτητα. Ποιος από τους δύο τροχούς ακινητοποιείται πιο εύκολα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

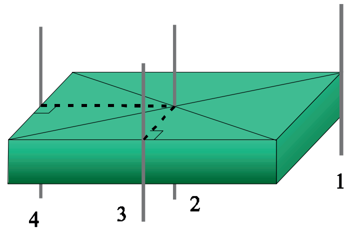
4.14 Στο σχήμα 4.46 φαίνονται τρία υλικά σημεία που περιστρέφονται γύρω από τον άξονα $z'z$. Η μάζα και η απόσταση καθενός από τον άξονα περιστροφής φαίνονται στο σχήμα. Να συγκρίνετε τις ροπές αδράνειάς τους ως προς τον άξονα $z'z$.



Σχήμα 4-46.

4.15 Η ροπή αδράνειας ενός στερεού ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του είναι μικρότερη από τη ροπή αδράνειάς του ως προς οποιονδήποτε άλλο άξονα που είναι παράλληλος σ' αυτόν. Πώς προκύπτει αυτό;

4.16 Γράψτε με αύξουσα σειρά τις ροπές αδράνειας I_1, I_2, I_3 και I_4 ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ως προς τους παράλληλους άξονες 1, 2, 3 και 4 (σχ. 4.47)

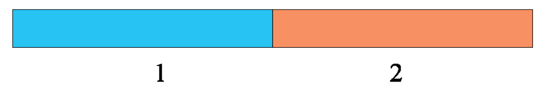


Σχήμα 4-47.

Θεμελιώδης νόμος της περιστροφής

4.17 Η γωνιακή επιτάχυνση ενός στερεού που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα είναι
α) ανάλογη με τη ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής.
β) ανάλογη με τη μάζα του σώματος.
γ) ανάλογη με τη δύναμη που ασκείται στο σώμα.
δ) ανάλογη με τη ροπή που ασκείται στο σώμα.
Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.

4.18 Στο σχήμα 4.48 βλέπουμε την τομή μιας πόρτας με το οριζόντιο επίπεδο. Η πόρτα αποτελείται από δύο διαφορετικά υλικά. Το υλικό 1 έχει μεγαλύτερη πυκνότητα από το υλικό 2. Τα δύο υλικά καταλαμβάνουν τον ίδιο χώρο. Από ποια μεριά πρέπει να τοποθετηθούν οι μεντεσέδες ώστε η πόρτα να ανοίγει και να κλείνει πιο εύκολα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



Σχήμα 4-48.

4.19 Ο οριζόντιος δίσκος του σχήματος 4.49α μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος σ' αυτόν. Στο δίσκο ασκείται οριζόντια δύναμη F που εφάπτεται στο δίσκο. Η δύναμη F μεταβάλλει τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του δίσκου όπως φαίνεται στο διάγραμμα 4.49β.

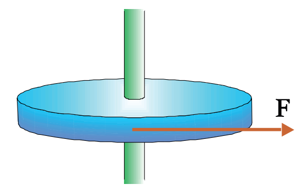
Ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστές;

α) Η γωνιακή επιτάχυνση είναι σταθερή.

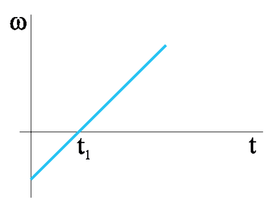
β) Τη χρονική στιγμή t_1 που η γωνιακή ταχύτητα είναι μηδέν, η δύναμη **F** είναι μηδέν.

γ) Η ροπή της δύναμης αυξάνεται με το χρόνο.

δ) Η δύναμη **F** έχει σταθερό μέτρο.



(α)



(β)

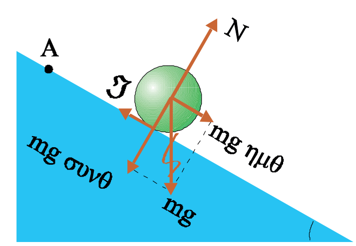
Σχήμα 4-49.

4.20 Μια σφαίρα αφήνεται στο σημείο Α πλάγιου επιπέδου και κυλίεται χωρίς ολίσθηση προς τη βάση του (σχ. 4.50). Κατά την κίνησή της αυξάνεται τόσο η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής όσο και η ταχύτητα του κέντρου μάζας της, επομένως η σφαίρα αποκτά και γωνιακή και γραμμική επιτάχυνση. Ποιες δυνάμεις είναι υπεύθυνες

α) για το ότι η σφαίρα δεν ολισθαίνει.

β) για τη γωνιακή επιτάχυνση της σφαίρας.

γ) για τη μεταφορική επιτάχυνσή της.

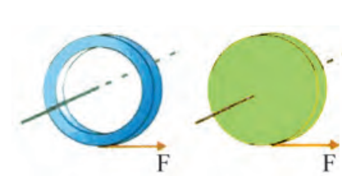


Σχήμα 4-50.

Στροφορμή - διατήρησης της στροφορμής

4.21 Ένα αυτοκίνητο κινείται προς το Βορρά, σε οριζόντιο δρόμο. Ποια είναι η κατεύθυνση της στροφορμής των τροχών του;

4.22 Το σχήμα 4.51 δείχνει ένα συμπαγή κυκλικό δίσκο και ένα κυκλικό δακτύλιο που έχουν την ίδια ακτίνα και την ίδια μάζα και μπορούν να στρέφονται γύρω από οριζόντιο άξονα. Τη στιγμή μηδέν, που τα δύο σώματα είναι ακίνητα, ασκούνται σ' αυτά δυνάμεις του ίδιου μέτρου, εφαπτόμενες στην περιφέρειά τους. Να συγκρίνετε τις στροφορμές τους τη χρονική στιγμή t.



Σχήμα 4-51.

4.23 Η στροφορμή ενός συστήματος σωμάτων δε μεταβάλλεται όταν

α) η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα είναι μηδέν.

β) τα σώματα κάνουν μόνο περιστροφική κίνηση.

γ) οι άξονες περιστροφής των σωμάτων είναι σταθεροί.

δ) το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των εξωτερικών

δυνάμεων είναι μηδέν.
Επιλέξτε το σωστό.

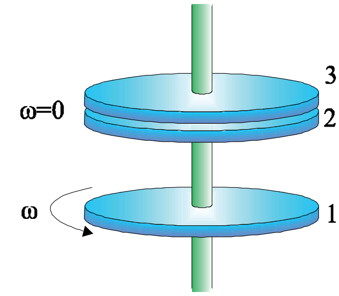
4.24 Ένας καλλιτέχνης του πατινάζ περιστρέφεται. Στην αρχή ο καλλιτέχνης έχει τα χέρια απλωμένα και στη συνέχεια τα συμπτύσσει. Ποια από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστή;

α) Η ροπή αδράνειάς του ως προς τον άξονα περιστροφής του αυξάνεται.
β) Η στροφορμή του αυξάνεται.
γ) Η συχνότητα περιστροφής του αυξάνεται.
δ) Ο καλλιτέχνης παύει να περιστρέφεται.

4.25 Αν έλιωναν οι πολικοί πάγοι, θα ανέβαινε λίγο η στάθμη της θάλασσας. Τι επίπτωση θα είχε αυτό στη συχνότητα περιστροφής της Γης γύρω από τον άξονά της; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

4.26 Ένα παιδί κάθεται σε κάθισμα το οποίο μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές. Στα χέρια του κρατάει κατακόρυφα τον άξονα ενός τροχού ποδηλάτου. Ο τροχός στρέφεται. Αρχικά το παιδί και το κάθισμα είναι ακίνητα. Τι θα συμβεί, αν το παιδί στρέψει τον άξονα κατά $180°$; Εάν πραγματοποιούσατε το πείραμα, θα διαπιστώνατε ότι η δύναμη που απαιτείται για να γυρίσει ανάποδα ο τροχός, όταν στρέφεται, είναι πολύ μεγαλύτερη από τη δύναμη που θα χρειαζόταν αν ήταν ακίνητος. Πώς το εξηγείτε;

4.27 Ο οριζόντιος δίσκος 1 (σχ. 4.52) στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω, γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του. Πάνω στο δίσκο αφήνονται να πέσουν οι δίσκοι 2 και 3 οι οποίοι είναι όμοιοι με τον 1. Η γωνιακή ταχύτητα με την οποία θα περιστρέφεται το σύστημα θα είναι:
α) ω, β) 2ω, γ) 3ω, δ) $\omega/2$, ε) $\omega/3$
Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.



Σχήμα 4-52.

Έργο και ενέργεια κατά την περιστροφή

4.28 Ένας κύβος από πάγο και μία σφαίρα αφήνονται από το ίδιο ύψος σε πλάγιο επίπεδο. Η σφαίρα κυλίεται κατά μήκος του πλάγιου επιπέδου ενώ ο κύβος ολισθαίνει χωρίς τριβή. Οι μάζες των δύο σωμάτων είναι ίσες και οι διαστάσεις τους μικρές σε σχέση με το ύψος από το οποίο αφέθηκαν να κινηθούν. Να συγκρίνετε
1. Το έργο του βάρους κατά την κίνηση των δύο σωμάτων.
2. Την ταχύτητα με την οποία τα σώματα φτάνουν στη βάση του πλαγίου επιπέδου.

4.29 Σε τροχό ο οποίος στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα ασκείται δύναμη F που μεταβάλλει τη γωνιακή του ταχύτητα:
α) από $1\ rad/s$ σε $3\ rad/s$.
β) από $4\ rad/s$ σε $6\ rad/s$.
γ) από $-2\ rad/s$ σε $5\ rad/s$.

δ) από -3 rad/s σε 4 rad/s.
Σε ποια περίπτωση το έργο της δύναμης είναι μεγαλύτερο;

4.30 Σώμα που αφήνεται από το σημείο Α πλάγιου επιπέδου κυλίεται μέχρι το σημείο Γ, που βρίσκεται στη βάση του πλάγιου επιπέδου. Το σημείο Β είναι ένα ενδιάμεσο σημείο της διαδρομής του σώματος. Να συμπληρωθεί ο πίνακας.

	Δυναμική ενέργεια	**Κινητική ενέργεια από τη μεταφορική κίνηση**	**Κινητική ενέργεια από την περιστροφική κίνηση**
Α	120 J		
Β		40 J	20 J
Γ	0	80 J	

4.31 Συμπληρώστε τον πίνακα:

Σύμβολο	**Όνομα**	**Μέγεθος**[1]	**Μονάδα στο SI**
	Γωνιακή Ταχύτητα		
			rad/s^2
		διανυσματικό	N m
I			
L			

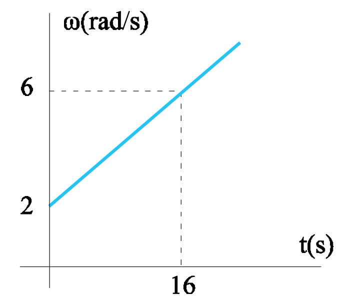
[1]*Γράψτε μία από τις λέξεις μονόμετρο ή διανυσματικό.*

Ασκήσεις

Κινηματική του στερεού

4.32 Η γωνιακή ταχύτητα ενός τροχού που στρέφεται μεταβάλλεται με το χρόνο, όπως φαίνεται στο διάγραμμα του σχήματος 4.53. Ποια είναι η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού; Ποια χρονική στιγμή η γωνιακή ταχύτητα του τροχού θα έχει τιμή 20 rad/s;

[Απ: $0,25\ rad/s^2$, 72 s]



Σχήμα 4-53.

4.33 Ένα όχημα κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα 20 m/s. Οι τροχοί του έχουν ακτίνα 40 cm. Υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα με την οποία στρέφονται.

[Απ: 50 rad/s]

4.34 Ένα όχημα, οι τροχοί του οποίου έχουν ακτίνα r = 40cm, κινείται με επιτάχυνση 2 m/s^2. Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα των τροχών του;

[Απ: 5 rad/s^2]

4.35 Ένας δίσκος ακτίνας 8 cm κυλίεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Η ταχύτητα του κέντρου του δίσκου είναι 5 m/s. Υπολογίστε:
α) την ταχύτητα με την οποία κινείται το ανώτερο σημείο του δίσκου.
β) τη συχνότητα με την οποία στρέφεται.

[Απ: 10 m/s, 9,9 Hz]

4.36 Τη χρονική στιγμή μηδέν το κέντρο ενός τροχού, ακτίνας R = 20 cm, που κυλίεται, έχει ταχύτητα υ_o = 8 m/s. Η ταχύτητα του τροχού μηδενίζεται αφού διανύσει απόσταση x = 20 m.

Ποια είναι η γωνιακή επιβράδυνσή του, αν θεωρήσουμε ότι είναι σταθερή στη διάρκεια της κίνησης;

[Απ: 8 rad/s^2]

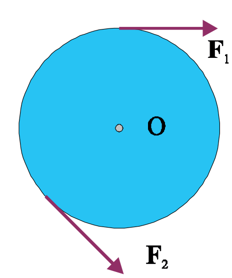
Ροπή δύναμης

4.37 Ένας εργάτης, για να σφίξει μια βίδα, χρησιμοποιεί κλειδί μήκους 20cm. Η μέγιστη δύναμη που μπορεί να ασκήσει ο εργάτης είναι 200N. Ποια είναι η μέγιστη ροπή που μπορεί να ασκήσει; Πώς πρέπει να ασκηθεί η δύναμη ώστε η ροπή να είναι μέγιστη;

[Απ: 40 N m]

4.38 Ο τροχός του σχήματος 4.54 έχει ακτίνα R = 0,5 m και μπορεί να στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του Ο και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Στον τροχό ασκούνται εφαπτομενικά οι δυνάμεις F_1 = 20N και F_2 = 30N. Ποια είναι η συνολική ροπή που δέχεται ο τροχός;

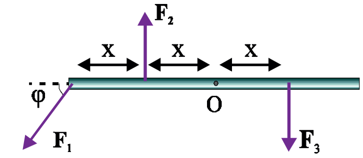
[Απ: 5 N m]



Σχήμα 4-54.

4.39 Η ράβδος του σχήματος 4.55 έχει αμελητέο βάρος και μπορεί να στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το σημείο O και είναι κάθετος σ' αυτή. Στη ράβδο ασκούνται οι δυνάμεις $F_1 = 20\ \mathrm{N}$, $F_2 = 2\ \mathrm{N}$ και $F_3 = 10\ \mathrm{N}$. Να υπολογίσετε το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται στη ράβδο ως προς το σημείο O. Δίνονται: $x = 2m$ και $\varphi = 30^\circ$.

[Απ: 16 N m]



Σχήμα 4-55.

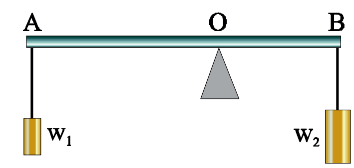
Ισορροπία στερεού σώματος

4.40 Το βαρούλκο ενός πηγαδιού αποτελείται από τύμπανο ακτίνας $R_1 = 20\ \mathrm{cm}$, στο οποίο είναι προσαρμοσμένη χειρολαβή, μήκους $R_2 = 0{,}5\ \mathrm{m}$. Όταν στρέφεται η χειρολαβή, το σκοινί τυλίγεται στο τύμπανο και έλκει φορτίο (κουβάς με νερό) βάρους 150 N. Να υπολογίσετε την ελάχιστη δύναμη που πρέπει να ασκηθεί στη χειρολαβή ώστε να ανεβαίνει το φορτίο.

[Απ: 60 N]

4.41 Από τα άκρα A και B αβαρούς ράβδου, μήκους $l = 2\ \mathrm{m}$, κρέμονται με σκοινιά δύο βάρη $w_1 = 200\ \mathrm{N}$ και $w_2 = 300\ \mathrm{N}$ (σχ. 4.56). Σε ποιο σημείο πρέπει να στηριχτεί η ράβδος για να ισορροπεί οριζόντια;

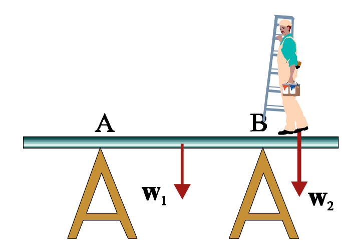
[Απ: 1,2m από το άκρο A]



Σχήμα 4-56.

4.42 Ο ελαιοχρωματιστής του σχήματος 4.57 στέκεται πάνω σε δοκό μήκους $l = 4\ \mathrm{m}$ και βάρους $w_1 = 150\ \mathrm{N}$. Η δοκός στηρίζεται στα σημεία A και B που απέχουν το καθένα 1 m, από τα άκρα της. Το βάρος του ελαιοχρωματιστή είναι $w_2 = 700\ \mathrm{N}$. Σε πόση απόσταση από τις άκρες μπορεί να σταθεί ο ελαιοχρωματιστής χωρίς να ανατραπεί η δοκός;

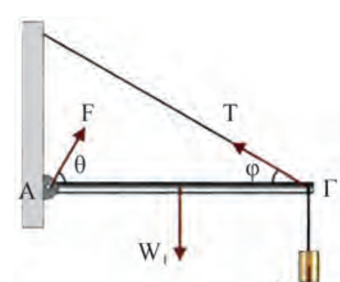
[Απ: 79 cm]



Σχήμα 4-57.

4.43 Ομογενής δοκός ΑΓ με μήκος l και βάρος $w_1 = 100\ \mathrm{N}$ ισορροπεί οριζόντια (σχ. 4.58). Το άκρο A της δοκού συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο. Το άλλο άκρο της Γ συνδέεται με τον τοίχο με σκοινί που σχηματίζει γωνία $\varphi = 30°$ με τη δοκό. Στο άκρο Γ κρέμεται με σκοινί σώμα βάρους $w_2 = 40\ \mathrm{N}$. Υπολογίστε την τάση του σκοινιού και τη δύναμη που δέχεται η δοκός από τον τοίχο.

[Απ: T=180 N, F=163,7 N, εφθ=0,32]



Σχήμα 4-58.

Ροπή αδράνειας και θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης

4.44 Καθένα από τα τέσσερα πτερύγια του έλικα του ελικοπτέρου (σχ. 4.59) μπορεί να θεωρηθεί ομογενής ράβδος. Το μήκος κάθε πτερυγίου είναι 6 m και η μάζα του 100 kg. Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας των τεσσάρων πτερυγίων ως προς τον άξονα περιστροφής τους. Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας ομογενούς ράβδου μήκους L, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας


Σχήμα 4-59.

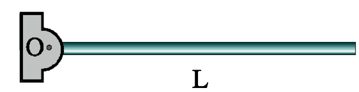
της και είναι κάθετος σ' αυτή, είναι $I = \frac{1}{12}ML^2$

[Απ: 4800 kg m²]

4.45 Στην περιφέρεια ενός τροχού, μάζας $M = 2$ kg και ακτίνας $R = 0{,}5$ m, που στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 100$ rad/s γύρω από τον άξονά του ασκείται σταθερή δύναμη **F**, εφαπτομενική στον τροχό. Ο τροχός σταματάει μετά από 5s. Να υπολογίσετε:
α) τη γωνιακή επιτάχυνση (επιβράδυνση) του τροχού.
β) το μέτρο της δύναμης F.
Η ροπή αδράνειας του τροχού είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$.

[Απ: 20 rad / s² 10N]

4.46 Οριζόντια ομογενής ράβδος, μήκους $L = 1$ m, μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της (σχ. 4.60). Ποια είναι η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου, τη στιγμή που, από την οριζόντια θέση, αφήνεται ελεύθερη; Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I = \frac{1}{3}ML^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\ m/s^2$.

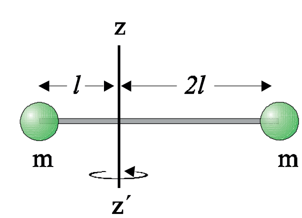


Σχήμα 4-60.

[Απ: 15 rad / s²]

Στροφορμή - αρχή διατήρησης της στροφορμής

4.47 Δύο σφαίρες, που η καθεμιά έχει μάζα $m = 100$ g συνδέονται μεταξύ τους με αβαρή ράβδο, όπως στο σχήμα 4.61. Το σύστημα περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 16$ rad/s, γύρω από τον κατακόρυφο άξονα $z'z$. Να υπολογίσετε τη στροφορμή του συστήματος. Δίνεται $l = 0{,}8$ m.



Σχήμα 4-61.

[Απ: 5,12 kg m² / s]

4.48 Υπολογίστε τη στροφορμή ενός τροχού μάζας $M = 2$ kg και ακτίνας $R = 0{,}4$ m, που στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 10$ rad/s γύρω από τον άξονά του. Θεωρήστε ότι η μάζα του τροχού βρίσκεται συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του.

[Απ: 3,2 kg m² / s]

4.49 Οριζόντιος δίσκος ακτίνας 20 cm και μάζας 1 kg στρέφεται με συχνότητα 2 Hz γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνάει από το κέντρο του. Από κάποιο ύψος αφήνεται ένα κομμάτι λάσπη μάζας 100gr, που κολλάει στο δίσκο σε απόσταση 10 cm από τον άξονα περιστροφής. Να υπολογίσετε τη νέα συχνότητα περιστροφής.
Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$

[Απ: 1,9 Hz]

Κινητική ενέργεια - έργο

4.50 Ομογενής ράβδος μάζας $M = 3$ kg και μήκους $L = 40$ cm στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 10$ rad/s γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της και είναι κάθετος σ' αυτήν. Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια της ράβδου. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στη ράβδο είναι $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$.

[Απ: 8 J]

4.51 Ομογενής δίσκος μάζας $M = 8$ kg και ακτίνας R κυλίεται σε οριζόντιο επίπεδο. Το κέντρο του δίσκου κινείται με ταχύτητα $\upsilon = 5$ m/s. Να βρεθεί η κινητική ενέργεια του δίσκου. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$.

[Απ: 150 J]

4.52 Ένας κινητήρας ασκεί ροπή 4 Nm και στρέφεται με συχνότητα 50 Hz. Ποια είναι η ισχύς του;

[Απ: 400π W]

4.53 Ομογενής δίσκος μάζας $m = 40$ kg και ακτίνας $R = 20$ cm, στρέφεται με συχνότητα 5 Hz γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος σ' αυτόν. α) Πόσο έργο απαιτείται για να ακινητοποιηθεί ο δίσκος; β) Υπολογίστε τη μέση ισχύ της ροπής που πρέπει να ασκηθεί στο δίσκο για να ακινητοποιηθεί σε 5s.

Δίνεται $I = \frac{1}{2}mR^2$ και $\pi^2 \approx 10$.

[Απ: 400J , 80W]

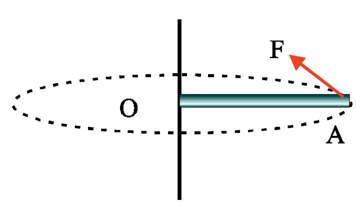
4.54 Η ράβδος του σχήματος 4.62 που έχει μήκος $L = 2$ m και μάζα $M = 3$ kg, είναι οριζόντια και στρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το άκρο της O. Στο άλλο άκρο A της ράβδου ασκείται οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 10$ N που είναι διαρκώς κάθετη στη διεύθυνση της ράβδου. Η ράβδος αρχικά ήταν ακίνητη και με την επίδραση της δύναμης F αρχίζει να στρέφεται. Να υπολογίσετε:

α) Το έργο της δύναμης F, σε μία περιστροφή της ράβδου.

β) Τη γωνιακή ταχύτητα που θα έχει αποκτήσει η ράβδος τη στιγμή κατά την οποία θα έχει ολοκληρώσει μια περιστροφή.

γ) Το ρυθμό με τον οποίο η δύναμη μεταφέρει ενέργεια στη ράβδο (ισχύς της δύναμης) την ίδια στιγμή.

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I = \frac{1}{3}ML^2$.

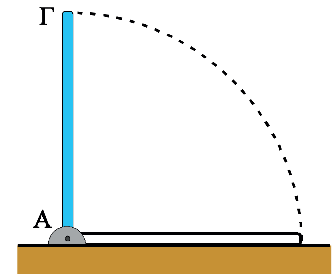


Σχήμα 4-62.

[Απ: W= 40π J, ω=7,9 rad/s, P=158 W]

4.55 Η ομογενής ράβδος ΑΓ, μήκους $l = 30$ cm και μάζας m, είναι κατακόρυφη και μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Α (σχ. 4.63). Η ράβδος αφήνεται από την κατακόρυφη θέση. Να υπολογίσετε την ταχύτητα που έχει το σημείο Γ, τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο στο μέσον της είναι $I = \frac{ml^2}{12}$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\ \text{m/s}^2$.

[Απ: : 3 m/s]

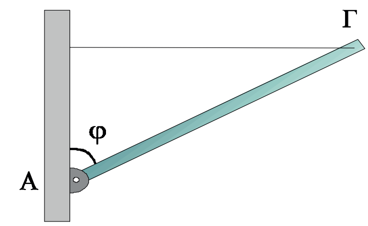


Σχήμα 4-63.

Προβλήματα

4.56 Ομογενής δοκός ΑΓ μήκους l και βάρους $w = 100$ N ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα 4.64. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις που δέχεται η δοκός από το σκοινί και από την άρθρωση Α. Δίνεται $\varphi = 60°$.

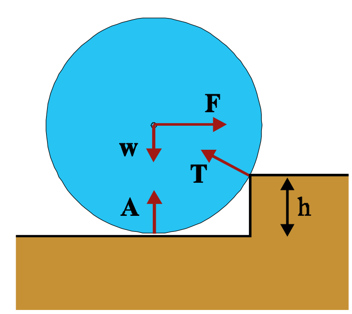
[Απ: : $T = 50\sqrt{3}N,\ F = 50\sqrt{7}N,\ \varepsilon\varphi\theta = 2\sqrt{3}/3$]



Σχήμα 4-64.

4.57 Το εμπόδιο στο σχήμα 4.65 έχει ύψος h και ο τροχός ακτίνα R και βάρος w. Για ποιες τιμές της οριζόντιας δύναμης F ο τροχός θα υπερπηδήσει το εμπόδιο.

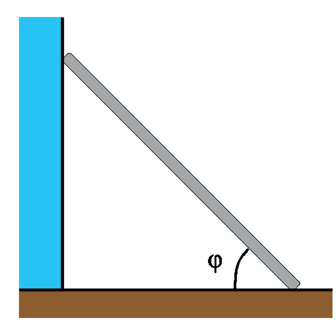
[Απ: : $F > w\dfrac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}$]



Σχήμα 4-65.

4.58 Ομογενής σκάλα μπορεί να ισορροπήσει στηριζόμενη στο έδαφος και στον τοίχο (σχ. 4.66) μόνο όταν η γωνία φ που σχηματίζει με το έδαφος είναι μεγαλύτερη των 30°. Να υπολογίσετε το συντελεστή οριακής στατικής τριβής της σκάλας με το οριζόντιο επίπεδο. Θεωρήστε αμελητέα την τριβή ανάμεσα στη σκάλα και τον τοίχο.

[Απ: $\sqrt{3}/2$]

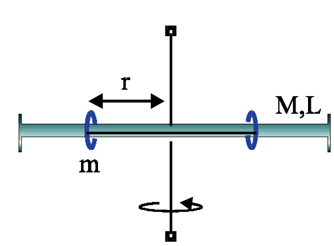


Σχήμα 4-66.

4.59 Ο πίσω τροχός ενός ποδηλάτου έχει ακτίνα $R = 0{,}30$ m και μάζα 1 kg. Ο τροχός στρέφεται με συχνότητα 100 στροφές ανά λεπτό - χωρίς να έρχεται σε επαφή με το έδαφος. Χρησιμοποιώντας το φρένο ακινητοποιούμε τον τροχό σε 5 s. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης στην επαφή τροχού - φρένου, είναι π/5. Να υπολογίσετε την κάθετη δύναμη που ασκεί το φρένο στον τροχό. (Θεωρήστε ότι το φρένο έρχεται σε επαφή με τον τροχό μόνο από τη μια του πλευρά και ότι η μάζα του τροχού είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του).

[Απ: 1N]

4.60 Η ράβδος του σχήματος 4.67 είναι οριζόντια και μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το μέσον της. Το μήκος της ράβδου είναι $L = 1$ m και η μάζα της $M = 0{,}6$ kg. Σε απόσταση $r = 0{,}2$ m από τον άξονα περιστροφής



Σχήμα 4-67.

βρίσκονται δύο μεταλλικοί δακτύλιοι μάζας $m = 0{,}1$ kg ο καθένας, που συνδέονται μεταξύ τους με ένα νήμα. Το σύστημα στρέφεται γύρω από τον άξονα με συχνότητα $f_1 = 10$ Hz. Κάποια στιγμή το νήμα σπάει και οι δακτύλιοι, λόγω αδράνειας ωθούνται στα άκρα της ράβδου. Υπολογίστε τη νέα συχνότητα με την οποία θα στρέφεται το σύστημα. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι $I = \frac{1}{12}ML^2$.

[Απ: 5,8 Hz]

4.61 Η ταχύτητα του κέντρου μάζας μιας σφαίρας που κυλίεται σε οριζόντιο επίπεδο είναι 5 m/s. Η σφαίρα στην πορεία της συναντά πλάγιο επίπεδο γωνίας κλίσης 30° και συνεχίζει πάνω σ' αυτό την κίνησή της. Η κίνηση της σφαίρας γίνεται χωρίς ολίσθηση. Να υπολογίσετε το διάστημα που διανύει η σφαίρα στο πλάγιο επίπεδο μέχρι να σταματήσει. Η ροπή αδράνειας της σφαίρας, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της, είναι $\frac{2}{5}mR^2$. Δίνεται $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$

[Απ: 3,5 m]

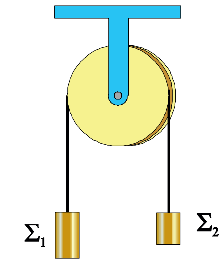
4.62 Συμπαγής σφαίρα κατεβαίνει χωρίς ολίσθηση σε πλάγιο επίπεδο με κλίση 30°. Η ροπή αδράνειας της σφαίρας, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της, είναι $I = \frac{2}{5}mR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου της σφαίρας.

[Απ: 25/7 m / s²]

4.63 Η τροχαλία του σχήματος 4.68 είναι ομογενής με μάζα $m = 2$ kg και ακτίνα R. Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 έχουν μάζες $m_1 = 3$ kg, $m_2 = 1$ kg. Να υπολογίσετε με ποια επιτάχυνση θα κινηθούν τα σώματα αν αφεθούν ελεύθερα. Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονά της είναι $I = \frac{1}{2}mR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$. Το βάρος του νήματος θεωρείται αμελητέο.

<u>Σημείωση:</u> Η τριβή ανάμεσα στην τροχαλία και στο σκοινί είναι αρκετά μεγάλη ώστε να μην παρατηρείται ολίσθηση.

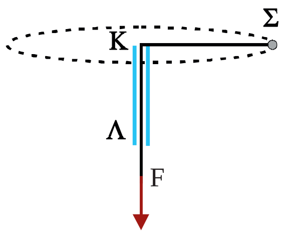
[Απ: a = 4 m / s²]



Σχήμα 4-68.

4.64 Το σφαιρίδιο Σ του σχ. 4.69 έχει μάζα 200 g και διαγράφει κύκλο ακτίνας 30 cm με γωνιακή ταχύτητα 40 rad/s. Το σκοινί στο οποίο είναι δεμένο το σφαιρίδιο περνάει από κατακόρυφο σωλήνα ΚΛ. Ποιο είναι το έργο της δύναμης F που πρέπει να ασκήσουμε στην ελεύθερη άκρη του σκοινιού μέχρις ότου η ακτίνα περιστροφής του σφαιριδίου Σ γίνει 15 cm; (Θα θεωρήσετε ότι σ' όλη τη διάρκεια του φαινομένου το σκοινί είναι οριζόντιο και ότι δεν υπάρχουν τριβές μεταξύ του σκοινιού και του σωλήνα).

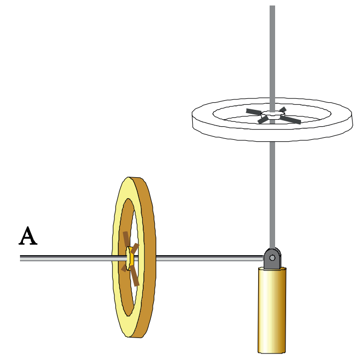
[Απ: : 43,2 J]



Σχήμα 4-69.

4.65 Ο τροχός του σχήματος 4.70 έχει ροπή αδράνειας, ως προς τον άξονά του, $0{,}18\ \text{kg m}^2$ και στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 25\ \text{rad/s}$ γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Ασκώντας στο σημείο Α του άξονα περιστροφής την κατάλληλη δύναμη τον μετακινούμε ώστε να γίνει κατακόρυφος. Υπολογίστε το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής του τροχού.

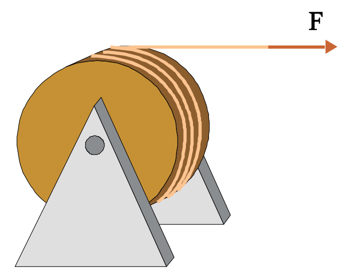
[Απ: $4{,}5\sqrt{2}\,kg\ m^2/s$]



Σχήμα 4-70.

4.66 Στην περιφέρεια μιας ακίνητης τροχαλίας, ακτίνας $20\ \text{cm}$, είναι τυλιγμένο σκοινί. Ασκώντας στο σκοινί οριζόντια δύναμη $20\pi\ \text{N}$ περιστρέφουμε την τροχαλία. Βρέθηκε ότι όταν η τροχαλία έχει κάνει τέσσερις περιστροφές έχει γωνιακή ταχύτητα $\omega = 8\pi\ rad/s$. Να υπολογιστεί η μάζα της. Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I = \frac{1}{2}mR^2$.

[Απ: 50 kg]



Σχήμα 4-71.

4.67 Ένας τροχός αφήνεται να κινηθεί σε πλάγιο επίπεδο που σχηματίζει με το οριζόντιο γωνία φ. Για ποιες τιμές του συντελεστή οριακής στατικής τριβής η κίνησή του γίνεται χωρίς ολίσθηση; Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα γύρω από τον οποίο στρέφεται $I = \frac{1}{2}mR^2$.

[Απ: $\mu_s > \varepsilon\varphi\varphi/3$]

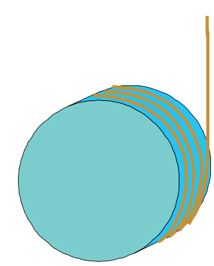
4.68 Το γιο - γιο του σχήματος αποτελείται από κύλινδρο με μάζα $m = 120\text{g}$ και ακτίνα $R = 1{,}5\ \text{cm}$, γύρω από τον οποίο έχει τυλιχτεί πολλές φορές νήμα (σχ. 4.72). Κρατώντας το ελεύθερο άκρο του νήματος, αφήνουμε τον κύλινδρο να κατεβαίνει. Να υπολογίσετε

α) το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η στροφορμή του κυλίνδρου καθώς κατεβαίνει, και

β) την ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου τη στιγμή που έχει ξετυλιχτεί σκοινί μήκους 30cm.

Θεωρήστε το νήμα κατακόρυφο. Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του είναι $I = \frac{1}{2}mR^2$. Δίνεται $g = 10\ \text{m/s}^2$.

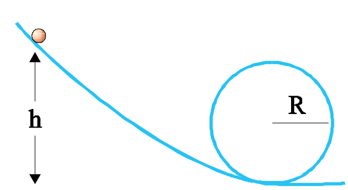
[Απ: α) $6\times10^{-3}\,kg\ m^2/s^2$, β) $2\,m/s$]



Σχήμα 4-72.

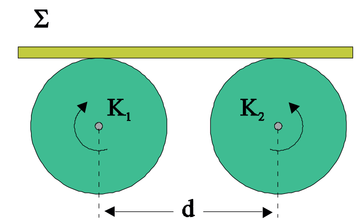
4.69 Μια μικρή σφαίρα μάζας m και ακτίνας r αφήνεται από το σημείο Α, πάνω σε οδηγό, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.73. Αν η κίνηση της σφαίρας γίνεται χωρίς ολίσθηση, ποιο είναι το μικρότερο ύψος h από το οποίο πρέπει να αφεθεί η σφαίρα για να κάνει ανακύκλωση; Δίνεται $R = 20\ \text{cm}$. Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της είναι $I = \frac{2}{5}mr^2$. Η ακτίνα της σφαίρας είναι πολύ μικρή σε σχέση με την ακτίνα R.

[Απ: 54 cm]



Σχήμα 4-73.

4.70 Οι άξονες δύο ομοίων κυλίνδρων K_1 και K_2 είναι παράλληλοι, βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και σε απόσταση d. Αφήνουμε μία ισοπαχή ομογενή σανίδα Σ πάνω στους κυλίνδρους έτσι ώστε το μέσον της να βρίσκεται πάνω από το μέσον της απόστασης K_1K_2 και με κατάλληλο μηχανισμό βάζουμε τους κυλίνδρους σε περιστροφή, όπως δείχνει το σχήμα 4.74. Μετατοπίζουμε λίγο τη σανίδα από τη θέση ισορροπίας της και την αφήνουμε ελεύθερη. Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης που θα εκτελέσει. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης της σανίδας με τους κυλίνδρους είναι μ_κ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g.

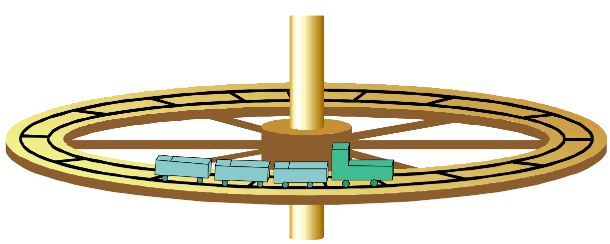


Σχήμα 4-74.

[Απ: $2\pi\sqrt{\dfrac{d}{2\mu_\kappa g}}$]

4.71 Ένα ηλεκτρικό τρενάκι μάζας $m = 2\text{kg}$ μπορεί να κινείται πάνω σε ένα μεγάλο οριζόντιο τροχό (σχ. 4.75). Ο τροχός μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Αρχικά και ο τροχός και το τρενάκι είναι ακίνητα. Κάποια στιγμή το τρενάκι αρχίζει να κινείται με ταχύτητα $\upsilon = 8{,}4\ \text{m/s}$. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα με την οποία θα στρέφεται ο τροχός. Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονά του είναι $I = 11{,}52\ kgm^2$ και οτι το τρενάκι απέχει από τον άξονα περιστροφής $R = 1{,}2\ \text{m}$.

[Απ: 1,75 rad/s]


Σχήμα 4-75.

ΕΝΘΕΤΟ

Εξωτερικό Γινόμενο

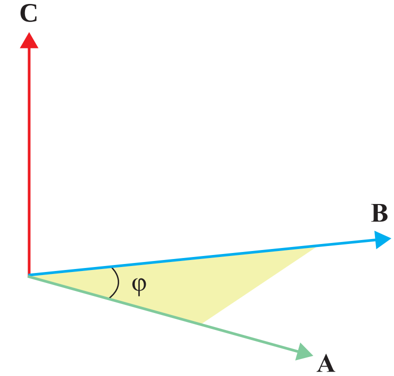
Υπάρχει ένα γινόμενο που χρησιμοποιείται ευρέως στη φυσική. Ονομάζεται εξωτερικό γινόμενο. Το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων **A** και **B** (συμβολίζεται **A** x **B**) είναι εξ ορισμού ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο των **A** και **B**, με μέτρο

$$C = AB\left|\eta\mu\varphi\right|$$

όπου φ η γωνία ανάμεσα στα διανύσματα **A** και **B**.

Η φορά του διανύσματος **C** ορίζεται από το λεγόμενο «κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία». Σύμφωνα με αυτόν, το πρώτο από τα δύο διανύσματα (**A**) στρέφεται προς το δεύτερο (**B**), ακολουθώντας τη μικρότερη γωνία ανάμεσα στα διανύσματα. Η φορά του **C** είναι η φορά προς την οποία θα κινηθεί ένας δεξιόστροφος κοχλίας, που στρέφεται όπως το διάνυσμα **A**.

Ένας άλλος τρόπος για να καθοριστεί η φορά του διανύσματος **C** είναι ο κανόνας του δεξιού χεριού: Αν τα δάχτυλα του δεξιού χεριού βρίσκονται κατά μήκος του **A** και καμφθούν για να δείχνουν προς το **B** (μέσω της μικρότερης γωνίας ανάμεσα στα δύο διανύσματα), ο αντίχειρας δείχνει την κατεύθυνση του **C**.



Σχήμα 4-76.

Όπως προκύπτει από την εξίσωση που δίνει το μέτρο του **C**, το εξωτερικό γινόμενο ανάμεσα σε δύο παράλληλα διανύσματα είναι μηδέν.

Αν A_x, A_y, A_z είναι οι συνιστώσες του διανύσματος **A**, σε τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων και B_x, B_y, B_z, οι συνιστώσες του διανύσματος **B**, το εξωτερικό γινόμενο σε καρτεσιανές συντεταγμένες δίνεται από την εξίσωση

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

όπου **i**, **j** και **k** τα μοναδιαία διανύσματα στους άξονες x, y και z, αντίστοιχα.

Το εξωτερικό γινόμενο δεν είναι αντιμεταθετικό αλλά

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

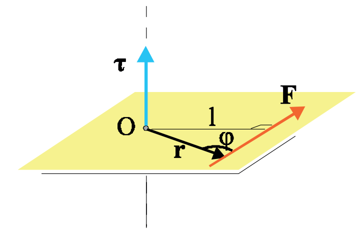
Εφαρμογές του εξωτερικού γινομένου

Η ροπή μιας δύναμης **F** ως προς σημείο O ορίζεται από τη διανυσματική σχέση

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (4.24)$$

όπου **r** είναι ένα διάνυσμα με αρχή το σημείο O και τέλος ένα σημείο του διανύσματος **F**. Σύμφωνα με τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου η ροπή είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από τα διανύσματα **r** και **F** και η φορά της δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Το μέτρο της ροπής που προκύπτει από τον ορισμό αυτό είναι

$$\tau = rF\ \eta\mu\varphi \qquad (\sigma\chi.\ 4.77)$$



Σχήμα 4-77.

Αν πάρουμε υπόψη ότι $r\eta\mu\varphi = d$ όπου d, η κάθετη απόσταση ανάμεσα στο σημείο O και το διάνυσμα **F**, καταλήγουμε στη γνωστή σχέση

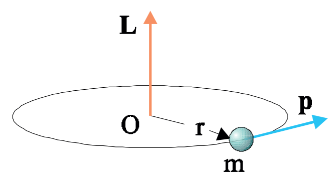
$$\tau = Fd \qquad (4.25)$$

Επομένως η κατεύθυνση και το μέτρο της ροπής είναι ανεξάρτητα από το σημείο του **F** στο οποίο καταλήγει το διάνυσμα **r**.

Ο ορισμός της ροπής σύμφωνα με τη σχέση (4.24) πλεονεκτεί έναντι της (4.25) δηλαδή της σχέσης με την οποία σε προηγούμενη παράγραφο ορίστηκε το μέγεθος, διότι η (4.24) ορίζει ότι είναι διανυσματικό μέγεθος και δίνει το μέτρο και την κατεύθυνσή της.

Η στροφορμή υλικού σημείου που στρέφεται γύρω από σημείο O, ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \boldsymbol{\upsilon} \qquad (4.26)$$



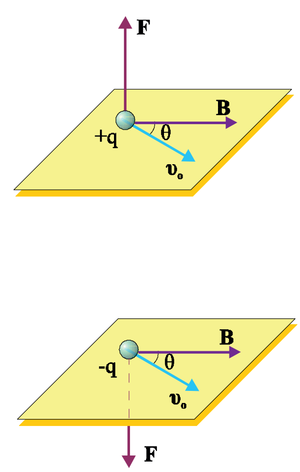
Σχήμα 4-78.

όπου **r** η επιβατική ακτίνα. Παρατηρήστε πάλι ότι αυτός ο τρόπος ορισμού είναι πολύ πιο κομψός από τον ορισμό που δόθηκε στην παράγραφο 4-7. Η εξίσωση (4.26) δίνει πληροφορίες για το μέτρο, τη διεύθυνση και τη φορά της στροφορμής.

Πέρα από την απλότητα και την κομψότητα, με την οποία μέσω του εξωτερικού γινομένου ορίστηκαν η ροπή και η στροφορμή, υπάρχει και μια βαθύτερη αιτία που κάνει αυτό τον τρόπο ορισμού τους απαραίτητο. Στη φυσική οι εξισώσεις πέρα από τη συνέπεια των μονάδων και των διαστάσεων πρέπει να έχουν και διανυσματική συνέπεια. Αυτό σημαίνει ότι τα διανύσματα μπορούν να προστεθούν ή να εξισωθούν μόνο με διανύσματα. Οι εξισώσεις (4.24) και (4.26) έχουν αυτή τη διανυσματική συνέπεια.

Και άλλα μεγέθη στη φυσική, όπως η δύναμη που ασκεί το μαγνητικό πεδίο σε κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο, ορίζονται με διανυσματικό γινόμενο. Η δύναμη αυτή (δύναμη Lorentz) ορίζεται από τη σχέση:

$$\mathbf{F} = q\boldsymbol{\upsilon} \times \mathbf{B}$$



Σχήμα 4-79.

Κιβώτιο Ταχυτήτων και Μετάδοση της Κίνησης στο Αυτοκίνητο

Σ' ένα αυτοκίνητο, ανάμεσα στον κινητήρα και τους κινητήριους τροχούς υπάρχουν μηχανισμοί που επιτρέπουν ή εμποδίζουν να μεταδίδεται η στροφική κίνηση του κινητήρα στους τροχούς. Οι μηχανισμοί αυτοί επιτυγχάνουν επίσης διαφορετικές συχνότητες περιστροφής ανάμεσα στον κινητήρα και τις ρόδες. Το σύνολο των διατάξεων αυτών συνιστούν το **σύστημα μετάδοσης του αυτοκινήτου**.

Το Αμπραγιάζ (συμπλέκτης)

Το αμπραγιάζ είναι τοποθετημένο ανάμεσα στον κινητήρα και το κιβώτιο των ταχυτήτων. Το αμπραγιάζ επιτρέπει

- **να συμπλέκουμε**, δηλαδή να πραγματοποιούμε μια προοδευτική σύνδεση ανάμεσα στον πρωτεύοντα άξονα περιστροφής του κινητήρα, (στροφαλοφόρο) και το υπόλοιπο σύστημα μετάδοσης.
- **να αποσυμπλέκουμε**, δηλαδή να καταργούμε παροδικά αυτή τη σύνδεση κατά τη διάρκεια των αλλαγών ταχυτήτων.

Το Κιβώτιο Ταχυτήτων

Στην περίπτωση ενός κλασικού αυτοκινήτου εάν εφαρμόζαμε απ' ευθείας τη στροφική κίνηση του στροφαλοφόρου στους τροχούς, τότε, για συνηθισμένες συνθήκες λειτουργίας του κινητήρα (4000 στροφές/min), το αυτοκίνητο θα έπρεπε να κινείται με ταχύτητα 450 km/h. Οι τροχοί πρέπει να περιστρέφονται πιο αργά από το στροφαλοφόρο.

Το κιβώτιο ταχυτήτων πετυχαίνει ακριβώς αυτόν τον υποπολλαπλασιασμό των στροφών.

Το κιβώτιο ταχυτήτων δίνει τη δυνατότητα

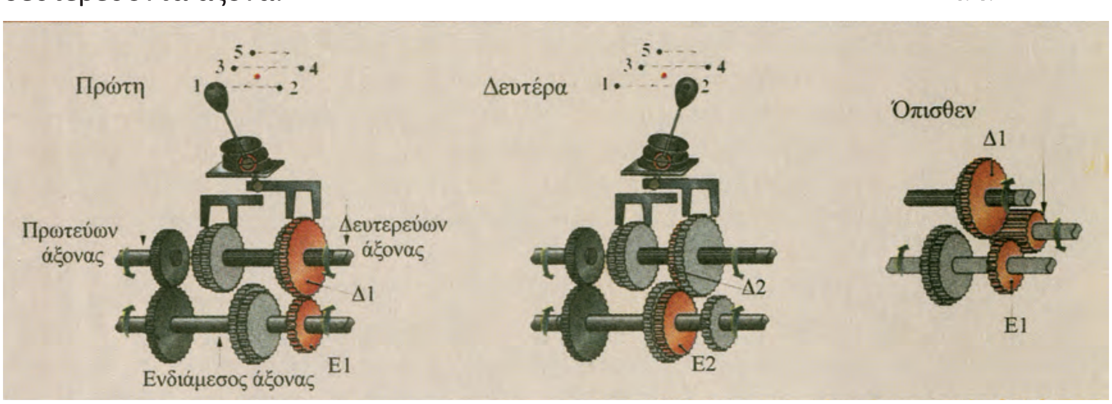
- στους τροχούς να στρέφονται πιο αργά από τον κινητήρα,
- να μεταβάλλουμε, ανάλογα με τις ανάγκες της στιγμής, τη ροπή του ζεύγους δυνάμεων[1] που ασκείται στους κινητήριους τροχούς.

Το κιβώτιο ταχυτήτων περιλαμβάνει ένα σύστημα γραναζιών διαφορετικών διαμέτρων.

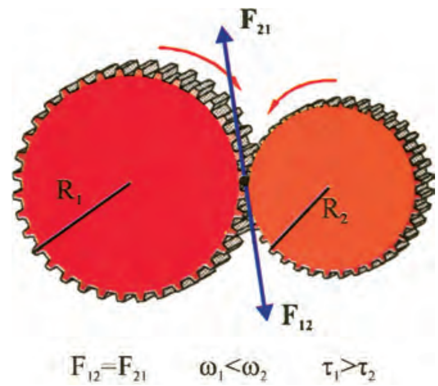
Αποσυμπλέκουμε πατώντας το αμπραγιάζ. Με το μοχλό των ταχυτήτων φέρνουμε σε επαφή ένα γρανάζι του δευτερεύοντος άξονα (έξοδος του κιβωτίου) με ένα του ενδιαμέσου άξονα (σχ. 4.80). Αφήνουμε το αμπραγιάζ, ο στροφαλοφόρος θέτει σε περιστροφή τον ενδιάμεσο άξονα (είσοδος του κιβωτίου) κι αυτός με τη σειρά του το δευτερεύοντα άξονα.

[1] *Δύο αντίθετες δυνάμεις με ίσα μέτρα και διαφορετικούς φορείς αποτελούν ζεύγος. Το μέτρο της ροπής του ζεύγους είναι ίσο με το γινόμενο του μέτρου των δυνάμεων επί την κάθετη απόσταση μεταξύ των φορέων τους ($\tau = Fl$). Η ροπή ενός ζεύγους είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο αναφοράς.*

Σχήμα 4-80.



Στην πρώτη,
το γρανάζι $Δ_1$ του δευτερεύοντος άξονα συναρμόζει με το γρανάζι E_1 του ενδιάμεσου (σχ. 4.80). Η ακτίνα του γραναζιού $Δ_1$ ($R_{Δ1}$) είναι περίπου τέσσερις φορές μεγαλύτερη από την ακτίνα του γραναζιού E_1 (R_{E1}). Ανάμεσα στις γωνιακές ταχύτητες περιστροφής των γραναζιών ισχύει η σχέση $\frac{\omega_{Δ_1}}{\omega_{E_1}} = \frac{R_{E_1}}{R_{Δ_1}}$ από την οποία προκύπτει ότι η συχνότητα περιστροφής του $Δ_1$ είναι τέσσερις φορές μικρότερη από αυτήν του E_1. Ταυτόχρονα η ροπή του ζεύγους που στρέφει τα γρανάζια θα είναι τέσσερις φορές μεγαλύτερη για το $Δ_1$ σε σχέση με το E_1 γιατί ενώ οι δυνάμεις είναι ίσες η απόσταση μεταξύ των φορέων τους τετραπλασιάζεται στο $Δ_1$ (σχ. 4.81).



Σχήμα 4-81.

Το αυτοκίνητο δε μπορεί να αναπτύξει μεγάλες ταχύτητες, όμως προέκυψε ένα άλλο όφελος. Το κινητήριο ζεύγος δυνάμεων μετασχηματίσθηκε σ' ένα ζεύγος, που σε τελική ανάλυση ασκείται στους τροχούς, με μια πολύ σημαντικότερη ροπή. Είναι ικανό να ξεκινήσει το αυτοκίνητο ή να το ανεβάσει σε ανηφοριές με μεγάλη κλίση.

Πατώντας το αμπραγιάζ αποσυμπλέκουμε το στροφαλοφόρο από το κιβώτιο ταχυτήτων και με το μοχλό των ταχυτήτων μετακινούμε το δευτερεύοντα άξονα σε σχέση με τον ενδιάμεσο.

Στη δευτέρα,
το γρανάζι $Δ_2$ συναρμόζει με το γρανάζι E_2 (σχ. 4.80). Η σχέση των ακτίνων τώρα είναι $\frac{R_{Δ_2}}{R_{E_2}} = \frac{2}{1}$. Η συχνότητα περιστροφής του $Δ_2$ είναι η μισή αυτής του E_2 και η ροπή του κινητήριου ζεύγους διπλάσια.

Στην τρίτη ο δευτερεύων άξονας στρέφεται με συχνότητα ίση με τα 2/3 αυτής του ενδιαμέσου, στην τετάρτη οι συχνότητες είναι περίπου ίσες και στην πέμπτη η περιστροφή είναι γρηγορότερη στην έξοδο του κιβωτίου ταχυτήτων απ' ότι στην είσοδο. Η πέμπτη ταχύτητα επιτρέπει να πετυχαίνουμε μεγάλες ταχύτητες καταναλώνοντας σχετικά λιγότερο καύσιμο. Όταν έχουμε πέμπτη ταχύτητα, όμως, η ροπή του ζεύγους έχει μειωθεί πολύ και είναι δύσκολο να επιταχύνουμε το αυτοκίνητο αν χρειαστεί, π.χ. σ' ένα προσπέρασμα.

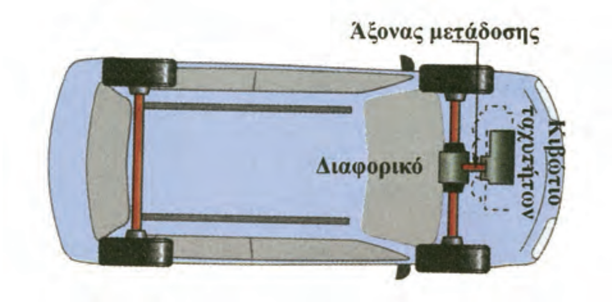
Στην όπισθεν,
ο δευτερεύων άξονας γυρνάει με ανάποδη φορά από αυτήν που γυρνούσε στις άλλες ταχύτητες. Αυτό επιτυγχάνεται με τη μεσολάβηση ενός τρίτου γραναζιού ανάμεσα στο δευτερεύοντα άξονα και τον ενδιάμεσο (σχ. 4.80).

Οι σχέσεις ακτίνων των γραναζιών ποικίλουν από αυτοκίνητο σε αυτοκίνητο.

Άξονας Μετάδοσης και Διαφορικό

Ανάμεσα στην έξοδο από το κιβώτιο ταχυτήτων και τους κινητήριους τροχούς βρίσκουμε έναν ή περισσότερους άξονες μετάδοσης και το διαφορικό.

Όταν το αυτοκίνητο στρίβει ο τροχός που βρίσκεται στο εσωτερικό της στροφής διανύει μικρότερο διάστημα από τον εξωτερικό τροχό. Εφόσον το τόξο της στροφής για τον εσωτερικό τροχό είναι μικρότερο θα πρέπει να στρέφεται εκείνη την ώρα με μικρότερη συχνότητα από τον εξωτερικό.

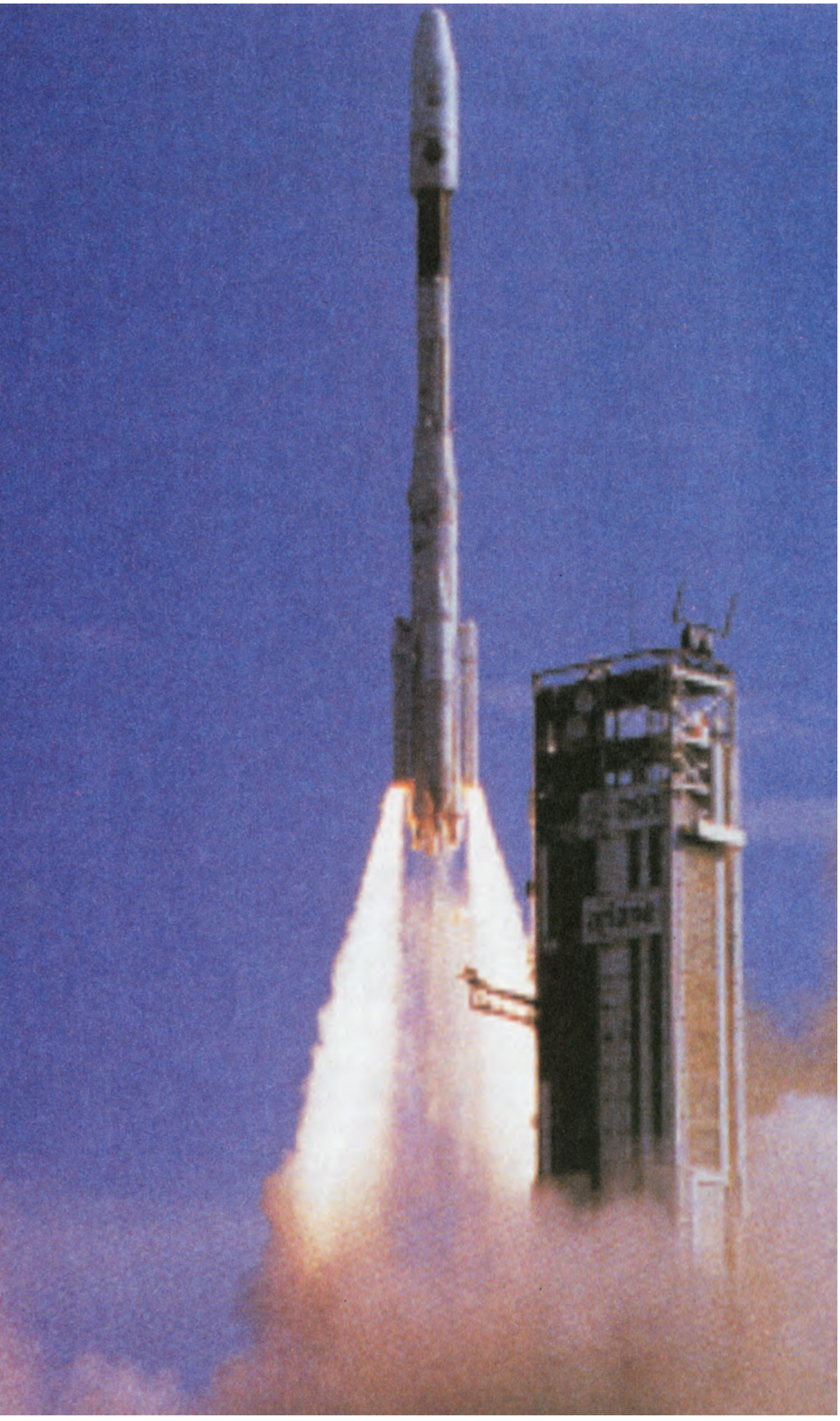


Σχήμα 4-82.

Διαφορικό είναι εκείνος ο μηχανισμός που βρίσκεται στο μέσον του άξονα κίνησης (σχ. 4.82) και μοιράζει τις στροφές στους δυο τροχούς ώστε να γυρίζει ο καθένας με την κατάλληλη συχνότητα. Το διαφορικό επίσης μοιράζει στους τροχούς την ισχύ που φτάνει από τον κινητήρα.

Αν ο άξονας κίνησης ήταν μονοκόμματος το αυτοκίνητο θα είχε πολύ βαρύ τιμόνι, θα ήταν πολύ δύσκολο στην οδήγηση και θα έφθειρε πολύ γρήγορα τα ελαστικά του.

5 ΚΡΟΥΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ



5.1. Εισαγωγή

Εκτόξευση διαστημικού λεωφορείου.

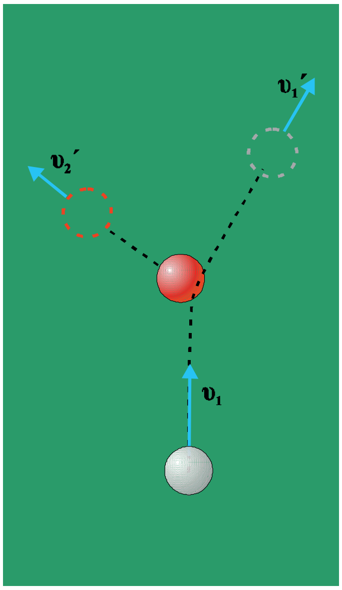
Εικόνα 5-1.

Η ταχύτητα και η επιτάχυνση των σωμάτων, καθώς και τα μεγέθη που ορίζονται με βάση αυτά, όπως η κινητική ενέργεια και η ορμή, ανήκουν στην κατηγορία των μεγεθών που δεν έχουν μια μόνο τιμή. Η τιμή τους εξαρτάται από το πού βρίσκεται εκείνος που τα μετράει. Έτσι, ο επιβάτης του τρένου νομίζει ότι ο συνεπιβάτης του είναι ακίνητος, όμως ένας παρατηρητής στην αποβάθρα του σταθμού τον βλέπει να κινείται με την ταχύτητα του τρένου. Όταν αναφερόμαστε στα μεγέθη αυτά, χωρίς άλλη διευκρίνηση, θα εννοούμε τις τιμές που βρίσκει ένας παρατηρητής ακίνητος πάνω στη Γη.

Οι παρατηρητές, που περιγράφουν με διαφορετικό τρόπο την κίνηση των σωμάτων, πρέπει να συνεννοούνται μεταξύ τους. Σ' αυτή την ανάγκη ανταποκρίθηκε ο Γαλιλαίος με τους μετασχηματισμούς του, που επιτρέπουν να μετατρέψουμε τα δεδομένα της κίνησης σε ένα σύστημα αναφοράς σε δεδομένα για ένα άλλο σύστημα αναφοράς που κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς το πρώτο (αδρανειακό σύστημα).

Στη μελέτη των προβλημάτων μας μπορούμε να επιλέξουμε το σύστημα αναφοράς της κίνησης, με στόχο να κάνουμε τους υπολογισμούς μας όσο γίνεται απλούστερους. Συχνά, ως σύστημα αναφοράς παίρνουμε αυτό που συνδέεται με το κέντρο μάζας του συστήματος. Ένα τέτοιο σύστημα αναφοράς, λ.χ. θα διευκόλυνε τη μελέτη της κίνησης των πυραύλων, που χωρίς αυτούς οι γνώσεις μας για το ηλιακό σύστημα θα ήταν πολύ φτωχότερες.

Τέλος, όχι μόνο η ταχύτητα των σωμάτων αλλά και η ταχύτητα των κυμάτων εξαρτάται από τη σχετική κίνηση πηγής - παρατηρητή. Αυτό σημαίνει ότι διαφορετικοί παρατηρητές αντιλαμβάνονται με διαφορετικό τρόπο το ίδιο κύμα. Το φαινόμενο Doppler, όπως είναι γνωστό, το αξιοποιούν για τη μέτρηση της ταχύτητας των αυτοκινήτων ή των αεροπλάνων με το ραντάρ, οι αστρονόμοι για να παρακολουθήσουν την κίνηση πολύ μακρινών ουράνιων σωμάτων, αλλά και οι γιατροί για να παρακολουθήσουν τη ροή του αίματος.



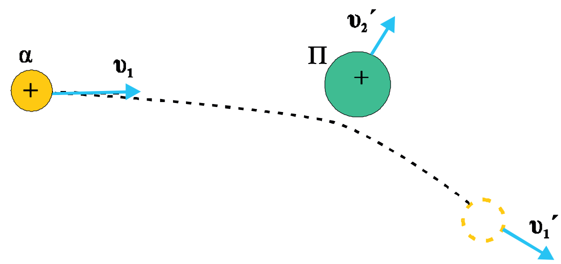
Κρούση ανάμεσα σε δύο μπάλες μπιλιάρδου.

Σχήμα 5-1.

5.2. Κρούσεις

Όταν δύο σώματα συγκρούονται, για παράδειγμα όταν χτυπάνε δύο μπάλες του μπιλιάρδου (σχ. 5.1), η κινητική κατάστασή τους ή τουλάχιστον ενός από αυτά μεταβάλλεται απότομα. Οι απότομες αυτές αλλαγές της κίνησης προκαλούνται από τις ισχυρές δυνάμεις που αναπτύσσονται ανάμεσα στα σώματα που συγκρούονται, κατά τη διάρκεια της επαφής τους.

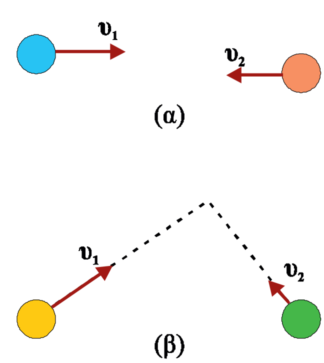
Η έννοια της κρούσης έχει επεκταθεί και στο μικρόκοσμο όπου συμπεριλαμβάνει και φαινόμενα όπου τα «συγκρουόμενα» σωματίδια δεν έρχονται σε επαφή. Για παράδειγμα όταν ένα σωματίδιο α (πυρήνας He) κινείται προς ένα άλλο πυρήνα (Π), οι αλληλεπιδράσεις τους, που είναι πολύ ασθενείς όταν βρίσκονται μακριά, γίνονται πολύ ισχυρές όταν τα σωματίδια πλησιάσουν με αποτέλεσμα την απότομη αλλαγή στην κινητική τους κατάσταση. Η χρονική διάρκεια μεταβολής της κινητικής τους κατάστασης είναι πολύ μικρή. Αν μπορούσαμε να κινηματογραφήσουμε το φαινόμενο θα βλέπαμε ότι μοιάζει με τη σύγκρουση δύο σωμάτων, μόνο που εδώ τα σώματα δεν έρχονται σε επαφή. Ονομάζουμε, λοιπόν, κρούση και κάθε φαινόμενο του μικρόκοσμου, στο οποίο τα «συγκρουόμενα» σωματίδια, αλληλεπιδρούν με σχετικά μεγάλες δυνάμεις για πολύ μικρό χρόνο. Το φαινόμενο αυτό στη σύγχρονη φυσική ονομάζεται και **σκέδαση** (σχ. 5.2).



Κρούση ενός σωματίου α, με αρχικά ακίνητο πυρήνα.

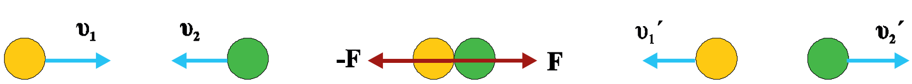
Σχήμα 5-2.

Ανάλογα με τη διεύθυνση που κινούνται τα σώματα πριν συγκρουστούν οι κρούσεις διακρίνονται σε κεντρικές, έκκεντρες και πλάγιες. **Κεντρική,** (ή μετωπική) ονομάζεται η κρούση κατά την οποία τα διανύσματα των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία. Αν τα σώματα που συγκρούονται είναι σφαίρες και η κρούση τους είναι κεντρική, οι ταχύτητές τους μετά την κρούση θα βρίσκονται επίσης στην ίδια (αρχική) διεύθυνση (σχ. 5.3).



(α) έκκεντρη κρούση.
(β) πλάγια κρούση.

Σχήμα 5-4.



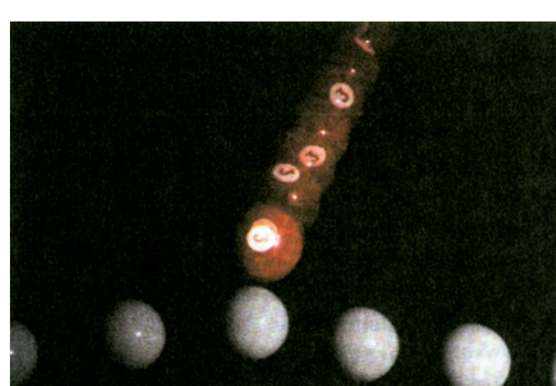
πριν την κρούση *μετά την κρούση*

Κεντρική κρούση μεταξύ δύο σφαιρών.

Σχήμα 5-3.

Έκκεντρη, ονομάζεται η κρούση στην οποία οι ταχύτητες των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται είναι παράλληλες (σχ. 5.4α).

Πλάγια ονομάζεται η κρούση αν οι ταχύτητες των σωμάτων βρίσκονται σε τυχαίες διευθύνσεις (σχ. 5.4β).



Πλάγια κρούση

Εικόνα 5-2.

Η διατήρηση της ορμής στις κρούσεις

Επειδή η κρούση είναι ένα φαινόμενο που διαρκεί πολύ λίγο χρόνο, οι ωθήσεις των εξωτερικών δυνάμεων - αν υπάρχουν - είναι αμελητέες κατά τη διάρκεια της κρούσης. Το σύστημα των σωμάτων που συγκρούονται μπορεί να θεωρηθεί μονωμένο, για τη χρονική διάρκεια της κρούσης, επομένως η ορμή του συστήματος διατηρείται.

Η ορμή ενός συστήματος σωμάτων, κατά τη διάρκεια της κρούσης, διατηρείται.

Αν $p_{πριν}$ η ορμή του συστήματος αμέσως πριν την κρούση και $p_{μετά}$ η ορμή του συστήματος αμέσως μετά την κρούση, ισχύει:

$$p_{πριν} = p_{μετά}$$

Η ενέργεια στις κρούσεις

Κατά τη σύγκρουση δύο σωμάτων ένα μέρος της μηχανικής τους ενέργειας μετατρέπεται σε θερμότητα. Στην ιδανική περίπτωση που η μηχανική ενέργεια των σωμάτων δε μεταβάλλεται με την κρούση, η κρούση ονομάζεται ελαστική. Επειδή η κρούση είναι ένα φαινόμενο αμελητέας χρονικής διάρκειας, η δυναμική ενέργεια των σωμάτων -που εξαρτάται από τη θέση τους στο χώρο- δε μεταβάλλεται. Επομένως :

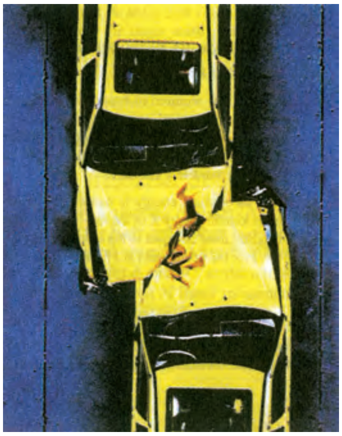
Ελαστική είναι η κρούση στην οποία διατηρείται η κινητική ενέργεια του συστήματος των συγκρουόμενων σωμάτων.

Στο μακρόκοσμο η ελαστική κρούση αποτελεί μια εξιδανίκευση. Προσεγγιστικά ελαστική μπορεί να θεωρηθεί η κρούση ανάμεσα σε δύο πολύ σκληρά σώματα, όπως ανάμεσα σε δύο μπάλες του μπιλιάρδου. Στο μικρόκοσμο όμως έχουμε κρούσεις απολύτως ελαστικές όπως αυτή που περιγράψαμε προηγουμένως ανάμεσα στο σωμάτιο α και τον πυρήνα.

Ανελαστική, ονομάζεται η κρούση στην οποία ένα μέρος της αρχικής κινητικής ενέργειας των σωμάτων μετατρέπεται σε θερμότητα.

Μια ειδική περίπτωση ανελαστικής κρούσης είναι εκείνη που οδηγεί στη συγκόλληση των σωμάτων - στη δημιουργία συσσωματώματος. Αυτή η κρούση ονομάζεται **πλαστική**.

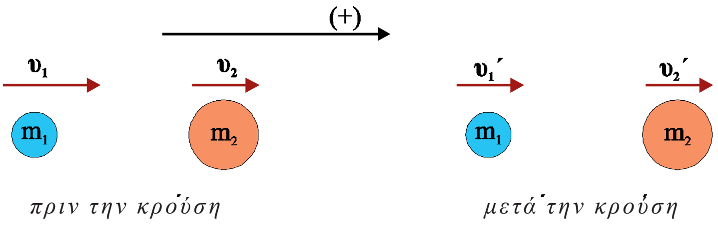
Δύο σωμάτια α συγκρούονται. Το ένα, πριν την κρούση, ήταν πρακτικά ακίνητο.
Εικόνα 5-3.



Η κρούση ανάμεσα στα αυτοκίνητα της εικόνας είναι σχεδόν πλαστική.
Εικόνα 5-4.

5.3. Κεντρική Ελαστική Κρούση Δύο Σφαιρών

Δύο σφαίρες $Σ_1$ και $Σ_2$ με μάζες m_1 και m_2 κινούνται με ταχύτητες $υ_1$ και $υ_2$, όπως στο σχήμα 5.5. Οι σφαίρες συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά και μετά την κρούση έχουν ταχύτητες $υ'_1$ και $υ'_2$. Εάν γνωρίζουμε τις ταχύτητες των σφαιρών πριν την κρούση και τις μάζες τους μπορούμε να υπολογίσουμε τις ταχύτητές τους μετά την κρούση.



Σχήμα 5-5.

Για την κρούση ισχύουν :

$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2'$ (διατήρηση της ορμής) **(5.1)**

$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2$ (διατήρηση της κινητικής ενέργειας) **(5.2)**

η (5.1) γράφεται και $m_1(\upsilon_1 - \upsilon_1') = m_2(\upsilon_2' - \upsilon_2)$ **(5.3)**

ενώ η (5.2) γράφεται $m_1(\upsilon_1^2 - \upsilon_1'^2) = m_2(\upsilon_2'^2 - \upsilon_2^2)$ **(5.4)**

Διαιρούμε τις (5.4) και (5.3) κατά μέλη και βρίσκουμε

$$\upsilon_1 + \upsilon_1' = \upsilon_2' + \upsilon_2 \qquad (5.5)$$

Επιλύοντας το σύστημα των (5.1) και (5.5) ως προς υ_1' και υ_2' βρίσκουμε

$$\upsilon_1' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \qquad (5.6)$$

και

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \qquad (5.7)$$

Στην περίπτωση όπου $m_1 = m_2$

οι (5.6) και (5.7) γίνονται

$$\upsilon_1' = \upsilon_2 \text{ και } \upsilon_2' = \upsilon_1$$

Δηλαδή **οι σφαίρες ανταλλάσσουν ταχύτητες.**

Στην περίπτωση που η Σ_2 ήταν ακίνητη πριν την κρούση ($\upsilon_2=0$)

οι (5.6) και (5.7) γίνονται

$$\boxed{\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1} \qquad (5.8)$$

και

$$\boxed{\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1} \qquad (5.9)$$

Σημείωση : Κατά τον υπολογισμό των ταχυτήτων των σφαιρών υποθέσαμε ότι οι σφαίρες μετά την κρούση συνεχίζουν να κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση. Αν μετά τις πράξεις προκύψει αρνητική τιμή για την υ_1' θα συμπεράνουμε ότι η Σ_1 άλλαξε φορά κίνησης μετά την κρούση.

(5.4.) Ελαστική Κρούση Σώματος με άλλο Ακίνητο Πολύ Μεγάλης Μάζας

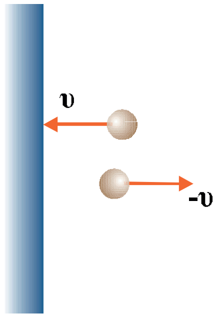
Αν η σφαίρα Σ_2 της προηγούμενης παραγράφου έχει πολύ μεγαλύτερη μάζα από τη Σ_1 και είναι ακίνητη πριν την κρούση οι σχέσεις (5.8) και (5.9) δίνουν

$$\boxed{\upsilon_1' = -\upsilon_1}$$

και

$$\boxed{\upsilon_2' = 0}$$

Δηλαδή η σφαίρα μικρής μάζας ανακλάται με ταχύτητα ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς από αυτήν που είχε πριν την κρούση. Το σώμα μεγάλης μάζας παραμένει πρακτικά ακίνητο.



Αν η κρούση είναι ελαστική η σφαίρα ανακλάται με ταχύτητα ίδιου μέτρου.

Σχήμα 5-6.

Σύμφωνα με τα παραπάνω όταν μια σφαίρα μικρής μάζας προσκρούει ελαστικά και κάθετα στην επιφάνεια ενός τοίχου ή στο δάπεδο ανακλάται με ταχύτητα ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς (σχ. 5.6).

Στην περίπτωση που η σφαίρα προσκρούει ελαστικά και πλάγια σε έναν τοίχο αναλύουμε την ταχύτητά της σε δύο συνιστώσες, τη μία ($\boldsymbol{\upsilon}_x$) κάθετη στον τοίχο και την άλλη ($\boldsymbol{\upsilon}_y$) παράλληλη με αυτόν (σχ. 5.7).

Σύμφωνα με τα παραπάνω η κάθετη στον τοίχο συνιστώσα της ταχύτητας θα αλλάξει φορά και θα διατηρήσει το μέτρο της ($\boldsymbol{\upsilon}'_x = -\boldsymbol{\upsilon}_x$).

Η δύναμη που ασκείται στη σφαίρα κατά την κρούση είναι κάθετη στον τοίχο, άρα η y συνιστώσα της ταχύτητας δε μεταβάλλεται ($\boldsymbol{\upsilon}'_y = \boldsymbol{\upsilon}_y$).

Το μέτρο της ταχύτητας μετά την κρούση είναι

$$\upsilon' = \sqrt{\upsilon_x'^2 + \upsilon_y'^2} = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \upsilon$$

δηλαδή το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας δε μεταβάλλεται.

Αν π και α οι γωνίες που σχηματίζουν η $\boldsymbol{\upsilon}$ και η $\boldsymbol{\upsilon}'$, αντίστοιχα, με την κάθετη στον τοίχο ισχύει

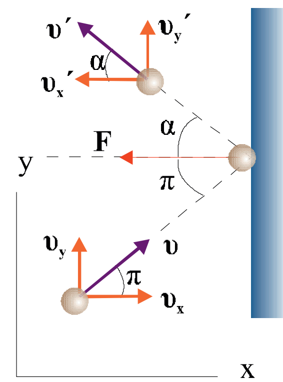
$$\eta\mu\pi = \frac{\upsilon_y}{\upsilon} \quad \text{και} \quad \eta\mu\alpha = \frac{\upsilon'_y}{\upsilon'}$$

όμως $\upsilon_y = \upsilon'_y$ και $\upsilon = \upsilon'$

οπότε $\eta\mu\pi = \eta\mu\alpha$

και $\pi = \alpha$

Δηλαδή η γωνία πρόσπτωσης της σφαίρας είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης.



Αν η κρούση είναι ελαστική η σφαίρα ανακλάται με ταχύτητα ίδιου μέτρου και η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης.

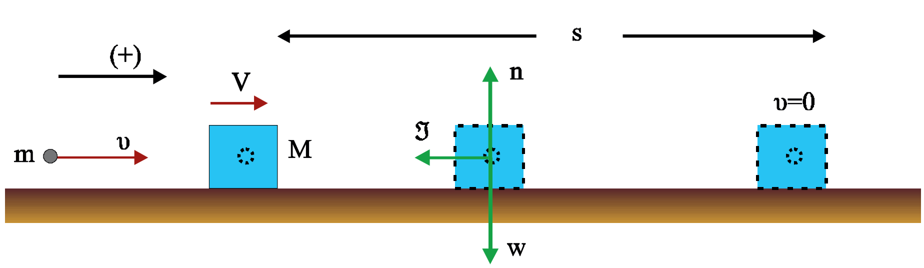
Σχήμα 5-7.

Παράδειγμα 5.1

Βλήμα μάζας $m = 0{,}02\ \mathrm{kg}$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα $\upsilon = 200\ \mathrm{m/s}$ και σφηνώνεται σε ακίνητο ξύλο μάζας $M = 0{,}98\ \mathrm{kg}$ που βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Να βρεθεί α) η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση, β) η μηχανική ενέργεια που χάθηκε κατά την κρούση, γ) το διάστημα που θα διανύσει το συσσωμάτωμα μέχρι να σταματήσει. Ο συντελεστής τριβής του συσσωματώματος με το οριζόντιο επίπεδο είναι $\mu_\kappa = 0{,}5$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

Απάντηση :

α) Έστω $\mathbf{V}$ η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.



Σχήμα 5-8.

Συμβολίζουμε με $\mathbf{p}_{\pi\rho\iota\nu}$ την ορμή του συστήματος αμέσως πριν την κρούση και με $\mathbf{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}$ την ορμή αμέσως μετά την κρούση.

$$\mathbf{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \mathbf{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}$$

Επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά (σχ. 5.8), η αρχή διατήρησης της ορμής γράφεται αλγεβρικά:

$$m\upsilon = (M+m)V \quad \text{άρα} \quad V = \frac{m\upsilon}{M+m} = 4m/s$$

β) Η μηχανική ενέργεια που χάθηκε κατά την κρούση είναι

$$K_{\pi\rho\iota\nu} - K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}(M+m)V^2 = 392J$$

γ) Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου - ενέργειας για το συσσωμάτωμα έχουμε

$$K_{\alpha\rho\chi} + W_w + W_n + W_J = K_{\tau\varepsilon\lambda} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}(M+m)V^2 - \mu_K(M+m)gs = 0 \text{ άρα}$$

$$s = \frac{V^2}{2\mu_K g} = 1,6m$$

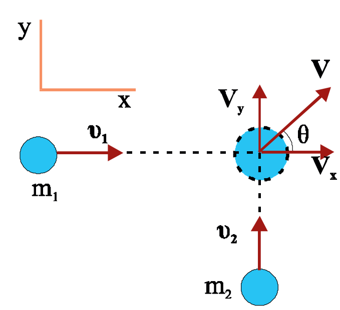
Παράδειγμα 5.2

Δύο σώματα με μάζες $m_1 = 2$ kg και $m_2 = 3$ kg κινούνται σε κάθετες διευθύνσεις με ταχύτητες $\upsilon_1 = 10$ m/s και $\upsilon_2 = 5$ m/s και κάποια στιγμή συγκρούονται πλαστικά. Να βρεθεί η ταχύτητα του συσσωματώματος που δημιουργείται από την πλαστική κρούση των δύο σωμάτων.

Απάντηση :

Έστω $\mathbf{V}$ η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Αν $\mathbf{p}_{\pi\rho\iota\nu}$ η ορμή του συστήματος αμέσως πριν την κρούση και $\mathbf{p}_{\mu\varepsilon\tau\alpha}$ η ορμή αμέσως μετά την κρούση θα είναι

$$\mathbf{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \mathbf{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}$$



Σχήμα 5-8.

Αναλύουμε το διάνυσμα $\mathbf{V}$ σε δύο συνιστώσες τη V_x κατά την διεύθυνση x και τη V_y κατά τη διεύθυνση y (σχ. 5.8). Όταν δύο διανύσματα είναι ίσα, είναι ίσες και οι συνιστώσες τους, επομένως

$$\mathbf{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \mathbf{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \quad \begin{matrix} p_x^{\pi\rho\iota\nu} = p_x^{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \\ p_y^{\pi\rho\iota\nu} = p_y^{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \end{matrix} \quad \text{ή} \quad \begin{matrix} m_1\upsilon_1 = (m_1+m_2)V_x \\ m_2\upsilon_2 = (m_1+m_2)V_y \end{matrix}$$

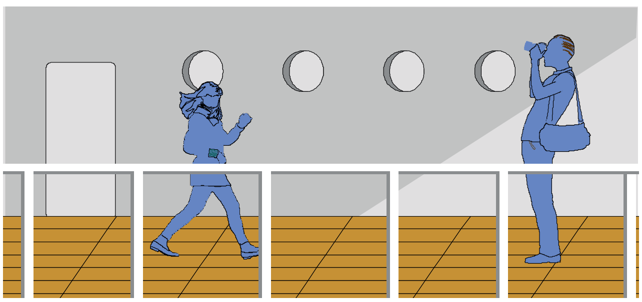
από όπου βρίσκουμε $V_x = \dfrac{m_1\upsilon_1}{m_1+m_2} = 4m/s$ και $V_y = \dfrac{m_2\upsilon_2}{m_1+m_2} = 3m/s$

$$\text{και} \quad V = \sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2} = 5m/s \quad \text{και} \quad \varepsilon\varphi\theta = \frac{V_y}{V_x} = \frac{3}{4}$$

5.5. Αδρανειακά και Μη Αδρανειακά Συστήματα

Η κίνηση ενός ανθρώπου ο οποίος μετακινείται πάνω σε ένα πλοίο που πλέει κατά μήκος της ακτής δε γίνεται αντιληπτή με τον ίδιο τρόπο από ένα παρατηρητή που κάθεται στο κατάστρωμα του πλοίου και από ένα παρατηρητή που κάθεται στην ακτή.

Στη φύση τα πάντα βρίσκονται σε κίνηση. Όταν βρισκόμαστε μέσα σε ένα αυτοκίνητο που κινείται, συνηθίζουμε να αντιμετωπίζουμε το δρόμο ως ακίνητο. Όμως δεν είναι ακίνητος. Ολόκληρη η Γη περιστρέφεται, γύρω από τον εαυτό της και γύρω από τον Ήλιο. Ούτε και ο Ήλιος είναι ακίνητος, κινείται στο διάστημα.



Η κίνηση ενός ανθρώπου στο κατάστρωμα δε γίνεται με τον ίδιο τρόπο αντιληπτή από κάποιον που βρίσκεται στο πλοίο και από κάποιον που βρίσκεται στην ακτή.

Σχήμα 5-9.

Προκειμένου να περιγράψουμε την κίνηση ενός σώματος, θεωρούμε αυθαίρετα ένα χώρο ακίνητο και μελετάμε την κίνηση ως προς το χώρο αυτό. Έτσι όταν αναφερόμαστε στην κίνηση ενός αυτοκινήτου θεωρούμε τη Γη ακίνητη. Όταν μελετάμε την κίνηση των πλανητών, θεωρούμε τον Ήλιο ακίνητο. Ο χώρος που κάθε φορά θεωρείται ακίνητος κατά τη μελέτη μιας κίνησης, ονομάζεται **σύστημα αναφοράς**.

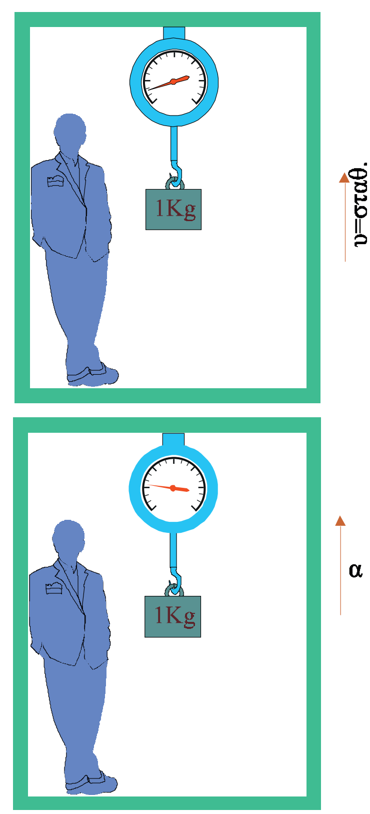
Προκύπτει εύλογα το ερώτημα, ποιο σύστημα αναφοράς πρέπει να διαλέγουμε κάθε φορά για να μελετήσουμε μια κίνηση;

Η πρώτη απάντηση ενός ρομαντικού θα ήταν ότι οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς και να διαλέξουμε θα ήταν το ίδιο μια και αν οι φυσικοί μας νόμοι είναι σωστοί πρέπει να ισχύουν σε οποιοδήποτε σύστημα.

Στην πράξη όμως, κάποια συστήματα αναφοράς είναι πιο βολικά από κάποια άλλα στη μελέτη των φαινομένων.

Ας υποθέσουμε ότι καθώς ταξιδεύουμε με ένα πολυτελές τρένο ευθύγραμμα ομαλά παίζουμε μπιλιάρδο. Ο παίκτης μπορεί να προβλέψει το πώς θα κινηθούν οι μπάλες μετά από ένα κτύπημα το ίδιο καλά όπως αν το τρένο ήταν ακίνητο. Αν όμως κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού το τρένο μεταβάλει την ταχύτητά του ο παίκτης θα βρεθεί προ εκπλήξεως γιατί οι μπάλες θα κινούνται με έναν απροσδόκητο τρόπο τον οποίο μάλιστα δεν θα μπορεί να ερμηνεύσει εύκολα μια και δεν υπάρχουν προφανείς δυνάμεις μέσα στο σύστημά του που να συνδέονται με την κίνηση των σφαιρών.

Ο παίκτης, αν γνωρίζει φυσική, θα αναρωτηθεί μήπως δεν ισχύει ο πρώτος νόμος του Newton (**νόμος της αδράνειας**) σύμφωνα με τον οποίο **ένα σώμα πάνω στο οποίο δεν ασκούνται δυνάμεις είτε ηρεμεί είτε κινείται ισοταχώς**. Όμως ένας παρατηρητής που είναι ακίνη-



Στη δεύτερη περίπτωση που το ασανσέρ επιταχύνεται ζυγαριά βρίσκει το σώμα βαρύτερο από όσο είναι στην πραγματικότητα. Ο παρατηρητής που βρίσκεται μέσα στο ασανσέρ αδυνατεί να δώσει εξήγηση.

Σχήμα 5-10.

τος έξω από το τρένο μπορεί να ερμηνεύσει μια χαρά την κίνηση των σφαιρών βλέποντας ότι το τραπέζι του μπιλιάρδου στρίβει μαζί με το τρένο και ότι οι σφαίρες συνεχίζουν να κινούνται ευθύγραμμα ομαλά, όπως ορίζει ο πρώτος νόμος του Newton.

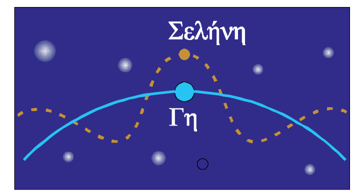
Φαίνεται λοιπόν ότι ένα ακίνητο τρένο, ή ένα τρένο που κινείται με σταθερή ταχύτητα είναι βολικά συστήματα αναφοράς, σε αντίθεση με ένα τρένο που η ταχύτητά του μεταβάλλεται, γιατί στις δυο πρώτες περιπτώσεις η κινητική συμπεριφορά των σωμάτων ερμηνεύεται απλά με τη χρήση των βασικών νόμων της μηχανικής.

Τα συστήματα αναφοράς στα οποία ισχύει ο νόμος της αδράνειας του Newton ονομάζονται αδρανειακά συστήματα.

Ένα σύστημα αναφοράς που κινείται με σταθερή ταχύτητα σε σχέση με ένα αδρανειακό σύστημα είναι και αυτό αδρανειακό σύστημα.

Τα συστήματα αναφοράς στα οποία δεν ισχύει ο νόμος της αδράνειας του Newton ονομάζονται μη αδρανειακά συστήματα.

Ένα σύστημα αναφοράς που επιταχύνεται σε σχέση με ένα αδρανειακό σύστημα είναι μη αδρανειακό σύστημα.



Ενώ από τη Γη η Σελήνη φαίνεται να κινείται κυκλικά, από το διάστημα η κίνησή της θα μπορούσε να φαίνεται όπως στο σχήμα.

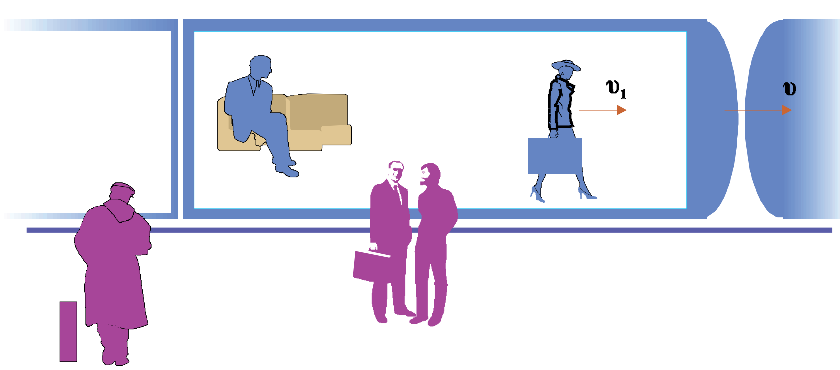
Σχήμα 5-11.

5.6. Σχετική Ταχύτητα σε Αδρανειακά Συστήματα

Η ταχύτητα ενός κινούμενου σώματος δε γίνεται με τον ίδιο τρόπο αντιληπτή από όλους τους παρατηρητές.

Ένας άνθρωπος καθιστός μέσα σε ένα τρένο που κινείται με ταχύτητα υ θεωρείται ότι είναι ακίνητος ως προς το τρένο αλλά κινείται με ταχύτητα υ ως προς ένα παρατηρητή που είναι ακίνητος στο σιδηροδρομικό σταθμό και παρακολουθεί το τρένο.

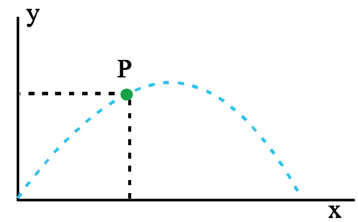
Εάν πάλι ο επιβάτης του τρένου περπατάει με ταχύτητα υ_1 μέσα στο τρένο στη φορά κίνησης του τρένου έχει ταχύτητα υ_1, ως προς το τρένο, αλλά ταχύτητα $\upsilon + \upsilon_1$ για τον ακίνητο παρατηρητή στον σταθμό.



Η ταχύτητα ενός επιβάτη του τρένου, γίνεται αντιληπτή με διαφορετικό τρόπο από ένα παρατηρητή Α που βρίσκεται ακίνητος μέσα στο τρένο και από κάποιο παρατηρητή Β που είναι ακίνητος στο σταθμό.

Σχήμα 5-12.

Για τη μελέτη της κίνησης είναι απαραίτητος ο καθορισμός της θέσης του σώματος κάθε στιγμή. Η θέση ενός σώματος στο χώρο προσδιορίζεται από τις συντεταγμένες του (x, y, z) σε ένα τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων. Στην περίπτωση που η κίνηση του σώματος γίνεται πάνω σε επίπεδο αρκούν δύο συντεταγμένες. Εμείς θα ασχοληθούμε μόνο με τέτοιες περιπτώσεις. Τα συμπεράσματα που θα βγουν εύκολα γενικεύονται και στον τρισδιάστατο χώρο.

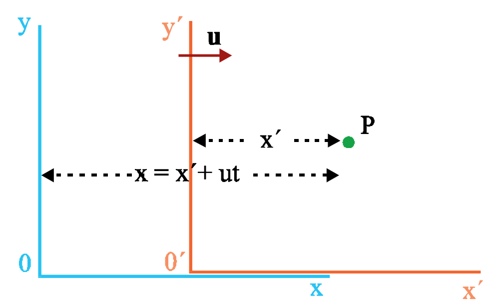


Η θέση ενός σώματος που εκτελεί πλάγια βολή προσδιορίζεται κάθε στιγμή από τις συντεταγμένες του x και y.
Σχήμα 5-13.

Επειδή η μελέτη μιας κίνησης σχετίζεται πάντα με κάποιο σύστημα αναφοράς, είναι απαραίτητο να βρεθεί κάποιος τρόπος ώστε δυο άνθρωποι (παρατηρητές) που παρατηρούν το ίδιο φαινόμενο από διαφορετικά συστήματα αναφοράς να μπορούν να συνεννοηθούν. Αυτό γίνεται με τη βοήθεια σχέσεων μετασχηματισμού της θέσης, της ταχύτητας και κάθε άλλου μεγέθους που πιθανόν γίνεται αντιληπτό με διαφορετικό τρόπο από διάφορα συστήματα αναφοράς.

Αν και υπάρχουν συστήματα αναφοράς με ιδιαίτερα μεγάλο ενδιαφέρον, όπως το σύστημα που στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα (τέτοιο σύστημα είναι η Γη), εμείς θα ασχοληθούμε μόνο με **μετασχηματισμούς ανάμεσα σε αδρανειακά συστήματα.** Κάθε τέτοιο σύστημα θα το φανταζόμαστε εφοδιασμένο με ένα σύστημα αξόνων ως προς το οποίο γίνονται οι μετρήσεις.

Έστω ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς Σ και ένα άλλο Σ' κινούμενο με σταθερή ταχύτητα $\mathbf{u}$ ως προς το Σ. Για λόγους απλούστευσης ας δεχτούμε ότι τα δύο συστήματα αναφοράς ταυτίζονταν τη χρονική στιγμή $t = 0$ και ότι η $\mathbf{u}$ είναι παράλληλη με τον άξονα Ox του Σ (σχ. 5.14).



Σχήμα 5-14.

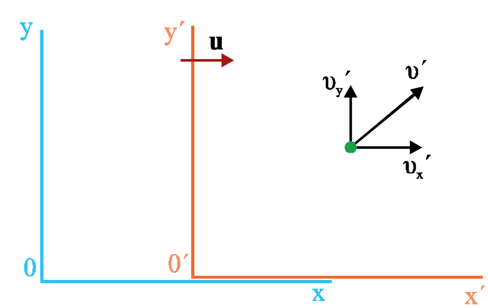
Η θέση ενός υλικού σημείου P στο σύστημα Σ' τη χρονική στιγμή t, δίνεται από τις συντεταγμένες x', y'.

Η θέση του ίδιου σημείου στο σύστημα Σ δίνεται από τις συντεταγμένες x, y.

Οι σχέσεις μεταξύ των συντεταγμένων του P στο ένα σύστημα και στο άλλο είναι

$$x = x' + ut$$
$$y = y'$$

Έστω ότι το σημείο P κινείται με σταθερή ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}'$, ως προς το σύστημα Σ'. Η $\boldsymbol{\upsilon}'$ αναλύεται στις υ'_x, υ'_y στο σύστημα Σ' (σχ. 5.15).



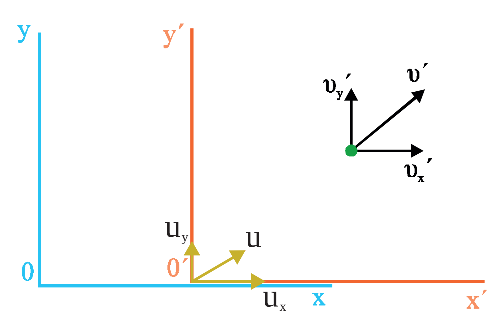
Σχήμα 5-15.

Από τους μετασχηματισμούς θέσης εύκολα προκύπτουν οι συνιστώσες της ταχύτητας του P όπως γίνεται αντιληπτή από το Σ.

$$x = x' + ut \text{ άρα } \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x'}{\Delta t} + u\frac{\Delta t}{\Delta t} \text{ οπότε } \upsilon_x = \upsilon'_x + u$$

$$y = y' \text{ άρα } \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y'}{\Delta t} \text{ οπότε } \upsilon_y = \upsilon'_y$$

Αν η ταχύτητα $\mathbf{u}$ με την οποία κινείται το Σ' ως προς το Σ δεν είναι παράλληλη στον Ox, αναλύουμε τη $\mathbf{u}$ στις συνιστώσες $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$ (σχ. 5.16).



Σχήμα 5-16.

Οι μετασχηματισμοί θέσης και ταχύτητας παίρνουν τη μορφή

$$x = x' + u_x t \qquad \upsilon_x = \upsilon'_x + u_x$$

$$y = y' + u_y t \qquad \upsilon_y = \upsilon'_y + u_y$$

διανυσματικά για την ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}' + \mathbf{u}$

Οι παραπάνω μετασχηματισμοί είναι γνωστοί ως **μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου.**

Από την εξίσωση $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}' + \mathbf{u}$ προκύπτει

$$\frac{\Delta \boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{\upsilon}'}{\Delta t} + \frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} \qquad (5.10)$$

και επειδή η $\mathbf{u}$ είναι σταθερή $\frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} = 0$

Από την (5.10) έχουμε ότι $\frac{\Delta \boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{\upsilon}'}{\Delta t}$ ή $\boxed{\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}'}$

$\mathbf{F} = m\boldsymbol{\alpha}$ και $\mathbf{F}' = m\boldsymbol{\alpha}'$ οπότε $\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{F}'}$

Όταν δηλαδή, ένα υλικό σημείο P δέχεται δύναμη και επιταχύνεται η δύναμη και η επιτάχυνση γίνονται αντιληπτές με τον ίδιο τρόπο και από τα δύο συστήματα αναφοράς, υπό τον όρο πάντα ότι τα Σ και Σ' είναι αδρανειακά, δηλαδή η $\mathbf{u}$ είναι σταθερή.

Τέλος, αν η ορμή ενός συστήματος σωμάτων διατηρείται ως προς το σύστημα αναφοράς Σ θα διατηρείται και ως προς το σύστημα αναφοράς Σ' . Το ίδιο ισχύει και με τη διατήρηση της ενέργειας.

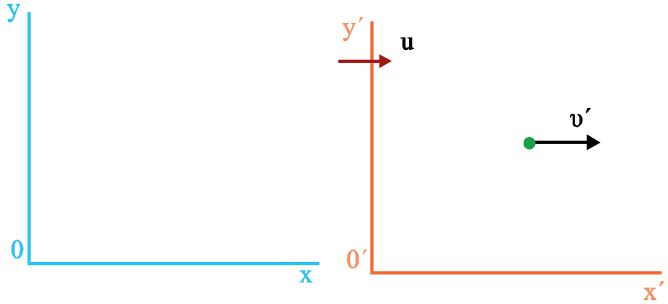
Γενικά, **οι νόμοι της φυσικής ισχύουν με τη μορφή που τους ξέρουμε στα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.**

Γαλιλαίος (1564-1642) Ιταλία. Θεμελιωτής της σύγχρονης μηχανικής. Διώχθηκε για τις απόψεις του από την επίσημη εκκλησία της εποχής του.

Εικόνα 5-5.

Παράδειγμα 5.3

Το σύστημα Σ' κινείται με ταχύτητα $\mathbf{u}$ ως προς το Σ. Ένα σώμα κινείται με ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}'$ στο Σ' (σχ. 5.17). Ποια είναι η ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}$ του σώματος ως προς το Σ;



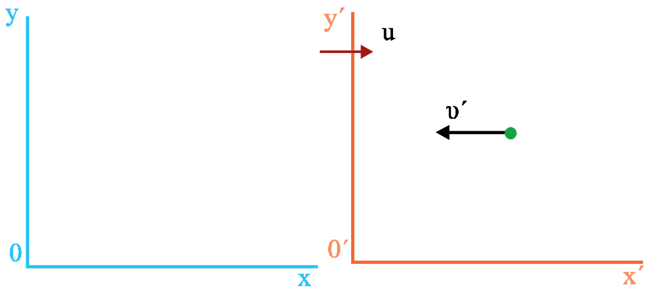
Σχήμα 5-17.

Απάντηση :

Ως προς το Σ σύμφωνα με τον μετασχηματισμό του Γαλιλαίου θα ισχύει $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}' + \mathbf{u}$. Μετατρέποντας τη σχέση αυτή σε αλγεβρική θα έχουμε $\upsilon = \upsilon' + u$.

Παράδειγμα 5.4

Στο προηγούμενο παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι η $\boldsymbol{\upsilon}'$ είναι αντίθετης φοράς και ότι όλα τα άλλα στοιχεία παραμένουν ίδια (σχ. 5.18). Ποια είναι τώρα η ταχύτητα του σώματος ως προς το Σ;



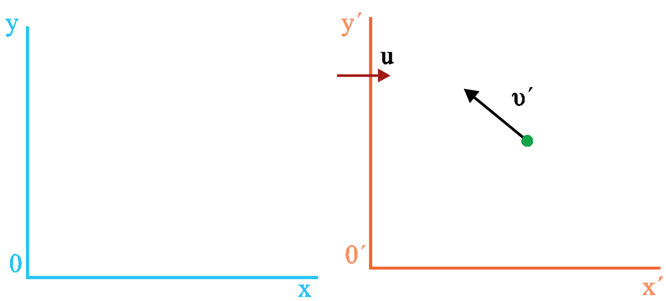
Σχήμα 5-18.

Απάντηση :

Σύμφωνα με τον μετασχηματισμό του Γαλιλαίου θα ισχύει $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}' + \boldsymbol{u}$ και αλγεβρικά θα έχουμε $\upsilon = -\upsilon' + u$.

Παράδειγμα 5.5

Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος ως προς το Σ αν η $\boldsymbol{\upsilon}'$ έχει μια τυχαία διεύθυνση πάνω στο επίπεδο $x'O'y'$ όπως στο σχήμα 5.19.



Σχήμα 5-19.

Απάντηση :

Σύμφωνα με τον μετασχηματισμό του Γαλιλαίου η ταχύτητα με την οποία κινείται το σώμα ως προς το Σ θα είναι $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}' + \boldsymbol{u}$ και αλγεβρικά θα έχουμε $\upsilon = \sqrt{\upsilon'^2 + u^2 + 2u\upsilon'\sigma\upsilon\nu\varphi}$ όπου φ η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα υ' και u.

5.7. Σύστημα Αναφοράς Κέντρου Μάζας

Σε περιπτώσεις όπου η ορμή διατηρείται, η εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ορμής μπορεί να απλουστευτεί με τη χρησιμοποίηση της έννοιας του κέντρου μάζας.

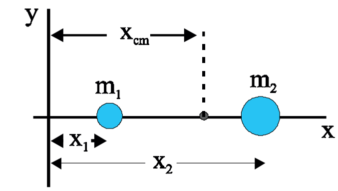
Στο προηγούμενο κεφάλαιο μιλήσαμε για το κέντρο μάζας ενός σώματος. Εδώ θα μιλήσουμε για το κέντρο μάζας ενός συστήματος σωμάτων.

Πού βρίσκεται το κέντρο μάζας;

Αν το σύστημα αποτελείται από ένα αριθμό σωμάτων πολύ μικρών διαστάσεων με μάζες m_1, m_2, ... Αν x_i, y_i, z_i είναι οι συντεταγμένες του σώματος m_i, το κέντρο μάζας του συστήματος είναι στο σημείο με συντεταγμένες

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i x_i}{M}$$

$$y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{M} \quad \text{και} \quad z_{cm} = \frac{\sum m_i z_i}{M}$$



Σχήμα 5-20.

όπου M η συνολική μάζα του συστήματος.

Για ένα σύστημα δύο σωμάτων μικρών διαστάσεων, που μπορούν να θεωρηθούν υλικά σημεία, η θέση του κέντρου μάζας βρίσκεται από τη σχέση

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

όπου x_1 και x_2 οι θέσεις των δύο μαζών σ' ένα σύστημα συντεταγμένων που σαν άξονα των x έχει την ευθεία που περνάει από τα δυο υλικά σημεία (σχ. 5.20).

Τα θραύσματα κινούνται με τέτοιο τρόπο ώστε το κέντρο μάζας τους να ακολουθεί την τροχιά που θα ακολουθούσε και αν δεν είχε εκραγεί το πυροτέχνημα.

Εικόνα 5-6.

Η κίνηση του κέντρου μάζας

Ο δεύτερος νόμος του Newton για ένα σύστημα σωμάτων έχει τη μορφή

$$\Sigma \mathbf{F}_{\varepsilon\xi} = M \boldsymbol{\alpha}_{cm} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

όπου $\Sigma \mathbf{F}_{\varepsilon\xi}$ το διανυσματικό άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων στο σύστημα, M η μάζα του συστήματος, $\boldsymbol{\alpha}_{cm}$ η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του συστήματος και $\mathbf{p}$ η ορμή του συστήματος.

Δηλαδή το κέντρο μάζας του συστήματος κινείται σαν ένα υποθετικό υλικό σημείο μάζας ίσης με τη συνολική μάζα του συστήματος αν θεωρήσουμε ότι όλες οι εξωτερικές δυνάμεις που δέχεται το σύστημα ασκούνται σ' αυτό.

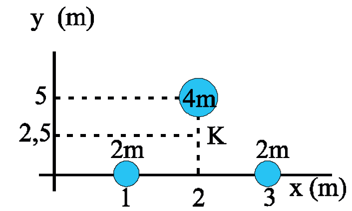
Από το δεύτερο νόμο προκύπτει ότι αν το σύστημα είναι μονωμένο ($\Sigma \mathbf{F}_{\varepsilon\xi} = 0$) η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή και το κέντρο μάζας του συστήματος κινείται με σταθερή ταχύτητα.

Εφόσον το κέντρο μάζας του συστήματος σε αυτές τις περιπτώσεις κινείται με σταθερή ταχύτητα, ένα σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο το κέντρο μάζας είναι ακίνητο είναι ένα αδρανειακό σύστημα. Αυτό το σύστημα αναφοράς θα το ονομάζουμε **σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας**.

Αν για την αντιμετώπιση ενός προβλήματος στο οποίο η ορμή διατηρείται επιλέξουμε ως σύστημα αναφοράς το σύστημα του κέντρου μάζας το πρόβλημα απλοποιείται σημαντικά. Ως προς αυτό το σύστημα το κέντρο μάζας είναι ακίνητο και η συνολική ορμή του συστήματος μηδέν.

Παράδειγμα 5.6

Οι συντεταγμένες καθενός από τρία σώματα είναι (1,0), (3,0) και (2,5) (σχ. 5.21). Οι μάζες των σωμάτων είναι $2m$, $2m$ και $4m$ αντίστοιχα. Να προσδιοριστεί η θέση του κέντρου μάζας του συστήματος.



Σχήμα 5-21.

Απάντηση :

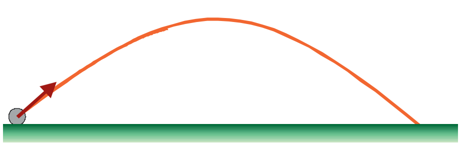
$$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{M} = \frac{2\cancel{m}x_1 + 2\cancel{m}x_2 + 4\cancel{m}x_3}{2\cancel{m} + 2\cancel{m} + 4\cancel{m}} = \frac{2\cdot 1 + 2\cdot 3 + 4\cdot 2}{8}m = \frac{16}{8}m = 2\ m$$

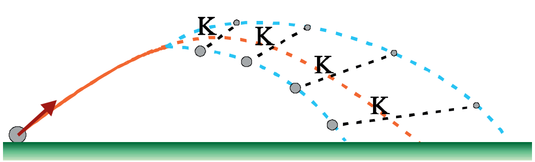
$$y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{M} = \frac{2\cdot 0 + 2\cdot 0 + 4\cdot 5}{8}m = \frac{20}{8}m = 2,5\ m$$

Άρα το κέντρο μάζας K βρίσκεται στη θέση (2, 2,5).

Παράδειγμα 5.7

Βλήμα βάλλεται με αρχική ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon_0}$ υπό γωνία φ ως προς οριζόντιο επίπεδο. Υπό την επίδραση του βάρους του το βλήμα θα εκτελέσει παραβολική τροχιά και θα επιστρέψει στο οριζόντιο επίπεδο (σχ. 5.22α). Το βλήμα σε κάποιο σημείο της τροχιάς του εκρήγνυται και χωρίζεται σε δύο θραύσματα (σχ. 5.22β). Τι κίνηση θα κάνει το κέντρο μάζας του συστήματος των θραυσμάτων;


(α)



(β)

Σχήμα 5-22.

Απάντηση :

Η συνισταμένη δύναμη στο σύστημα των θραυσμάτων δηλαδή το διανυσματικό άθροισμα των βαρών τους είναι ίδια με το συνολικό βάρος του βλήματος. Η δύναμη λοιπόν που ασκείται στο κέντρο μάζας του συστήματος είναι ίδια πριν και μετά την έκρηξη, οπότε το κέντρο μάζας του συστήματος θα διαγράψει την ίδια τροχιά που θα διέγραφε και αν δεν είχε γίνει η έκρηξη.

Παράδειγμα 5.8

Κρατάμε δύο μικρές αντίθετα φορτισμένες σφαίρες ακίνητες σε απόσταση $l = 0,5$ m τη μία από την άλλη και στη συνέχεια τις αφήνουμε ελεύθερες να κινηθούν. Οι σφαίρες έχουν μάζες $m_1 = 0,001$kg και $m_2 = 0,002$ kg και φορτία q και $-q$ αντίστοιχα. Αν στις σφαίρες δεν ασκούνται άλλες δυνάμεις εκτός από τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις να βρεθεί σε πόση απόσταση από την αρχική θέση της m_1 θα συναντηθούν οι δύο σφαίρες.

Απάντηση :

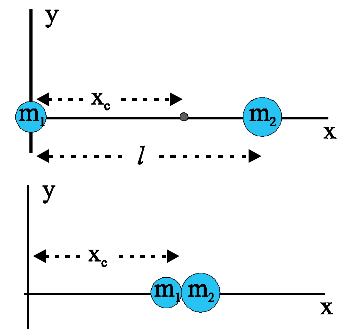
Επιλέγουμε σαν σύστημα συντεταγμένων αυτό του οποίου η αρχή ταυτίζεται με την αρχική θέση της m_1 και ο άξονας των x με τη διάκεντρο των δυο σφαιρών (σχ. 5.23). Η αρχική θέση της m_1 είναι στο $x_1 = 0$ και αυτή της m_2 στο $x_2 = l$.

Το κέντρο μάζας των δύο σωμάτων βρίσκεται σε οριζόντια απόσταση από την αρχή των αξόνων

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = 0,33\ m$$

Αρχικά τα σώματα είναι ακίνητα άρα και το κέντρο μάζας τους είναι ακίνητο.

Η συνισταμένη των δυνάμεων στο σύστημα είναι μηδέν, άρα η ορμή του πρέπει να διατηρείται και το κέντρο μάζας να διατηρεί την αρχική του κινητική κατάσταση δηλαδή να παραμένει ακίνητο σ' όλη τη διάρκεια της κίνησης των σφαιρών. Οι σφαίρες θα συναντηθούν πάνω στο κέντρο μάζας τους, δηλαδή σε απόσταση 0,33 m από την αρχική θέση της m_1.



Σχήμα 5-23.

5.8. Προώθηση του Πυραύλου

Η προώθηση των πυραύλων στηρίζεται στην αρχή διατήρησης της ορμής.

Ο πύραυλος καίει τα καύσιμα που αρχικά βρίσκονται μέσα του και εκτοξεύει τα καυσαέρια προς τα πίσω. Τα καυσαέρια δέχονται μία δύναμη από τον πύραυλο και ασκούν αντίστοιχα μία αντίθετη δύναμη σ' αυτόν που αποτελεί και την προωστική δύναμη του πυραύλου.

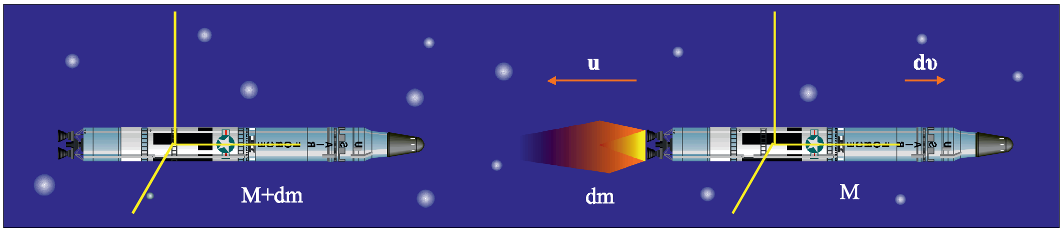
Ας υποθέσουμε ότι εξετάζουμε έναν πύραυλο που κινείται στο διάστημα (μακριά από κάθε βαρυτική έλξη).

Θα εφαρμόσουμε την ΑΔΟ ως προς το σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας. Εφόσον δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις το κέντρο μάζας (άρα και το σύστημα αναφοράς μας) δε θα μεταβάλλει την κινητική του κατάσταση, ανεξάρτητα με οποιαδήποτε μεταβολή συμβεί στην κινητική κατάσταση των τμημάτων που απαρτίζουν το σύστημα. Επιλέγουμε τον άξονα x ώστε να ταυτίζεται με τη διεύθυνση κίνησης του πυραύλου.

Ο πύραυλος κάποια χρονική στιγμή έχει μάζα $M + dm$ και μηδενική ταχύτητα ως προς το σύστημα αναφοράς που επιλέξαμε. Ο πύραυλος, σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα dt, εκτοξεύει προς τα πίσω μια ποσότητα καυσαερίων dm με ταχύτητα $\mathbf{u}$ ως προς το κέντρο μάζας. Πρακτικά η ταχύτητα αυτή είναι και η ταχύτητα των καυσαερίων ως προς τον πύραυλο. Ο πύραυλος τώρα έχει αυξήσει την ταχύτητά του σε σχέση με πριν κατά $d\boldsymbol{\upsilon}$ και η μάζα του έχει ελαττωθεί κατά dm. Ως προς το κέντρο μάζας του συστήματος κινείται με $d\boldsymbol{\upsilon}$ προς τα μπροστά. (Σχ. 5.24).

Ο πύραυλος προωθείται εκτοξεύοντας προς τα πίσω καυσαέρια.

Εικόνα 5-7.



Σχήμα 5-24.

Εφόσον το σύστημα είναι μονωμένο εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής με τις ταχύτητες να αναφέρονται όλες στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας.

$$p_{πριν} = p_{μετά} \quad \text{άρα} \quad 0 = -dmu + Md\upsilon$$

Θέλουμε τώρα να υπολογίσουμε την προωστική δύναμη που δέχεται ο πύραυλος.

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει

$$Md\upsilon = dmu$$

και

$$M\frac{d\upsilon}{dt} = u\frac{dm}{dt}$$

δηλαδή

$$Ma = u\frac{dm}{dt}$$

και τελικά

$$\boxed{F = u\frac{dm}{dt}}$$

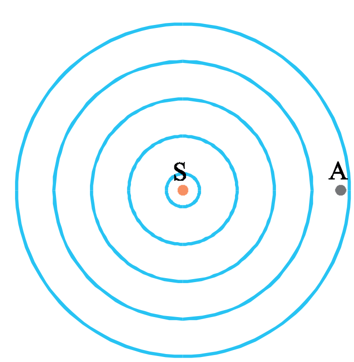
όπου $\frac{dm}{dt}$ ο ρυθμός με τον οποίο εκτοξεύονται τα καυσαέρια του πυραύλου.

5.9. Φαινόμενο Doppler

Εάν καθόμαστε ακίνητοι στην αποβάθρα ενός σταθμού την ώρα που πλησιάζει ένα τρένο κινούμενο με σταθερή ταχύτητα, ακούμε τον ήχο της σειρήνας του οξύτερο (μεγαλύτερης συχνότητας), από ό,τι όταν το τρένο απομακρύνεται από εμάς, αφού μας έχει προσπεράσει.

Η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο μηχανοδηγός είναι σ' όλη τη διάρκεια της κίνησης σταθερή. Η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβανόμαστε όταν το τρένο μάς πλησιάζει είναι μεγαλύτερη από αυτήν που αντιλαμβάνεται ο μηχανοδηγός. Αντίθετα η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβανόμαστε όταν το τρένο απομακρύνεται είναι μικρότερη από αυτήν που αντιλαμβάνεται ο μηχανοδηγός.

Η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής δεν είναι ίδια με αυτήν που εκπέμπει μία πηγή όταν ο παρατηρητής και η πηγή βρίσκονται σε σχετική κίνηση μεταξύ τους. Το φαινόμενο αυτό λέγεται φαινόμενο Doppler.



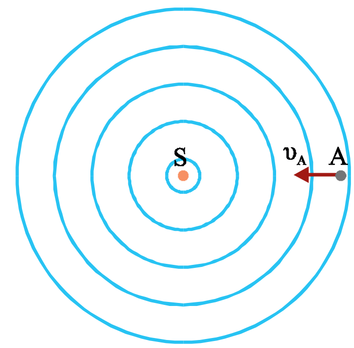
Σχήμα 5-25.

Ακίνητη πηγή - ακίνητος παρατηρητής

Μία ακίνητη ως προς το μέσον διάδοσης (αέρας) πηγή S που εκπέμπει ήχο συχνότητας f_S δημιουργεί γύρω της ένα σφαιρικό ηχητικό κύμα που διαδίδεται με ταχύτητα υ. Ισχύει $f_S = \upsilon / \lambda$ όπου λ το μήκος κύματος του ήχου που εκπέμπει η πηγή. Στο σχήμα 5.25 βλέπουμε ένα στιγμιότυπο του κύματος. Οι ομόκεντρες περιφέρειες παριστάνουν τα διαδοχικά μέγιστα του κύματος για μία δεδομένη στιγμή και απέχουν μεταξύ τους ένα μήκος κύματος λ. Ένας παρατηρητής A που είναι επίσης ακίνητος ως προς τον αέρα μετρώντας τα μέγιστα που φτάνουν σ' αυτόν στη μονάδα του χρόνου υπολογίζει τη συχνότητα του ήχου f_A όπως την αντιλαμβάνεται αυτός. Όμως όσα μέγιστα παράγει η πηγή στη μονάδα του χρόνου τόσα πάλι στη μονάδα του χρόνου φτάνουν στον παρατηρητή, άρα $f_A = f_S = \upsilon / \lambda$.

Ακίνητη πηγή - κινούμενος παρατηρητής

Ο παρατηρητής A πλησιάζει προς την ακίνητη ηχητική πηγή με ταχύτητα υ_A (σχ. 5.26). Τώρα στον παρατηρητή φτάνουν περισσότερα μέγιστα στη μονάδα του χρόνου από όσα παράγει στον ίδιο χρόνο η πηγή. Η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται ο ήχος ως προς τον παρατηρητή θα είναι $\upsilon + \upsilon_A$. Η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής θα είναι $f_A = \dfrac{\upsilon + \upsilon_A}{\lambda}$.



Σχήμα 5-26.

Αν θέσουμε όπου $\lambda = \dfrac{\upsilon}{f_S}$ προκύπτει $f_A = \dfrac{\upsilon + \upsilon_A}{\upsilon / f_S}$

και τελικά $$f_A = \frac{\upsilon + \upsilon_A}{\upsilon} f_S$$

Ο παρατηρητής ακούει ήχο μεγαλύτερης συχνότητας (οξύτερο) από αυτή που παράγει η πηγή.

Αν ο παρατηρητής απομακρύνεται από την ακίνητη ηχητική πηγή με ταχύτητα υ_A, στη μονάδα του χρόνου στον παρατηρητή φτάνουν λιγότερα μέγιστα από αυτά που παράγει η πηγή στον ίδιο χρόνο και η συχνότητα που θα αντιλαμβάνεται θα είναι

$$f_A = \frac{\upsilon - \upsilon_A}{\upsilon} f_S$$

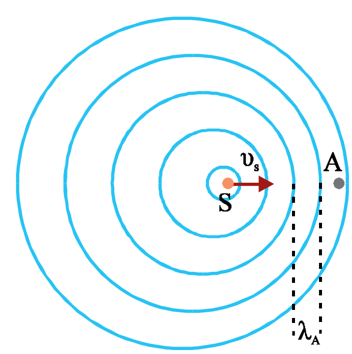
Ο παρατηρητής ακούει ήχο μικρότερης συχνότητας (βαρύτερο) από αυτή που παράγει η πηγή.

Συνοψίζοντας τις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε στη σχέση

$$\boxed{f_A = \frac{\upsilon \pm \upsilon_A}{\upsilon} f_S}$$

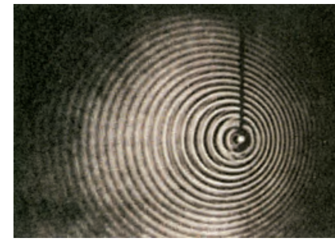
όπου το (+) ισχύει όταν ο παρατηρητής πλησιάζει προς την πηγή και το (-) όταν απομακρύνεται από αυτή.

Κινούμενη πηγή - ακίνητος παρατηρητής



Σχήμα 5-27.

Υποθέτουμε τώρα ότι η πηγή κινείται ισοταχώς με ταχύτητα υ_s πλησιάζοντας τον ακίνητο παρατηρητή (σχ. 5.27). Η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται ο ήχος ως προς τον αέρα θα είναι πάλι υ γιατί η ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος εξαρτάται μόνο από το μέσον διάδοσης. Το μήκος κύματος που φτάνει στον παρατηρητή μικραίνει γιατί η πηγή ακολουθεί τα κύματα με αποτέλεσμα τα μέγιστα να πλησιάζουν μεταξύ τους.



Μία πηγή παράγει κύματα στην επιφάνεια υγρού και ταυτόχρονα κινείται.

Εικόνα 5-8.

Ο παρατηρητής A αντιλαμβάνεται ως μήκος κύματος την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών μεγίστων που φτάνουν σ' αυτόν. Ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα στην εκπομπή δύο μεγίστων είναι μία περίοδος (T). Αν τη στιγμή t η πηγή εκπέμπει ένα μέγιστο τη στιγμή $t + T$ το μέγιστο θα έχει πλησιάσει τον παρατηρητή κατά λ αλλά και η πηγή θα τον έχει πλησιάσει κατά $\upsilon_S T$. Τότε εκπέμπεται από την πηγή το επόμενο μέγιστο. Η απόσταση ανάμεσα στα δύο διαδοχικά μέγιστα είναι $\lambda - \upsilon_S T$. Αυτή την απόσταση αντιλαμβάνεται ως μήκος κύματος ο παρατηρητής.

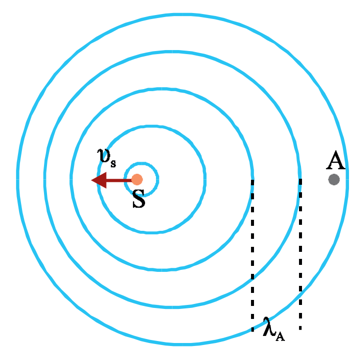
Επομένως $\lambda_A = \lambda - \upsilon_S T$ ή $\lambda_A = \dfrac{\upsilon}{f_S} - \dfrac{\upsilon_S}{f_S} = \dfrac{\upsilon - \upsilon_S}{f_S}$

όμως $$f_A = \frac{\upsilon}{\lambda_A} = \frac{\upsilon}{\dfrac{\upsilon - \upsilon_S}{f_S}}$$

και τελικά $$f_A = \left(\frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_S}\right) f_S$$

δηλαδή η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι μεγαλύτερη από αυτήν που εκπέμπει η πηγή.

Στην περίπτωση που η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή με σταθερή ταχύτητα υ_s (σχ. 5.28), το μήκος κύματος που φτάνει στον παρατηρητή αυξάνεται κατά τον όρο $\upsilon_S T$. Επαναλαμβάνοντας τον προηγούμενο συλλογισμό καταλήγουμε στη σχέση $f_A = \left(\dfrac{\upsilon}{\upsilon + \upsilon_S}\right) f_S$



Σχήμα 5-28.

από την οποία φαίνεται ότι η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι μικρότερη από τη συχνότητα του ήχου που εκπέμπει η πηγή.

Συνθέτοντας τις δύο περιπτώσεις κίνησης της πηγής σε μία σχέση έχουμε

$$\boxed{f_A = \left(\frac{\upsilon}{\upsilon \mp \upsilon_S}\right) f_S}$$

όπου το (-) ισχύει όταν η πηγή πλησιάζει τον παρατηρητή και το (+) όταν απομακρύνεται απ' αυτόν.

Εάν κινούνται τόσο η πηγή όσο και ο παρατηρητής σε σχέση με το μέσον διάδοσης τότε η σχέση που δίνει την συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι

$$\boxed{f_A = \left(\frac{\upsilon \pm \upsilon_A}{\upsilon \mp \upsilon_S}\right) f_S}$$

Ο παρατηρητής ακούει ήχο με συχνότητα μεγαλύτερη από τη συχνότητα της πηγής όταν η μεταξύ τους απόσταση μειώνεται και με συχνότητα μικρότερη από τη συχνότητα της πηγής όταν η απόστασή τους μεγαλώνει.

Το φαινόμενο Doppler ισχύει για κάθε μορφής κύμανση ακόμη και για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, όπως το φως. Το φαινόμενο Doppler δίνει αισθητά αποτελέσματα μόνο αν οι πηγές του φωτός ή οι παρατηρητές κινούνται με ταχύτητες συγκρίσιμες με την ταχύτητα του φωτός.

Παρατηρώντας το φως που εκπέμπει ένα άστρο βλέπουμε ότι τα μήκη κύματος που εκπέμπονται από τα στοιχεία του άστρου είναι διαφοροποιημένα σε σχέση με τα μήκη κύματος που εκπέμπουν τα ίδια στοιχεία πάνω στη Γη. Από τη διαφοροποίηση αυτή, που οφείλεται στο φαινόμενο Doppler, βγάζουμε συμπεράσματα για την ταχύτητα με την οποία κινείται το άστρο σε σχέση με τη Γη.

Η σχέση που περιγράφει το φαινόμενο Doppler για το φως είναι διαφορετική από αυτήν στην οποία καταλήξαμε για τον ήχο. Η διαφοροποίηση οφείλεται στην ιδιαιτερότητα του φωτός, που θα τη μελετήσουμε εκτενέστερα στο επόμενο κεφάλαιο. Επιγραμματικά αναφέρουμε ότι το φως δεν χρειάζεται μέσον για να διαδοθεί και ότι η ταχύτητα διάδοσής του είναι η ίδια για όλα τα συστήματα αναφοράς.

Η αστυνομία είναι εφοδιασμένη με συσκευές ραντάρ που ελέγχουν τις ταχύτητες των οχημάτων. Το ραντάρ, ακίνητο ως προς το δρόμο, εκπέμπει ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα το οποίο ανακλάται πάνω στο διερχόμενο όχημα. Το κύμα επιστρέφει στο ραντάρ με συχνότητα ελαφρά διαφορετική μια και η πηγή του (το όχημα) κινείται σε σχέση με τον παρατηρητή (ραντάρ). Από τη διαφορά της συχνότητας ανάμεσα στο κύμα που εκπέμπεται και αυτό που επιστρέφει η συσκευή υπολογίζει την ταχύτητα του οχήματος.

Παράδειγμα 5.9

Ένα τρένο κινείται ισοταχώς με ταχύτητα $50\ \mathrm{m/s}$ και χρησιμοποιεί τη σφυρίχτρα του, που εκπέμπει συνεχώς ήχο συχνότητας $400\ \mathrm{Hz}$, σύμφωνα με το μηχανοδηγό του. Το τρένο περνάει από σταθμό χωρίς να σταματήσει. Τι συχνότητα αντιλαμβάνεται ο ακίνητος σταθμάρχης καθώς το τρένο πλησιάζει και τι συχνότητα καθώς το τρένο απομακρύνεται. Ο ήχος διαδίδεται στον αέρα με ταχύτητα $343\ \mathrm{m/s}$.

Απάντηση :

Η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο σταθμάρχης, όταν το τρένο πλησιάζει το σταθμό είναι

$$f_A = \left(\frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_S}\right) f_S$$

και όταν το τρένο απομακρύνεται από το σταθμό

$$f_A' = \left(\frac{\upsilon}{\upsilon + \upsilon_S}\right) f_S$$

Άρα $$f_A = \left(\frac{343m/s}{343m/s - 50m/s}\right) 400Hz = 468Hz$$

και $$f_A' = \left(\frac{343m/s}{343m/s + 50m/s}\right) 400Hz = 349Hz$$

Παράδειγμα 5.10

Ένα περιπολικό που κινείται με ταχύτητα 140 km/h εκπέμπει με τη σειρήνα του ήχο συχνότητας $500Hz$. Ποια συχνότητα ακούει οδηγός αυτοκινήτου που κινείται στον ίδιο δρόμο, αντίθετα με το περιπολικό με ταχύτητα $110\ km/h$, α) όταν πλησιάζει στο περιπολικό και β) όταν απομακρύνεται από αυτό; Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι $343\ m/s$.

Απάντηση :

$140\ km/h = 39{,}9\ m/s$
$110\ km/h = 30{,}6\ m/s$

Όσο τα οχήματα πλησιάζουν το ένα το άλλο $f_A = \left(\dfrac{\upsilon + \upsilon_A}{\upsilon - \upsilon_S}\right) f_S$

Άρα $f_A = \left(\dfrac{343m/s + 30{,}6m/s}{343m/s - 39{,}9m/s}\right) 500Hz = 616{,}3Hz$

Όταν τα οχήματα απομακρύνονται μεταξύ τους $f_A = \left(\dfrac{\upsilon - \upsilon_A}{\upsilon + \upsilon_S}\right) f_S$

Άρα $f_A = \left(\dfrac{343m/s - 30{,}6m/s}{343m/s + 39{,}9m/s}\right) 500Hz = 408Hz$

Σύνοψη

Κατά τη διάρκεια μιας κρούσης η ορμή των σωμάτων που συγκρούονται διατηρείται.

Ανάλογα με τις διευθύνσεις των ταχυτήτων των σωμάτων που συγκρούονται οι κρούσεις διακρίνονται ως **κεντρικές, έκκεντρες και πλάγιες**.

Στην **ελαστική** κρούση η κινητική ενέργεια του συστήματος διατηρείται. Στην **ανελαστική** κρούση μέρος της κινητικής ενέργειας του συστήματος μετατρέπεται σε θερμότητα.

Αδρανειακά συστήματα ονομάζονται τα συστήματα αναφοράς στα οποία ισχύει ο νόμος της αδράνειας του Newton.

Ένα σύστημα αναφοράς που κινείται με σταθερή ταχύτητα σε σχέση με ένα αδρανειακό σύστημα είναι και αυτό αδρανειακό.

Τα συστήματα αναφοράς στα οποία δεν ισχύει ο νόμος της αδράνειας του Newton ονομάζονται **μη αδρανειακά συστήματα**.

Ένα σύστημα αναφοράς που κινείται με επιτάχυνση σε σχέση με ένα αδρανειακό σύστημα είναι μη αδρανειακό σύστημα.

Ένα σύστημα αναφοράς Σ' κινείται ισοταχώς με ταχύτητα $\mathbf{u}$ ως προς άλλο σύστημα αναφοράς Σ. Η θέση, η ταχύτητα, η επιτάχυνση ενός σώματος, καθώς και η δύναμη που δέχεται το σώμα όπως γίνονται αντιληπτές από παρατηρητή που είναι ακίνητος στο Σ σε σχέση με αυτές που αντιλαμβάνεται παρατηρητής ακίνητος στο Σ' δίνονται από τους **μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου:**

$$x = x' + u_x t \qquad \upsilon_x = \upsilon'_x + u_x \qquad \alpha = \alpha'$$
$$y = y' + u_y t \qquad \upsilon_y = \upsilon'_y + u_y \qquad F = F'$$

Το κέντρο μάζας ενός συστήματος σωμάτων έχει συντεταγμένες

$$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{M} \qquad y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{M} \qquad z_{cm} = \frac{\sum m_i z_i}{M}$$

Αν ένα σύστημα σωμάτων είναι μονωμένο το κέντρο μάζας του κινείται με σταθερή ταχύτητα.

Ένα σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο το κέντρο μάζας συστήματος σωμάτων είναι ακίνητο ονομάζεται **σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας**. Αν το σύστημα των σωμάτων είναι μονωμένο το σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας είναι αδρανειακό σύστημα.

Η προωστική δύναμη ενός πυραύλου δίνεται από τη σχέση

$$F = u\frac{dm}{dt}$$

όπου u η ταχύτητα με την οποία εκπέμπονται τα καυσαέρια ως προς τον πύραυλο και dm/dt ο ρυθμός εκπομπής των καυσαερίων.

Φαινόμενο Doppler λέγεται το φαινόμενο κατά το οποίο ένας παρατηρητής αντιλαμβάνεται συχνότητα διαφορετική από αυτήν που εκπέμπει μια πηγή κύματος λόγω της σχετικής κίνησης μεταξύ τους.

Εάν κινούνται τόσο η πηγή όσο και ο παρατηρητής σε σχέση με το μέσον διάδοσης η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι

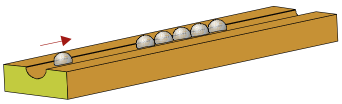
$$f_A = \left(\frac{\upsilon \pm \upsilon_A}{\upsilon \mp \upsilon_S}\right) f_S$$

Όταν μειώνεται η απόσταση πηγής - παρατηρητή η συχνότητα που ακούει ο παρατηρητής είναι μεγαλύτερη από αυτήν που εκπέμπει η πηγή, ενώ όταν αυξάνεται η μεταξύ τους απόσταση η παρατηρούμενη συχνότητα είναι μικρότερη της εκπεμπόμενης.

Δραστηριότητες

1. Κρούση σφαιρών

Θα χρειαστείτε έξι ίδιες μπίλιες και ένα λούκι - οδηγό (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και ένα σχολικό χάρακα με λούκι).
Τοποθετήστε τις πέντε μπίλιες στο λούκι -οδηγό, τη μια δίπλα στην άλλη, ώστε να εφάπτονται. Ρίξτε την έκτη μπίλια με φόρα, όπως δείχνει το σχήμα 5.29. Θα δείτε ότι η μπίλια που ρίξατε ακινητοποιείται μετά την κρούση και ότι η τελευταία στη σειρά από τις ακίνητες εκτοξεύεται. Πώς εξηγείται αυτό που είδατε;



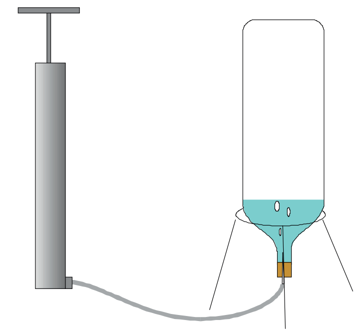
Σχήμα 5-29.

2. Εκτόξευση «πυραύλου»

Θα χρειαστείτε : μια τρόμπα ποδηλάτου με σωλήνα, μια βελόνα τρόμπας, σαν αυτές που χρησιμοποιούμε για να φουσκώσουμε τις μπάλες, ένα πλαστικό μπουκάλι του λίτρου από αναψυκτικό, ένα φελλό, ένα λεπτό τρυπάνι.

Ανοίξτε μια τρύπα στο φελλό με το τρυπάνι, τέτοιας διαμέτρου ώστε να περνάει η βελόνα της τρόμπας και να σφηνώνει. Γεμίστε το μπουκάλι κατά το ένα τέταρτο με νερό, κλείστε το με τον φελλό και συνδέστε το με την τρόμπα όπως στο σχήμα 5.30. Αρχίστε να τρομπάρετε. Ο φελλός γρήγορα θα εκτιναχθεί προς τα κάτω, ενώ το μπουκάλι θα εκτοξευτεί προς τα πάνω.

Κάντε το πείραμα σε ανοιχτό χώρο, μακριά από κτίρια και καλώδια της ΔΕΗ. Την ώρα που τρομπάρετε κρατήστε μια απόσταση ασφαλείας.



Σχήμα 5-30.

3. Φαινόμενο Doppler

Θα χρειαστείτε : ένα ποδήλατο μια σφυρίχτρα, και.... ένα φίλο σας.

Ζητήστε από το φίλο σας να περάσει από μπροστά σας οδηγώντας αργά το ποδήλατο και σφυρίζοντας συνέχεια. Παρατηρείτε κάποια μεταβολή στη συχνότητα του ήχου;

Ζητήστε τώρα από το φίλο σας να επαναλάβει το ίδιο οδηγώντας όσο μπορεί πιο γρήγορα. Παρατηρείτε τώρα κάποια αυξομείωση στη συχνότητα του ήχου; Πού οφείλεται η διαφορά ανάμεσα στην πρώτη παρατήρηση και τη δεύτερη;

Πολύ ενδιαφέρον το φαινόμενο Doppler!

Εικόνα 5-9.

Ερωτήσεις

Κρούσεις

5.1 Μπορεί ένα σύστημα σωμάτων να έχει κινητική ενέργεια χωρίς να έχει ορμή;
Ισχύει το ίδιο και στην περίπτωση ενός σώματος;

5.2 Συμπληρώστε τα κενά:
Δύο σφαίρες με μάζες $m_1 = 2\ \text{kg}$ και $m_2 = 3\ \text{kg}$, που κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις και συγκρούονται πλαστικά, έχουν πριν τη σύγκρουσή τους ταχύτητες $\upsilon_1 = 3\ \text{m/s}$ και $\upsilon_2 = 3\ \text{m/s}$. Η ορμή της πρώτης σφαίρας πριν τη σύγκρουση έχει μέτρο................kg m/s και της δεύτερης .... kg m/s. Η ορμή του συστήματος των δύο σφαιρών πριν την κρούση έχει μέτρο................kg m/s και μετά την κρούση................kg m/s.

5.3 Ποιο από τα παρακάτω μεγέθη διατηρείται σε κάθε κρούση;
α) Η κινητική ενέργεια συστήματος.
β) Η μηχανική ενέργεια.
γ) Η ορμή του.
Επιλέξτε το σωστό.

5.4 Κατά την ελαστική κρούση δύο σωμάτων
α) η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή.
β) η κινητική ενέργεια κάθε σώματος παραμένει σταθερή.

γ) η κινητική ενέργεια του συστήματος αυξάνεται.
δ) η κινητική ενέργεια του συστήματος μειώνεται.
Επιλέξτε τη σωστή πρόταση.

5.5 Κατά την πλαστική κρούση δύο σωμάτων η μηχανική ενέργεια του συστήματος
α) παραμένει σταθερή.
β) αυξάνεται.
γ) μειώνεται.
Επιλέξτε το σωστό.

5.6 Δύο σφαίρες ίσων μαζών κινούνται πάνω στην ίδια ευθεία και κατά την ίδια φορά με ταχύτητες $\upsilon_1 = 10\ m/s$ και $\upsilon_2 = 20\ m/s$. Αν μετά την κρούση η σφαίρα 1 έχει ταχύτητα $\upsilon_1' = 16\ m/s$ τι συμπέρασμα βγάζεται για την κρούση; Είναι ελαστική ή όχι;

5.7 Μια σφαίρα Α συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα Β, ίσης μάζας. Η ταχύτητα της σφαίρας Α μετά την κρούση
α) θα είναι ίση με την ταχύτητα που είχε πριν την κρούση.
β) θα είναι αντίθετη της ταχύτητας που είχε πριν την κρούση.
γ) θα είναι ίση με την ταχύτητα που θα αποκτήσει η σφαίρα Β.
δ) θα μηδενιστεί.
Επιλέξτε τη σωστή πρόταση.

5.8 Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές;
α) Στις μετωπικές κρούσεις δύο σφαιρών οι ταχύτητες των σωμάτων πριν και μετά την κρούση έχουν την ίδια διεύθυνση.
β) Κατά την ελαστική κρούση δύο σφαιρών η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή.
γ) Κατά την πλαστική κρούση δύο σωμάτων η ενέργεια του συστήματος μεταβάλλεται.
δ) Αν η μετωπική κρούση δύο σφαιρών με ίσες μάζες είναι ελαστική, οι σφαίρες ανταλλάσσουν ταχύτητες.

5.9 Σώμα μάζας m κινείται οριζόντια με ταχύτητα υ. Στην πορεία του συγκρούεται ελαστικά με κατακόρυφο τοίχο. Η μεταβολή στην ορμή του σώματος έχει μέτρο: α) 0; β) $m\upsilon/2$; γ) $m\upsilon$; δ) $2m\upsilon$;

Συστήματα αναφοράς

5.10 Ένας άνθρωπος που είναι ακίνητος μέσα σε τρένο το οποίο κινείται με σταθερή οριζόντια ταχύτητα, ρίχνει κατακόρυφα προς τα πάνω ένα μικρό αντικείμενο. Περιγράψτε την τροχιά του σώματος όπως την αντιλαμβάνεται ο άνθρωπος που το έριξε και όπως την αντιλαμβάνεται ένας ακίνητος παρατηρητής που βρίσκεται στο σταθμό.

5.11 Εάν θεωρήσουμε τη Γη αδρανειακό σύστημα ποια από τα παρακάτω συστήματα αναφοράς είναι επίσης αδρανειακά;
α) Ένα τρένο που κινείται ευθύγραμμα ομαλά.
β) Ένας δίσκος που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω από άξονα που περνάει από το κέντρο του.

γ) Ένας ανελκυστήρας που κάνει ελεύθερη πτώση.
δ) Η Σελήνη.

5.12 Αδρανειακό σύστημα ονομάζεται το σύστημα αναφοράς στο οποίο
α) ένα σώμα φαίνεται ακίνητο.
β) η κίνηση του σώματος περιγράφεται με τον πιο απλό τρόπο.
γ) κάθε σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα σε σχέση με οποιοδήποτε άλλο σύστημα αναφοράς.
δ) ισχύει ο πρώτος νόμος του Newton.
Επιλέξτε το σωστό.

5.13 Ένα τρένο κινείται με ταχύτητα $\mathbf{υ}$. Ένας επιβάτης κινείται από το πρώτο προς το τελευταίο βαγόνι του τρένου με ταχύτητα $\mathbf{u}$, ως προς το τρένο. Τι ταχύτητα έχει ο επιβάτης ως προς το έδαφος;

5.14 Πλοίο Α κινείται με ταχύτητα $\mathbf{u}$. Από το ραντάρ του πλοίου γίνεται αντιληπτό άλλο πλοίο (Β) που κινείται ως προς το πρώτο με ταχύτητα $\mathbf{υ}$, σε κάθετη διεύθυνση. Ποιο το μέτρο της ταχύτητας του πλοίου Β ως προς την ακτή;

5.15 Ένας παρατηρητής, ακίνητος στο αδρανειακό σύστημα $Σ$, παρατηρεί σώμα μάζας m που επιταχύνεται. Από αδρανειακό σύστημα $Σ'$ που κινείται ως προς το πρώτο με ταχύτητα $\mathbf{u}$ δεύτερος παρατηρητής, ακίνητος ως προς το $Σ'$, παρατηρεί επίσης το σώμα m. Για ποια από τα παρακάτω μεγέθη συμφωνούν οι δύο αδρανειακοί παρατηρητές: α) για τη θέση του σώματος; β) για την ταχύτητά του; γ) για την επιτάχυνσή του; δ) για τη δύναμη που δέχεται το σώμα; ε) για την ορμή του; στ) για το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η ορμή του; ζ) για την κινητική του ενέργεια;

5.16 Αν η ορμή συστήματος σωμάτων διατηρείται ως προς το αδρανειακό σύστημα $Σ$, θα διατηρείται και ως προς κάθε άλλο αδρανειακό σύστημα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

5.17 Το σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας ενός συστήματος σωμάτων είναι πάντα αδρανειακό σύστημα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

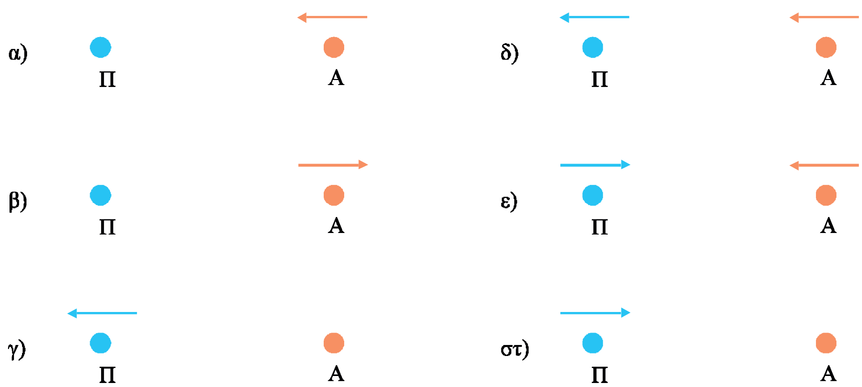
5.18 Η προώθηση του πυραύλου στηρίζεται
α) στην αρχή διατήρησης της ενέργειας.
β) στο νόμο δράσης - αντίδρασης.
γ) στην αρχή διατήρησης της ορμής.
δ) στην αρχή διατήρησης της στροφορμής.
Επιλέξτε τις σωστές απαντήσεις.

Φαινόμενο Doppler

5.19 Στις σχέσεις που περιγράφουν το φαινόμενο Doppler οι ταχύτητες αναφέρονται
α) στο σύστημα αναφοράς της πηγής.

β) στο σύστημα αναφοράς του παρατηρητή.
γ) στο σύστημα αναφοράς του μέσου διάδοσης.
Επιλέξτε το σωστό.

5.20 Στο σχήμα 5.31 το γράμμα Π αναφέρεται σε μια πηγή αρμονικού ήχου και το γράμμα Α στον παρατηρητή. Να συγκρίνετε σε κάθε περίπτωση τη συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής με τη συχνότητα του ήχου που εκπέμπει η πηγή.



Σχήμα 5-31.

5.21 Ένα τρένο εκπέμπει ήχο και κατευθύνεται προς τούνελ που βρίσκεται σε κατακόρυφο βράχο. Ο ήχος που εκπέμπεται από το τρένο ανακλάται στο βράχο.
α) Ο μηχανοδηγός του τρένου ακούει τον ήχο που προέρχεται από ανάκλαση με συχνότητα μεγαλύτερη μικρότερη ή ίση με τη συχνότητα του ήχου που εκπέμπει το τρένο;
β) Ένας παρατηρητής που βρίσκεται μεταξύ του τρένου και του εμποδίου ακούει τον ήχο που προέρχεται από το τρένο και τον ήχο που φτάνει από ανάκλαση. Οι συχνότητες των δύο ήχων όπως τους αντιλαμβάνεται είναι ίσες; Αν όχι, ποιος από τους ήχους που ακούει έχει μεγαλύτερη συχνότητα;
γ) Ένας παρατηρητής που βρίσκεται κοντά στις γραμμές και πίσω από το τρένο ακούει και αυτός δύο ήχους. Οι συχνότητες των δύο ήχων που ακούει είναι ίσες; Αν όχι, ποιος από τους ήχους έχει μεγαλύτερη συχνότητα;

Ασκήσεις

Κρούσεις

5.22 Βλήμα μάζας $m = 0,4$ kg κινείται οριζόντια με ταχύτητα $\upsilon_1 = 400$ m/s. Το βλήμα στην πορεία του συναντάει σώμα μάζας $M = 2$ kg που ήταν ακίνητο σε οριζόντιο επίπεδο, το διαπερνά και βγαίνει με ταχύτητα $\upsilon_2 = 300$ m/s. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης του σώματος M, με το οριζόντιο επίπεδο είναι 0,5. Να υπολογίσετε:
α) την ταχύτητα του σώματος M, αμέσως μετά την κρούση.
β) τη μηχανική ενέργεια που χάθηκε κατά την κρούση.

γ) το διάστημα που θα διανύσει το M μέχρι να σταματήσει.
Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.

[Απ: $20\ m/s$, $13.600\ J$, $40\ m$]

5.23 Σώμα μάζας m που κινείται με ταχύτητα $\upsilon = 12\ m/s$ συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα τριπλάσιας μάζας. Να υπολογιστούν οι ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση.

[Απ: 6 m/s, 6m/s αντίθετων κατευθύνσεων]

5.24 Δύο σφαίρες με μάζες $m_1 = 10\ kg$ και $m_2 = 20\ kg$ κινούνται με αντίθετη φορά πάνω στην ίδια ευθεία με ταχύτητες $\upsilon_1 = 3\ m/s$ και $\upsilon_2 = 2\ m/s$, αντίστοιχα, και συγκρούονται πλαστικά. Να βρείτε την ταχύτητα του συσσωματώματος και το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του συστήματος που χάθηκε κατά την κρούση.

[Απ: 0,33 m/s, 98%]

5.25 Σφαίρα (1) μάζας $m_1 = 1\ kg$ προσπίπτει με ταχύτητα υ_1 σε ακίνητη σφαίρα (2) και συγκρούεται ελαστικά και κεντρικά με αυτή. Μετά την κρούση η (1) κινείται με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1' = \upsilon_1/3$. Ποια πρέπει να είναι η μάζα m_2 της σφαίρας (2) ώστε
α) Η υ_1' να είναι ομόρροπη της υ_1. β) Η υ_1' να είναι αντίρροπη της υ_1.

[Απ: 0,5 kg, 2 kg]

5.26 Σφαίρα μάζας $m_1 = 2\ kg$ που κινείται με ταχύτητα $\upsilon_1 = 4\ m/s$ συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με άλλη σφαίρα μάζας $m_2 = 4\ kg$ που κινείται αντίθετα με ταχύτητα $\upsilon_2 = 5\ m/s$. Να υπολογίσετε τις ταχύτητες των σωμάτων μετά τη σύγκρουση.

[Απ: 8 m/s, 1 m/s]

5.27 Σφαίρα μάζας m_1 πέφτει με ταχύτητα υ_1 σε ακίνητη σφαίρα μάζας m_2 και συγκρούεται ελαστικά και κεντρικά με αυτή. Ποια πρέπει να είναι η σχέση μεταξύ των m_1 και m_2 ώστε μετά την κρούση η σφαίρα m_2 να έχει μέγιστη κινητική ενέργεια;

[Απ: $m_1 = m_2$]

5.28 Όταν ένα κινούμενο νετρόνιο συγκρουστεί με ακίνητο πυρήνα χάνει μέρος της κινητικής του ενέργειας και επιβραδύνεται. Τι ποσοστό της κινητικής του ενέργειας χάνει το νετρόνιο αν συγκρουστεί α) με πυρήνα πρωτίου $\left({}^1_1H\right)$, β) με πυρήνα δευτερίου $\left({}^2_1H\right)$ και γ) με πυρήνα ηλίου $\left({}^4_2He\right)$; Οι κρούσεις θεωρούνται ελαστικές.

[Απ: 100%, 88,9%, 64%]

5.29 Δύο σφαίρες με μάζες $m_1 = 6\ kg$ και $m_2 = 4\ kg$, κινούνται στο οριζόντιο επίπεδο, με ταχύτητες $\upsilon_1 = 8\ m/s$ και $\upsilon_2 = 9\ m/s$ κάθετες μεταξύ τους, και συγκρούονται πλαστικά. Να υπολογίσετε:
α) την κοινή τους ταχύτητα μετά την κρούση.
β) τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος.

[Απ: $6\ m/s$, $\varepsilon\varphi\theta = 3/4$, $-174\ J$]

5.30 Ξύλινη πλάκα με μάζα $M = 5\ kg$ είναι δεμένη από σκοινί και κρέμεται κατακόρυφα. Ένα βλήμα με μάζα $m = 50\ g$ και οριζόντια ταχύτητα $\upsilon_1 = 520\ m/s$, χτυπά την πλάκα στο κέντρο της τη διαπερνά και βγαίνει με ταχύτητα $\upsilon_2 = 80\ m/s$. Η απόσταση του κέντρου της πλάκας από το σημείο όπου είναι δεμένο το σκοινί είναι $l = 2\ m$. Πόσο θα εκτραπεί το σκοινί από την κατακόρυφη θέση; Δίνεται $g = 10\ m/s^2$. Θεωρήστε ότι η πλάκα αρχίζει να κινείται όταν την έχει διαπεράσει το βλήμα.

[Απ: περίπου 60^o]

Κινήσεις σε αδρανειακά συστήματα

5.31 Ένα ποταμόπλοιο κινείται με ταχύτητα $\upsilon = 20\ km/h$ ως προς το νερό. Το ρεύμα του ποταμού έχει ταχύτητα $5\ km/h$. Σε πόσο χρόνο θα κάνει το ποταμόπλοιο τη διαδρομή ΑΒΑ, όπου Α και Β δυο πόλεις που απέχουν $24\ km$ μεταξύ τους;

[Απ: 2,56 h]

5.32 Ο πιλότος ενός αεροπλάνου που κινείται βόρεια με ταχύτητα $400\ m/s$, αντιλαμβάνεται με το ραντάρ του ένα άλλο αεροπλάνο που κινείται ανατολικά με ταχύτητα $300\ m/s$. Ποια είναι η ταχύτητα του δεύτερου αεροπλάνου ως προς τη Γη;

[Απ: $500\ m/s$, $\varepsilon\varphi\theta = 4/3$]

5.33 Σε αδρανειακό σύστημα Σ ένας παρατηρητής παρατηρεί το φαινόμενο της κρούσης ενός σώματος μάζας $m = 2\ kg$ που κινείται κατά τη διεύθυνση x, με ταχύτητα $\upsilon = 6\ m/s$ και συγκρούεται πλαστικά με άλλο ακίνητο σώμα μάζας $M = 4\ kg$. α) Υπολογίστε την ταχύτητα του συσσωματώματος που προκύπτει από την κρούση, όπως τη μετράει ο παρατηρητής στο Σ. β) Δείξτε ότι και ένας παρατηρητής που κινείται κατά την διεύθυνση x με ταχύτητα $u = 2\ m/s$, παρόλο που αντιλαμβάνεται διαφορετικά τις ταχύτητες των σωμάτων πριν και μετά την κρούση, συμφωνεί με τον πρώτο ότι η ορμή διατηρείται.

[Απ: 2 m/s]

Κέντρο μάζας - Σχετικές κινήσεις

5.34 Τρεις ομογενείς σφαίρες έχουν μάζες $20\ kg$, $20\ kg$, και $30\ kg$ και τα κέντρα τους στα σημεία (1,1), (2,2) και (3,1) του επιπέδου xy. Να προσδιοριστούν οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας του συστήματος των σφαιρών.

[Απ: $\left(\frac{15}{7}, \frac{9}{7}\right)$]

5.35 Λέμε συχνά ότι η Γη περιστρέφεται γύρω από τον Ήλιο. Το ακριβές είναι ότι η Γη και ο Ήλιος περιστρέφονται γύρω από το κέντρο μάζας τους. Να βρείτε σε πόση απόσταση από το κέντρο του Ήλιου βρίσκεται το κέντρο μάζας του συστήματος Γη - Ήλιος και να συγκρίνετε την απόσταση αυτή με την ακτίνα του Ήλιου. Δίνονται η μάζα της Γης $m_\Gamma = 5,98 \times 10^{24}\ kg$, η μάζα του Ήλιου $m_H = 1,99 \times 10^{30}\ kg$, η ακτίνα του Ήλιου $R_H = 6,96 \times 10^{8}\ m$ και η διάκεντρος Γης - Ήλιου $d = 1,49 \times 10^{11}\ m$.

[Απ: $4,48 \times 10^5\ m$]

5.36 Στην άκρη μιας ακίνητης βάρκας με μάζα $M = 120\ kg$ και μήκος $s = 6\ m$ στέκεται άνθρωπος με μάζα $m = 60\ kg$. Να υπολογίσετε πόσο θα κινηθεί η βάρκα αν ο άνθρωπος κινηθεί από τη μια άκρη της βάρκας στην άλλη. Οι τριβές μεταξύ βάρκας και νερού θεωρούνται αμελητέες.

[Απ: 2 m]

5.37 Τα καυσαέρια βγαίνουν από ένα πύραυλο που κινείται στο διάστημα με ρυθμό $dm/dt = 140\ kg/s$ και σχετική ταχύτητα $u = 1000\ m/s$ ως προς τον πύραυλο. Να υπολογίσετε την προωστική δύναμη του πυραύλου και την επιτάχυνσή του κάποια χρονική στιγμή που η μάζα του είναι $M = 10\ ton$.

[Απ: 140.000 N, $14\ m/s^2$]

5.38 Ένας πύραυλος ταξιδεύει στο διάστημα και κάποια χρονική στιγμή έχει μάζα $4000\ kg$, μαζί με τα καύσιμά του. Η ταχύτητα με την οποία εκτοξεύονται τα καυσαέρια είναι $1500\ m/s$ ως προς τον πύραυλο. Πόσα kg καυσαερίων πρέπει να αποβάλλει ανά δευτερόλεπτο ο πύραυλος ώστε να αποκτήσει στιγμιαία επιτάχυνση $15\ m/s^2$.

[Απ: 40 kg/s]

Φαινόμενο Doppler

5.39 Με πόση ταχύτητα πρέπει να απομακρύνεται παρατηρητής από μια ακίνητη πηγή ήχου ώστε να ακούει ήχο με συχνότητα ίση με τα εννέα δέκατα της συχνότητας του ήχου που παράγει η πηγή; Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι $340\ m/s$.

[Απ: 34 m/s]

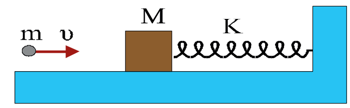
5.40 Ένας παρατηρητής, που είναι ακίνητος στην άκρη του δρόμου, αντιλαμβάνεται τον ήχο της σειρήνας ενός περιπολικού που πλησιάζει, με συχνότητα $f_1 = 500\ Hz$. Όταν το περιπολικό απομακρύνεται, ο ήχος που ακούει ο παρατηρητής έχει συχνότητα $f_2 = 450\ Hz$. Με ποια ταχύτητα κινείται το περιπολικό και ποια είναι η πραγματική συχνότητα του ήχου της σειρήνας; Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι $340\ m/s$.

[Απ: 17,9 m/s, 473,7 Hz]

Προβλήματα

5.41 Μια σφαίρα συγκρούεται ελαστικά με άλλη όμοια σφαίρα που αρχικά ηρεμεί. Δείξτε ότι αν η κρούση δεν είναι κεντρική, μετά την κρούση οι σφαίρες θα κινηθούν σε διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους.

5.42 Ένα βλήμα με μάζα $m = 50\ g$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα $\upsilon = 200\ m/s$ και σφηνώνεται σε ξύλο με μάζα $M = 950\ g$ που είναι ακίνητο σε λείο οριζόντιο τραπέζι (σχ. 5.32). Η σταθερά του ελατηρίου είναι $K = 10000\ N/m$. Να υπολογίσετε:
α) τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου
β) το ποσοστό της μηχανικής ενέργειας που χάθηκε.



Σχήμα 5-32.

[Απ: 0,1 m, 95%]

5.43 Ένα βλήμα με μάζα $m = 20\ g$ κινείται οριζόντια και σφηνώνεται σε κομμάτι ξύλου με μάζα $M = 1\ kg$ το οποίο είναι δεμένο σε κατακόρυφο σκοινί μήκους $1\ m$. Μετά τη σύγκρουση το νήμα εκτρέπεται από την κατακόρυφο κατά γωνία $\theta = 60^o$. Να υπολογιστεί η μηχανική ενέργεια που χάθηκε κατά την κρούση.
Δίνεται $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

[Απ: 255 J]

5.44 Ένα σώμα με μάζα $m_1 = 20\ kg$ ισορροπεί σε πλάγιο επίπεδο με κλίση $\varphi = 30°$. Ένα δεύτερο σώμα με μάζα $m_2 = 30\ kg$ που ανεβαίνει στο πλάγιο επίπεδο, συγκρούεται πλαστικά με το πρώτο έχοντας ταχύτητα $\upsilon = 10\ m/s$. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ συσσωματώματος και επιπέδου είναι $\sqrt{3}/3$. Να υπολογίσετε το διάστημα που διανύει το συσσωμάτωμα μέχρι να σταματήσει. Θα επιστρέψει το συσσωμάτωμα στη βάση του πλάγιου επιπέδου; Δίνεται $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

[Απ: 1,8 m, όχι]

5.45 Από την κορυφή πλάγιου επιπέδου, που έχει μήκος $s = 4{,}2\ m$ και σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία $\varphi = 30^o$ αφήνεται να ολισθήσει σώμα με μάζα $m = 1\ kg$, χωρίς τριβή. Κατά την κάθοδό του και ενώ έχει διανύσει διάστημα $s_1 = 1{,}6\ m$ συναντά ακίνητο σώμα της ίδιας μάζας και συγκρούεται πλαστικά με αυτό. Το συσσωμάτωμα που δημιουργείται από την κρούση ολισθαίνει στο πλάγιο επίπεδο και φτάνει στη βάση του με μηδενική ταχύτητα. Να υπολογίσετε:
α) το συντελεστή τριβής ολίσθησης του συσσωματώματος με το πλάγιο επίπεδο.
β) τη συνολική θερμότητα που παράχθηκε κατά τη διάρκεια του φαινομένου.
Δίνεται $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

[Απ: $\frac{5\sqrt{3}}{13}$, 34 J]

5.46 Αερόστατο μάζας M αιωρείται (ισορροπεί) σε ύψος H από το έδαφος. Από το αερόστατο κρέμεται μια ανεμόσκαλα που φτάνει μέχρι το έδαφος. Στο κάτω άκρο της ανεμόσκαλας στέκει ένας άνθρωπος με μάζα m. Αν ο άνθρωπος αρχίσει να σκαρφαλώνει, υπολογίστε πόσο θα κατέβει το αερόστατο μέχρι να φτάσει σ' αυτό. Δίνονται M, m, H.

[Απ: $H\dfrac{m}{m+M}$]

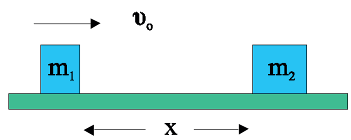
5.47 Σώμα μάζας m_1 έχει ταχύτητα υ_o και προσκρούει σε ακίνητο σώμα μάζας $m_2 = 2m_1$ που βρίσκεται σε απόσταση $x = 1\ m$ (σχ. 5.33). Μετά την κρούση, που είναι ελαστική, το πρώτο σώμα επιστρέφει και σταματά στην αρχική του θέση. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης των δυο σωμάτων με το δάπεδο είναι $\mu = 0{,}5$. Να υπολογίσετε:

α) την αρχική ταχύτητα υ_o του πρώτου σώματος.

β) το διάστημα που θα διανύσει το δεύτερο σώμα μέχρι να σταματήσει.

Δίνεται $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

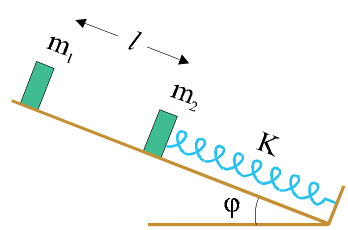
[Απ: 10 m/s, 4 m]



Σχήμα 5-33.

5.48 Ελατήριο σταθεράς $K = 200\ N/m$ βρίσκεται πάνω σε λείο πλάγιο επίπεδο, με κλίση $\varphi = 30^o$ όπως στο σχήμα 5.34 Στο πάνω άκρο του ελατηρίου ισορροπεί σώμα με μάζα $m_2 = 1\ kg$ ενώ το κάτω άκρο του είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Από το σημείο A που απέχει απόσταση $l = 4\ m$ από το m_2 αφήνεται να ολισθήσει σώμα μάζας $m_1 = m_2/3$. Το m_1 κατεβαίνοντας συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με το m_2. Να υπολογιστεί σε πόση απόσταση από το σημείο της σύγκρουσης οι ταχύτητες των m_1 και m_2 στιγμιαία θα μηδενιστούν. Δίνεται $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

[Απ: $1\,m$, $\sqrt{5}\times 10^{-1} m$]



Σχήμα 5-34.

5.49 Το σώμα Σ_2 του σχήματος 5.35 έχει μάζα $m_2 = 4\ kg$ και βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Πάνω στο Σ_2 βρίσκεται δεύτερο σώμα Σ_1 που έχει μάζα $m_1 = 950\ g$. Το επίπεδο επαφής των σωμάτων Σ_1, Σ_2 είναι οριζόντιο και ο συντελεστής τριβής μεταξύ τους είναι $\mu = 0{,}5$. Στο Σ_1 σφηνώνεται ένα βλήμα, μάζας $m_B = 50\ g$ που κινείται με οριζόντια ταχύτητα $\upsilon_B = 100\ m/s$. Η χρονική διάρκεια της κρούσης του βλήματος με το σώμα Σ_1 θεωρείται αμελητέα.

α) Ποια είναι η κοινή ταχύτητα που αποκτούν τα σώματα Σ_1, Σ_2;

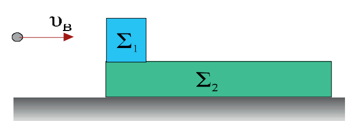
β) Πόση, συνολικά, θερμότητα μεταφέρεται στο περιβάλλον;

γ) Μετά από πόσο χρόνο από τη στιγμή της κρούσης τα σώματα Σ_1 και Σ_2 αποκτούν κοινή ταχύτητα;

δ) Πόσο μετακινήθηκε το Σ_1 πάνω στο σώμα Σ_2 μέχρι τη στιγμή αυτή;

Δίνεται $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

[Απ: 1 m/s, 247,5 J, 0,8 s, 2 m]



Σχήμα 5-35.

5.50 Σε οριζόντιο δρόμο κινείται άνθρωπος με ταχύτητα υ_1 κρατώντας ομπρέλα, για να προφυλαχτεί από τη βροχή που πέφτει κατακόρυφα με ταχύτητα υ_2. Ποια είναι η κατάλληλη θέση της ομπρέλας για τη μεγαλύτερη δυνατή κάλυψη;

[Απ: $\varepsilon\varphi\,\vartheta = \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}$]

5.51 Ένας μοτοσυκλετιστής που βρίσκεται σε απόσταση $d = 400\ m$ από μια ακίνητη ηχητική πηγή συχνότητας $540\ Hz$ αρχίζει να κινείται προς αυτή με σταθερή επιτάχυνση. Η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται τη στιγμή που φτάνει στην πηγή είναι $603{,}5\ Hz$. Να υπολογίσετε την επιτάχυνσή του και να παραστήσετε γραφικά τη συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο μοτοσυκλετιστής σε συνάρτηση με το χρόνο. Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι $340\ m/s$.

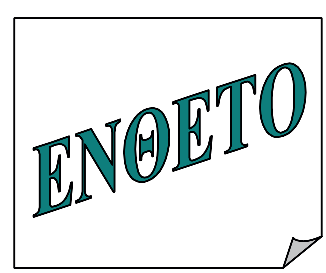
[Απ: $2\ m/s^2$]

5.52 Μια ηχητική πηγή κινείται με ταχύτητα $8\ km/h$ και εκπέμπει ήχο συχνότητας $400\ Hz$. Ένας παρατηρητής που κινείται με ταχύτητα $54\ km/h$, ακολουθεί την ηχητική πηγή. Να υπολογίσετε τη συχνότητα που ακούει ο παρατηρητής. Δίνεται η ταχύτητα του ήχου $340\ m/s$.

[Απ: 415 Hz]

5.53 Σιδηροδρομικός υπάλληλος βρίσκεται στη μέση μιας γέφυρας με μήκος $1000\ m$, όταν βλέπει σε απόσταση $1500\ m$ μια αμαξοστοιχία, να πλησιάζει σφυρίζοντας. Η συχνότητα του ήχου που ακούει είναι $360\ Hz$ ενώ ξέρει ότι η πραγματική συχνότητα είναι $340\ Hz$. Για να αποφύγει τον κίνδυνο κινείται ισοταχώς και καταφέρνει να φτάσει στην άκρη της γέφυρας, τη στιγμή που φτάνει και η αμαξοστοιχία. Υπολογίστε τη συχνότητα του ήχου που άκουγε ο υπάλληλος στη διάρκεια της κίνησής του. Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι $340\ m/s$.

[Απ: 355 Hz]



Ηχοκαρδιογραφία Doppler

Οι γιατροί χρησιμοποιούν τους υπέρηχους για διαγνωστικούς σκοπούς. Οι υπέρηχοι είναι ήχοι με συχνότητα πάνω από $20.000\ Hz$. Το ανθρώπινο αφτί δε μπορεί να αντιληφθεί τέτοιες συχνότητες. Οι υπέρηχοι που χρησιμοποιούνται στην ιατρική έχουν συχνότητα κοντά στα $2\ MHz$.

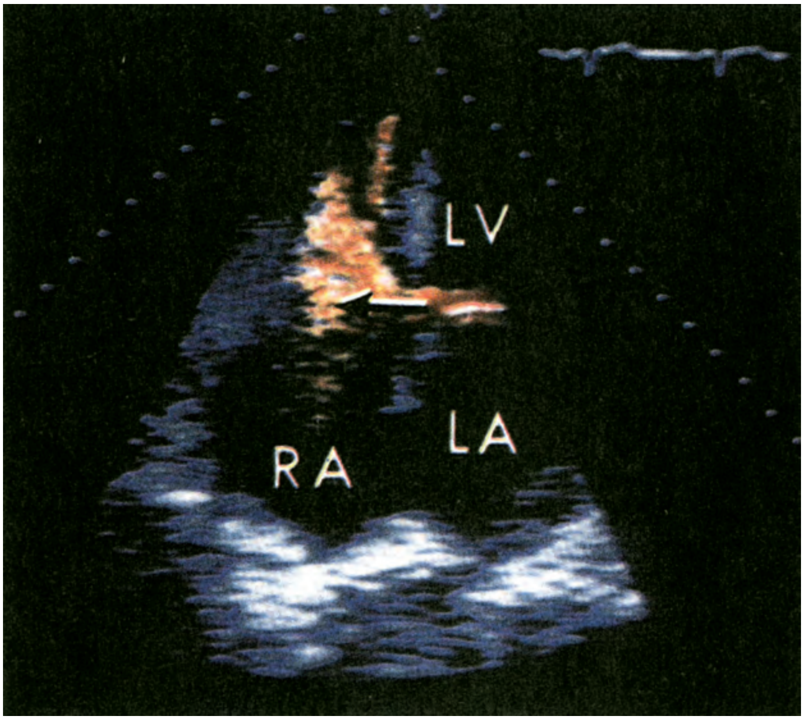
Οι υπέρηχοι έχουν τη δυνατότητα να σχηματίζουν στενές δέσμες, υπακούουν στους νόμους της ανάκλασης και της διάθλασης και μπορούν να ανακλώνται σε εμπόδια πολύ μικρών διαστάσεων. Τα εμπόδια αυτά μπορεί να είναι σταθερά (π.χ. τα τοιχώματα των αγγείων, ένας λίθος στη χοληδόχο κύστη κ.λπ.) ή κινητά (π.χ. τα ερυθρά αιμοσφαίρια).

Στην ηχοκαρδιογραφία Doppler οι υπέρηχοι ανακλώνται σε κινητά εμπόδια. Όταν μια δέσμη υπέρηχων συναντήσει ένα εμπόδιο, ένα μέρος της ενέργειας που μεταφέρει ανακλάται, επιστρέφει δηλαδή στο αρχικό μέσο. Αν η ανάκλαση γίνει πάνω σε ακίνητο εμπόδιο το κύμα που επιστρέφει έχει την ίδια συχνότητα με το αρχικό κύμα. Αν όμως η ανάκλαση γίνει σε κινητό εμπόδιο η συχνότητα του ανακλώμενου κύματος θα είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη από την αρχική συχνότητα, ανάλογα με το αν το εμπόδιο απομακρύνεται ή πλησιάζει τη διάταξη που καταγράφει την ανακλώμενη δέσμη. Η διαφορά των συχνοτήτων της δέσμης που επιστρέφει και της αρχικής δέσμης - λέγεται συχνότητα Doppler. Η συχνότητα αυτή συνδέεται με τη συχνότητα της αρχικής δέσμης και την ταχύτητα του εμποδίου με τη σχέση

$$f_\delta = 2 f_t \frac{\upsilon\, \sigma\upsilon\nu\, \theta}{c}$$

όπου f_t η συχνότητα της αρχικής δέσμης, υ η ταχύτητα των αιμοσφαιρίων, c η ταχύτητα διάδοσης των υπέρηχων και θ η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα του εμποδίου με τον άξονα της δέσμης.

Από τη σχέση αυτή φαίνεται ότι είναι δυνατός ο προσδιορισμός της ταχύτητας του εμποδίου αν είναι γνωστή η ταχύτητα διάδοσης του ήχου, η συχνότητα Doppler και η γωνία θ. Για την τελευταία, επειδή στη σχέση υπεισέρχεται το συνημίτονό της, να θυμηθούμε ότι για μικρές τιμές της γωνίας ($\theta < 20°$) το συνημίτονο παίρνει τιμές που προσεγγίζουν τη μονάδα.



Δύο διαστάσεων υπερηχογράφημα Doppler με χρωματική χαρτογράφηση ροής ενός ασθενούς με έμφρακτο μεσοκοιλιακού διαφράγματος. Η ανώμαλη ροή (βέλος) διακρίνεται σαν πορτοκαλόχρους πίδακας με ροή από την αριστερή κοιλία προς την δεξιά πλευρά της καρδιάς. RA=δεξιός κόλπος, LA=αριστερός κόλπος.

Εικόνα 5-10.

Έτσι, είναι δυνατός ο προσδιορισμός της ταχύτητας των ερυθρών αιμοσφαιρίων και επομένως η ταχύτητα ροής του αίματος στα αιμοφόρα αγγεία. Αν, με άλλη μέθοδο, προσδιοριστεί και η διατομή A του αγγείου είναι δυνατό να προσδιοριστεί η παροχή του αγγείου από την οποία συνάγονται συμπεράσματα για τη λειτουργία της καρδιάς.

Ο προσδιορισμός της παροχής γίνεται σε μεγάλης διατομής αγγεία, όπου η ροή του αίματος μπορεί να θεωρηθεί στρωτή και η ταχύτητα όλων των αιμοσφαιρίων ίδια. Στα αγγεία μικρής διατομής η ταχύτητα της κεντρικής ρευματικής γραμμής είναι σημαντικά μεγαλύτερη από την ταχύτητα που αντιστοιχεί σε σημεία κοντά στα τοιχώματα του αγγείου.

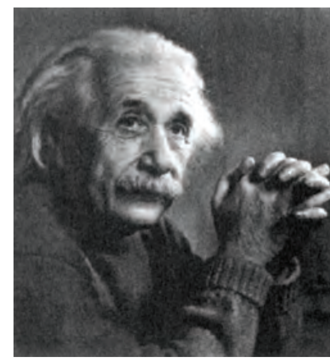
Μέσω της ηχοκαρδιογραφίας Doppler είναι δυνατός ο άμεσος προσδιορισμός της διαφοράς πίεσης (ή αλλιώς της βαθμίδας πίεσης) σε περιοχές που τα αγγεία παρουσιάζουν στενώσεις. Στην περίπτωση αυτή η ροή γίνεται τυρβώδης και η ταχύτητα του αίματος πριν τη στένωση και μετά από αυτή δεν είναι ίδια.

6 ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

6.1. Εισαγωγή

Στις αρχές του έτους 1905 ένας άγνωστος εικοσιεξάχρονος υπάλληλος της Ελβετικής Υπηρεσίας Ευρεσιτεχνιών, ο Albert Einstein, δημοσίευσε τρεις εργασίες τεράστιας σημασίας. Η πρώτη αφορούσε στην ερμηνεία της κίνησης Brown (απόδειξη ύπαρξης μορίων). Η δεύτερη, που τιμήθηκε με το βραβείο Νόμπελ το 1921, αφορούσε στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο (κβαντική θεωρία του φωτός). Στην τρίτη εισήγε την ειδική θεωρία της σχετικότητας.

Η θεωρία της σχετικότητας έφερε επανάσταση στην αντίληψή μας για τον κόσμο και έδωσε νέο περιεχόμενο σε βασικές έννοιες όπως ο χώρος, ο χρόνος, η ύλη και η ενέργεια. Σύμφωνα με τη θεωρία της σχετικότητας οι διαστάσεις ενός σώματος και η χρονική διάρκεια ενός φαινομένου δεν είναι ίδια για όλους τους παρατηρητές. Για παράδειγμα, το μήκος ενός πυραύλου που κινείται με πολύ μεγάλη ταχύτητα και η χρονική διάρκεια ενός συμβάντος στον πύραυλο μετριούνται διαφορετικά από τους επιβάτες του πυραύλου και από κάποιον παρατηρητή ακίνητο σε σχέση με τον πύραυλο. Πριν διατυπωθεί αυτή η θεωρία η ύλη και η ενέργεια θεωρούνταν ξεχωριστές οντότητες. Με τη θεωρία της σχετικότητας όμως, αποδείχτηκε ότι η μία μπορεί να μετατρέπεται στην άλλη. Έτσι ερμηνεύεται η παραγωγή ενέργειας στον Ήλιο.



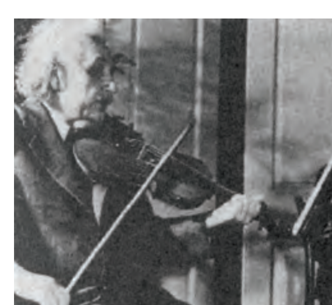
Εικόνα 6-1.

Τα συμπεράσματα της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας αντιτίθενται σε βαθιά ριζωμένες αντιλήψεις, που οφείλονται στην καθημερινή εμπειρία, και γι’ αυτό δύσκολα γίνονται αποδεκτά. Ακόμη και επιστήμονες πολύ μεγάλης εμβέλειας, όπως ο Lorentz, σε εργασίες του οποίου στηρίχτηκε ο Einstein για να διατυπώσει τη θεωρία του, δυσπιστούσαν απέναντί της.

Η ειδική θεωρία της σχετικότητας έχει, εντούτοις, δυο πολύ ισχυρά πλεονεκτήματα. Το πρώτο είναι ότι έχει επιβεβαιωθεί πειραματικά. Το δεύτερο είναι ότι σε οριακές της περιπτώσεις (όταν τα συστήματα αναφοράς κινούνται μεταξύ τους με ταχύτητες πολύ μικρότερες από την ταχύτητα του φωτός, δηλαδή ταχύτητες που «χωράει ο νους του ανθρώπου») δίνει αποτελέσματα που είναι απολύτως συμβατά με τις προβλέψεις της νευτώνειας φυσικής.

Το 1915 ο Einstein δημοσίευσε μια εργασία για τη γενική σχετικότητα. Το θέμα αυτό επρόκειτο να τον απασχολήσει για πολλά χρόνια ακόμη. Η κεντρική ιδέα της γενικής θεωρίας ήταν να επεκταθεί η ισχύς των νόμων της φυσικής σε όλα τα συστήματα αναφοράς, δηλαδή όχι μόνο στα αδρανειακά αλλά και στα επιταχυνόμενα. Στην προσπάθειά του διατύπωσε μια νέα θεωρία για τη βαρύτητα η οποία εμπεριείχε και τη θεωρία του Newton σαν ειδική περίπτωση.

Η γενική θεωρία παρουσίαζε μαθηματικά προβλήματα με τα οποία δεν ήταν εξοικειωμένοι οι φυσικοί της εποχής ακόμη και ο ίδιος ο Αϊνστάιν. Τότε ο φίλος του Grossman (Γκρόσμαν) τον έφερε σε επαφή με εργασίες μαθηματικών (Ρίμαν, Κρίστοφελ, Ρίτσι-Κουρμπάστρο και



Εικόνα 6-2.

Λεβί-Τσιβίτα) που τον εφοδίασαν με τα απαραίτητα μαθηματικά εργαλεία.

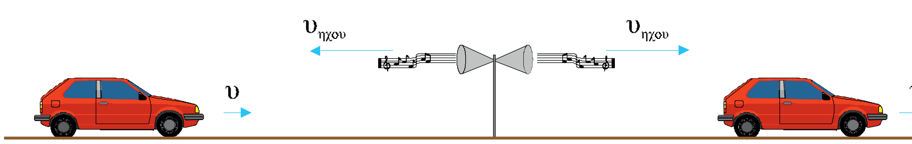
Το 1919 συνέβη μια ολική έκλειψη του Ήλιου, γεγονός που έδωσε τη δυνατότητα να γίνουν κάποιες παρατηρήσεις ενθαρρυντικές για τη γενική θεωρία.

Αν και - ακόμη και σήμερα - η γενική θεωρία δεν έχει επιβεβαιωθεί πλήρως, οι δρόμοι που άνοιξε επηρέασαν βαθιά τη σύγχρονη φυσική.

6.2. Το Πείραμα Michelson - Morley

Πριν διατυπώσει ο Einstein τη θεωρία της σχετικότητας, θεωρούσαν ότι το φως, όπως συμβαίνει και με τον ήχο, χρειάζεται κάποιο μέσο για να διαδοθεί. Υπέθεταν ότι υπήρχε ένα μέσον, **ο αιθέρας**, που γέμιζε ολόκληρο το σύμπαν και στο οποίο διαδίδεται το φως.

Όταν ο επιβάτης ενός αυτοκινήτου πλησιάζει με ταχύτητα υ μια πηγή ήχου, ο ήχος διαδίδεται ως προς αυτόν με ταχύτητα $\upsilon_{\text{ήχου}}+\upsilon$, ενώ όταν απομακρύνεται από μια πηγή ήχου η ταχύτητα διάδοσης του ήχου ως προς αυτόν είναι $\upsilon_{\text{ήχου}}-\upsilon$. Εάν το φως διαδιδόταν κατά ανάλογο τρόπο, η κίνηση ενός παρατηρητή προς ή από μια πηγή φωτός θα επηρέαζε την ταχύτητα του φωτός, όπως την αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής.



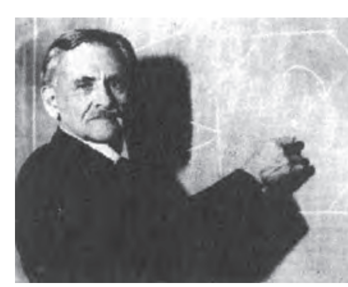
Ο ήχος διαδίδεται με ταχύτητα $\upsilon_{\text{ήχου}}+\upsilon$ ως προς τον οδηγό όταν το αυτοκίνητο πλησιάζει την πηγή και με ταχύτητα $\upsilon_{\text{ήχου}}-\upsilon$ όταν απομακρύνεται από αυτή.

Σχήμα 6-1.

Το 1887, στις Η.Π.Α., οι A.A. Michelson (Μάικελσον 1852-1931) και E.W. Morley (Μόρλεϊ 1838-1923) σχεδίασαν και εκτέλεσαν ένα ιδιοφυές πείραμα για να μετρήσουν την ταχύτητα της Γης. Στο πείραμα αυτό έγινε προσπάθεια να μετρηθούν διαφορές στην ταχύτητα του φωτός που οφείλονται στην κίνηση της Γης.

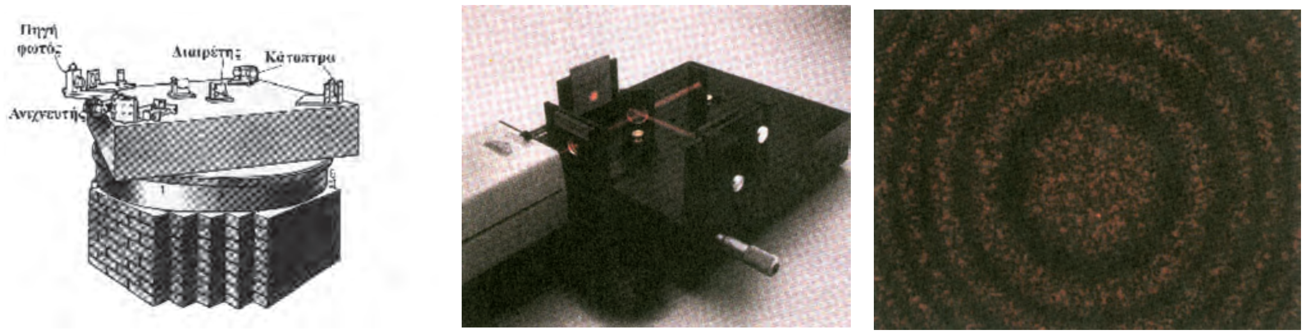
Το πείραμα αυτό αποδείχτηκε επαναστατικό γιατί, πέρα από τις επιδιώξεις των εμπνευστών του, αποκάλυψε την παράξενη φύση του φωτός.

Η κεντρική ιδέα των Michelson - Morley ήταν ότι αν δυο δέσμες μονοχρωματικού φωτός συμβάλουν δημιουργούν ένα σύστημα κροσσών συμβολής. Αν με οποιονδήποτε τρόπο μεταβάλουμε τη διαφορά φάσης ανάμεσα στις δέσμες οι κροσσοί συμβολής θα εμφανισθούν μετατοπισμένοι. Τις θέσεις των κροσσών συμβολής και, κατ' επέκταση, τις ενδεχόμενες μετατοπίσεις τους μπορούμε να τις προσδιορίσουμε με μεγάλη ακρίβεια με τη βοήθεια ενός συμβολόμετρου.



Michelson (1852-1931). Αμερικανός πρωσικής καταγωγής. Σταδιοδρομία στο αμερικάνικο ναυτικό και παράλληλα λαμπρή επιστημονική σταδιοδρομία. Ο πρώτος Αμερικανός που κέρδισε το βραβείο Νόμπελ.

Εικόνα 6-3.



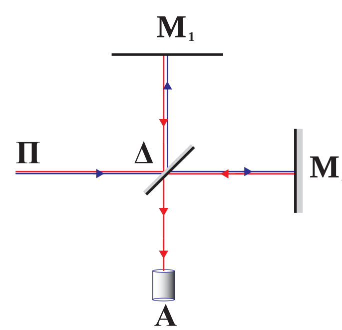
(α) (β) (γ)

(α) Το συμβολόμετρο του Michelson. (β) Ένα σύγχρονο συμβολόμετρο (γ) Εικόνα κροσσών συμβολής από συμβολόμετρο.

Σχήμα 6-2.

Το συμβολόμετρο του πειράματος (σχ. 6.2α) περιλαμβάνει μια τράπεζα που μπορεί να περιστρέφεται, μια πηγή μονοχρωματικού φωτός (Π), έναν ανιχνευτή (Α) με τον οποίο παρατηρούμε τους κροσσούς συμβολής δυο κάτοπτρα (M_1, M_2) κι ένα ημικάτοπτρο - διαιρέτη δέσμης (Δ). Με ειδικές διατάξεις (μικρομετρικούς κοχλίες) μπορούμε να μεταβάλλουμε τις αποστάσεις μεταξύ των στοιχείων του συμβολόμετρου με πολύ μεγάλη ακρίβεια.

Η πηγή (σχ. 6.3) παράγει μια μονοχρωματική δέσμη φωτός, ένα τμήμα της οποίας ανακλάται στο ημικάτοπτρο και φτάνει στο κάτοπτρο M_1 ενώ το υπόλοιπο της δέσμης διαθλάται σ' αυτό και φτάνει στο κάτοπτρο M_2. Στον ανιχνευτή καταλήγουν δύο δέσμες: αυτή που ανακλάται στο M_1 και στη συνέχεια διαθλάται στο ημικάτοπτρο και αυτή που ανακλάται πρώτα στο M_2 και μετά στο ημικάτοπτρο. Οι δέσμες συμβάλλουν και δίνουν μια εικόνα κροσσών συμβολής όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 6.2γ. Συνοπτικά οι διαδρομές που διανύουν οι συμβάλλουσες δέσμες είναι $\Pi\Delta M_1\Delta A$ και $\Pi\Delta M_2\Delta A$.

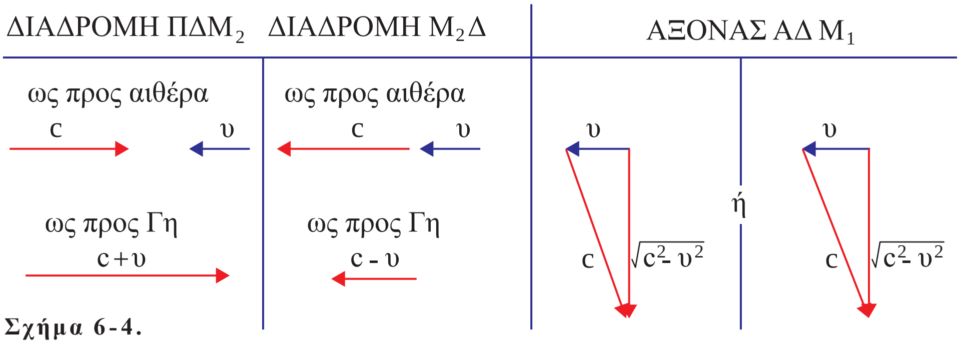


Η πορεία των φωτεινών ακτίνων στο συμβολόμετρο Michelson.

Σχήμα 6-3.

Ρυθμίζουμε τις αποστάσεις $\Pi\Delta$, ΔM_1, ΔM_2, ΔA να είναι όλες ακριβώς ίσες με L. Έστω ότι ο άξονας $\Pi\Delta M_2$ είναι παράλληλος με την ταχύτητα της Γης και ότι η μονοχρωματική δέσμη εκπέμπεται με φορά αντίθετη αυτής της κίνησης της Γης. Υπενθυμίζουμε ότι το τραπέζι μπορεί να στρέφεται επομένως υπάρχει κάποια θέση του τραπεζιού για την οποία θα συμβαίνει αυτό. Η Γη κινείται στο διάστημα με μέση ταχύτητα $\upsilon = 30\times10^3 m/s$.

Σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου στον άξονα $\Pi\Delta M_2$ η ταχύτητα του φωτός ως προς τη Γη θα έπρεπε να είναι $c+\upsilon$ για τη μετάβασή του από το Π προς το M_2 και $c-\upsilon$ για τη μετάβασή του από το M_2 προς το Π. (σχ. 6.4)



Σχήμα 6-4.

Στον άξονα $ΑΔΜ_1$ το φως έπρεπε, να διαδίδεται και προς τις δυο κατευθύνσεις σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου, με ταχύτητα $\sqrt{c^2-\upsilon^2}$ (σχ. 6.4).

Ο χρόνος που χρειάζεται το φως για να διανύσει τη διαδρομή $ΠΔΜ_2ΔΑ$ θα είναι

$$t_1 = \frac{L}{c+\upsilon} + \frac{L}{c+\upsilon} + \frac{L}{c-\upsilon} + \frac{L}{\sqrt{c^2-\upsilon^2}}$$

ενώ ο χρόνος που χρειάζεται το φως για να διανύσει τη διαδρομή $ΠΔΜ_1ΔΑ$ θα είναι

$$t_2 = \frac{L}{c+\upsilon} + \frac{L}{\sqrt{c^2-\upsilon^2}} + \frac{L}{\sqrt{c^2-\upsilon^2}} + \frac{L}{\sqrt{c^2-\upsilon^2}}$$

Η διαφορά

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{L}{c+\upsilon} + \frac{L}{c-\upsilon} - \frac{L}{\sqrt{c^2-\upsilon^2}} - \frac{L}{\sqrt{c^2-\upsilon^2}}$$

είναι υπεύθυνη για τη διαφορά φάσης με την οποία φτάνουν τα δυο τμήματα της δέσμης στον ανιχνευτή με αποτέλεσμα τη δημιουργία των κροσσών συμβολής.

Κατά τη διάρκεια του πειράματος το συμβολόμετρο περιστρεφόταν κατά $90°$ για να αλλάξει η ταχύτητα του φωτός ως προς ένα από τους άξονες. Η περιστροφή έπρεπε να είχε ως αποτέλεσμα τη μετατόπιση των κροσσών συμβολής. Ωστόσο δεν παρατηρήθηκε καμιά μετατόπιση. Το πείραμα πραγματοποιήθηκε πολλές φορές, δίνοντας πάντα το ίδιο αποτέλεσμα.

Το αποτέλεσμα του πειράματος Michelson - Morley προβλημάτισε πολύ τους φυσικούς μέχρι το 1905 οπότε εξηγήθηκε πλήρως από τον Einstein με την ειδική θεωρία της σχετικότητας.

6.3. Τα Αξιώματα της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας

Ο Einstein στήριξε την ειδική θεωρία της σχετικότητας σε δυο απλές και φαινομενικά αθώες παραδοχές.

1. **Οι νόμοι της φυσικής είναι ίδιοι για όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς**. Δηλαδή οι θεμελιώδεις νόμοι της φυσικής έχουν την ίδια μαθηματική μορφή για όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές.
2. **Η ταχύτητα του φωτός είναι ίδια για όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς και είναι ανεξάρτητη από την κίνηση της φωτεινής πηγής.**

Σύμφωνα με την πρώτη παραδοχή, δεν είναι δυνατό να γίνει διάκριση μεταξύ δύο συστημάτων αναφοράς τα οποία κινούνται μεταξύ τους με σταθερή ταχύτητα. Οι νόμοι της φυσικής ισχύουν με την ίδια μορφή και στα δύο αδρανειακά συστήματα.

Η δεύτερη παραδοχή εξηγεί το αποτέλεσμα του πειράματος των Michelson -Morley. Το φως δεν υπάκουει στους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου. Ας σταθούμε λίγο σε αυτή την τολμηρή υπόθεση, ότι δηλαδή το φως έχει την ίδια ταχύτητα σε όλα τα αδρανειακά συστήματα. Έστω ότι δύο παρατηρητές μετρούν την ταχύτητα του φωτός που εκπέμπεται από μία φωτεινή πηγή. Ο πρώτος είναι ακίνητος ως προς την πηγή και ο δεύτερος απομακρύνεται με πολύ μεγάλη ταχύτητα απ’ αυτή. Και οι δύο θα μετρήσουν την ίδια ταχύτητα για το φως. Είναι παράδοξο, ωστόσο το πείραμα του Michelson το επιβεβαιώνει.

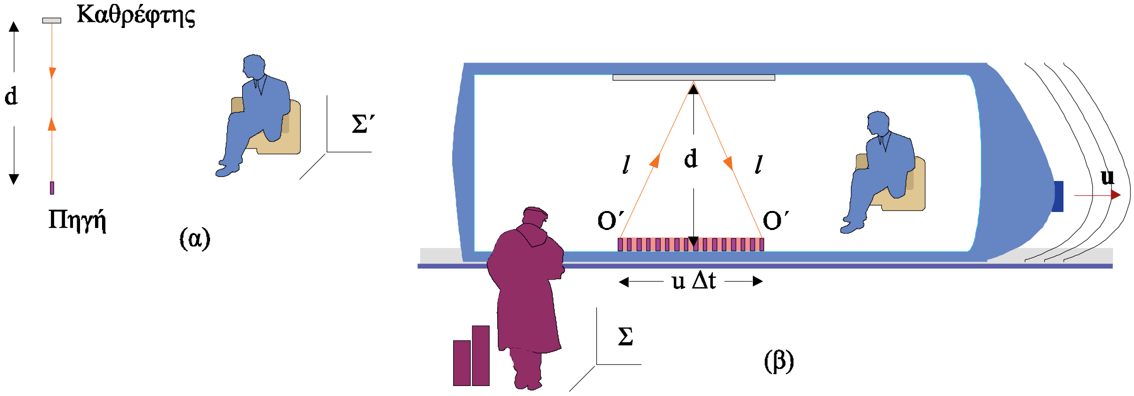
6.4. Χωροχρόνος

Ο χώρος μέσα στον οποίο ζούμε είναι τρισδιάστατος. Η θέση ενός υλικού σημείου μπορεί να προσδιορισθεί με τρεις συντεταγμένες που αναφέρονται σ’ ένα σύστημα συντεταγμένων προσδεμένο στο σύστημα αναφοράς μας. Επίσης το μέγεθος ενός αντικειμένου μπορούμε να το προσδιορίσουμε με τρεις διαστάσεις. Ένα παραλληλεπίπεδο κουτί περιγράφεται με το μήκος, το πλάτος και το ύψος του. Το κουτί όμως δεν ήταν πάντα κουτί. Κάποια χρονική στιγμή κατασκευάστηκε και κάποια άλλη πιθανόν να καταστραφεί. Έτσι η περιγραφή του κουτιού μέσα στο χώρο δεν έχει νόημα αν δεν αναφερόμαστε ταυτόχρονα και στη χρονική διάρκεια της ύπαρξής του.

Δεν έχει νόημα να μιλάμε για χώρο χωρίς να συνυπολογίζουμε το χρόνο. Κάθε αντικείμενο, πρόσωπο, πλανήτης, άστρο, γαλαξίας υπάρχει μέσα σ’ αυτό που ονομάζουμε **χωροχρονικό συνεχές**.

6.5. Η Σχετικότητα του Χρόνου

Ας φανταστούμε ένα τρένο που κινείται με ταχύτητα **u** ως προς παρατηρητή ακίνητο στο σταθμό. Στο δάπεδο του τρένου υπάρχει μια πηγή φωτεινών αναλαμπών ενώ στην οροφή, ακριβώς επάνω από την πηγή, υπάρχει καθρέφτης (σχ. 6.5).



(α) Ένας φωτεινός παλμός που εκπέμπεται από την πηγή Ο΄ και επιστρέφει ανακλώμενος από ένα καθρέφτη, όπως παρατηρείται στο Σ΄. (β) Η διαδρομή του ίδιου φωτεινού παλμού όπως παρατηρείται στο Σ.

Σχήμα 6-5.

Το χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο το φως διανύει την απόσταση πηγή - καθρέφτης - πηγή, όπως γίνεται αντιληπτό από έναν επιβάτη του τρένου, θα είναι

$$\Delta t_0 = \frac{2d}{c} \qquad (6.1)$$

Ας δούμε πώς μετράει τη διάρκεια του ίδιου φαινομένου ένας παρατηρητής που στέκεται ακίνητος στο σταθμό. Από τη στιγμή που εκπέμφθηκε το φως μέχρι να επιστρέψει στην πηγή του, το τρένο θα έχει μετατοπισθεί - για τον ακίνητο παρατηρητή - κατά $\Delta s = u\Delta t$. Επομένως, γι' αυτόν η διαδρομή του φωτός θα είναι διαφορετική. Θα έχει συνολικό μήκος $2l$ όπου $l = \sqrt{d^2 + \left(\frac{u\Delta t}{2}\right)^2}$.

Το φως έχει την ίδια ταχύτητα για όλους τους παρατηρητές. Ο χρόνος που χρειάζεται το φως για να διατρέξει αυτή την απόσταση θα είναι

$$\Delta t = \frac{2l}{c} = \frac{2\sqrt{d^2 + \left(\frac{u\Delta t}{2}\right)^2}}{c} \qquad (6.2)$$

Ποια σχέση συνδέει τις δυο χρονικές διάρκειες του ίδιου φαινομένου όπως γίνεται αντιληπτό από τους δυο διαφορετικούς παρατηρητές; Λύνουμε το σύστημα των (6.1) και (6.2) ως προς Δt απαλείφοντας το d και βρίσκουμε:

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}} \qquad (6.3)$$

Βλέπουμε ότι $\Delta t > \Delta t_0$, δηλαδή ότι το ίδιο φαινόμενο έχει διαφορετική διάρκεια για καθένα από τους δυο παρατηρητές.

Ένα γεγονός που συμβαίνει μέσα σ' ένα σύστημα αναφοράς Σ΄ το οποίο κινείται ως προς ένα σύστημα αναφοράς Σ έχει μεγαλύτερη διάρκεια για έναν παρατηρητή που είναι ακίνητος στο Σ απ' ότι για έναν παρατηρητή που είναι ακίνητος στο Σ΄.

Το συμπέρασμα αυτό καθιερώθηκε να λέγεται **διαστολή του χρόνου**.

Κάθε αδρανειακό σύστημα έχει τον **ιδιόχρονό** του. Ο ιδιόχρονος του αδρανειακού συστήματος είναι ο χρόνος που μετράει ένα ρολόι ακίνητο ως προς το αδρανειακό σύστημα. Αν συγχρονίσουμε δυο πανομοιότυπα ρολόγια και στη συνέχεια θέσουμε σε κίνηση το ένα από αυτά, το κινούμενο ρολόι θα πηγαίνει πίσω σε σχέση με αυτό που θεωρήσαμε ακίνητο. Ο χρόνος, λοιπόν, δεν είναι απόλυτος. Εξαρτάται από την ταχύτητα με την οποία ένα αδρανειακό σύστημα κινείται ως προς κάποιο άλλο. Με άλλα λόγια εξαρτάται από την περιοχή του χωροχρόνου στην οποία βρισκόμαστε.

Όλες οι διαδικασίες - φυσικές, χημικές, βιολογικές - που συμβαίνουν σ' ένα σύστημα αναφοράς που κινείται σε σχέση μ' ένα άλλο, που θεωρείται ακίνητο, μετρούμενες με ρολόγια του ακίνητου συστήματος, συντελούνται πιο αργά από τις αντίστοιχες που θα συνέβαιναν στο ακίνητο σύστημα. Εάν μετρήσουμε μ' ένα ρολόι της Γης το ρυθμό με τον οποίο κτυπά η καρδιά ενός αστροναύτη όσο βρίσκεται στη Γη και μετά με το ίδιο ρολόι την ώρα που ταξιδεύει θα βρούμε ότι όταν ταξιδεύει η καρδιά του κτυπά με αργότερο ρυθμό. Ο ίδιος ο αστροναύτης, όμως, δε νιώθει καμία αλλαγή.

Παραδειγμα 6.1

Ένα τρένο ταξιδεύει με ταχύτητα $u = 108\ km/h = 30\ m/s$. Ένας επιβάτης του τρένου, που ακούει ένα τραγούδι, κτυπάει τα χέρια του προσπαθώντας να κρατήσει το ρυθμό. Για τον επιβάτη ο χρόνος ανάμεσα σε δυο διαδοχικά χτυπήματα είναι Δt_0. Πόσος θα είναι ο χρόνος αυτός για έναν παρατηρητή που στέκει ακίνητος στην αποβάθρα;

Απάντηση:

Σύμφωνα με τη σχέση (6.3) $\Delta t = \dfrac{1}{\sqrt{0,99999999999999}}\Delta t_0$

Το Δt είναι πρακτικά ίσο με το Δt_0 . Στα όρια της πραγματικότητας που ζούμε δεν είναι αντιληπτή η διαστολή του χρόνου λόγω της κίνησης ενός συστήματος αναφοράς σε σχέση με ένα άλλο. Η παγιωμένη αντίληψή μας ότι ο χρόνος είναι απόλυτος είναι απολύτως δικαιολογημένη, όσο οι ταχύτητες με τις οποίες κινούνται τα συστήματα αναφοράς μας είναι πολύ μικρότερες της ταχύτητας του φωτός. Αν τρένο του προβλήματος ταξίδευε με ταχύτητα

$u = 0,5\ c$ θα ήταν $\Delta t = 1,155\ \Delta t_0$

αν η ταχύτητά του ήταν

$u = 0,9\ c$ θα ήταν $\Delta t = 2,294\ \Delta t_0$

ενώ αν $u = 0,99\ c$ θα ήταν $\Delta t = 7,089\ \Delta t_0$

Ο παρατηρητής στην αποβάθρα υποθέτει ότι ο επιβάτης του τρένου ακούει ένα τραγούδι με πολύ πιο αργό ρυθμό.

Στο μακρόκοσμο, ταχύτητες συγκρίσιμες με την ταχύτητα του φωτός είναι αδύνατες για τα σημερινά δεδομένα. Το ποσό της ενέργειας που απαιτείται για να επιταχύνουμε ένα διαστημόπλοιο σ' αυτές τις ταχύτητες είναι δισεκατομμύρια φορές μεγαλύτερο από αυτό που χρησιμοποιείται για να τεθεί σε τροχιά ένα διαστημικό λεωφορείο.

Η διαστολή του χρόνου παρ' όλα αυτά έχει επιβεβαιωθεί πειραματικά. Το 1972 επιστήμονες συγχρόνισαν ατομικά ρολόγια καισίου, που έχουν ακρίβεια $1/10^{13}\ s$. Κάποια από τα συγχρονισμένα ρολόγια τα πήραν μαζί τους σε ένα μεγάλο ταξίδι με αεριωθούμενο αεροπλάνο ενώ κάποια άλλα τα άφησαν στη Γη. Επιστρέφοντας στη Γη τα ρολόγια που ταξίδεψαν παρουσίασαν την προβλεπόμενη από τη θεωρία της σχετικότητας διαφορά στη μέτρηση του χρόνου του ταξιδιού σε σχέση με αυτά που έμειναν στη Γη. Για την ιστορία αναφέρουμε ότι η διαφορά ήταν της τάξης των $10^{-9}\ s\ (1\ ns)$.

Το CERN είναι εγκατεστημένο έξω από τη Γενεύη και χρηματοδοτείται από όλα τα ευρωπαϊκά κράτη. Ο κόκκινος κύκλος στη φωτογραφία δείχνει τη θέση ενός υπόγειου επιταχυντή σωματιδίων

Εικόνα 6-4.

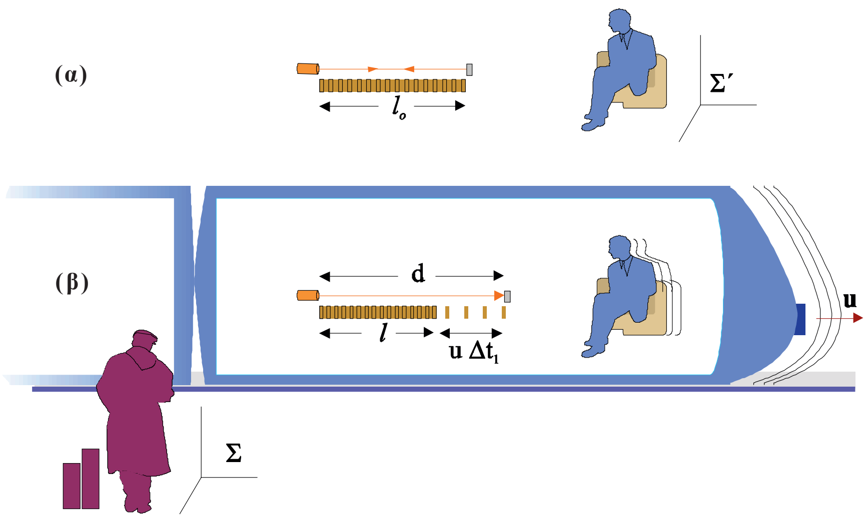
Άλλη πειραματική επιβεβαίωση προέρχεται από τη μέτρηση του χρόνου διάσπασης των μιονίων. Τα μιόνια (μ) είναι ασταθή σωματίδια που παράγονται όταν κοσμική ακτινοβολία βομβαρδίζει τα ανώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας. Η μέση διάρκεια ζωής τους είναι $\tau_0 = 2,2\times10^{-6}\,s$ όταν ο χρόνος μετριέται ως προς ένα σύστημα αναφοράς όπου τα μιόνια ηρεμούν. Τα μιόνια κινούνται με ταχύτητα που προσεγγίζει την ταχύτητα του φωτός ($0,99c$). Ακόμη και με μια τέτοια ταχύτητα, στη διάρκεια της ζωής τους διανύουν περίπου 600 m. Είναι λοιπόν παράδοξο το γεγονός ότι ανιχνεύονται αρκετά μιόνια στην επιφάνεια της Γης έχοντας διανύσει αρκετά χιλιόμετρα από το σημείο παραγωγής τους στην ανώτερη ατμόσφαιρα. Το παράδοξο αίρεται αν συνυπολογίσουμε το φαινόμενο της διαστολής του χρόνου. Για έναν παρατηρητή στη Γη ο μέσος χρόνος ζωής ενός μιονίου θα είναι $\tau = \dfrac{\tau_0}{\sqrt{1-(0,99c)^2/c^2}} \approx 16\times10^{-6}\,s$. Αν πολλαπλασιάσουμε αυτόν το χρόνο επί την ταχύτητα $0,99c$ βρίσκουμε ότι τα μιόνια πριν διασπασθούν διανύουν κατά μέσο όρο $4800\ m$. Δεν είναι, επομένως, παράδοξο, το ότι αρκετά μιόνια φτάνουν στην επιφάνεια της Γης.

Το 1976 στο Ευρωπαϊκό Κέντρο Πυρηνικών Ερευνών (CERN), στη Γενεύη, επιστήμονες επιτάχυναν μιόνια σε ταχύτητα $0,9994c$ και μέτρησαν το μέσο χρόνο ζωής τους. Το αποτέλεσμα έδωσε για τα κινούμενα μιόνια μέσο χρόνο ζωής 30 φορές μεγαλύτερο από αυτόν των ακινήτων, όπως προέβλεπε η ειδική θεωρία της σχετικότητας.

6.6. Η Σχετικότητα του Μήκους

Όπως το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί ανάμεσα σε δυο γεγονότα εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς από το οποίο το μετράμε, και η απόσταση ανάμεσα σε δυο σημεία εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς του παρατηρητή.

Ας κάνουμε πάλι ένα νοητό πείραμα, χρησιμοποιώντας το τρένο της προηγούμενης παραγράφου (σχ. 6.5).



(α) Ένας φωτεινός παλμός εκπέμπεται από μια πηγή που βρίσκεται στο άκρο ενός χάρακα, ανακλάται από ένα καθρέφτη που βρίσκεται στο άλλο άκρο και επιστρέφει στην πηγή. (β) Η κίνηση του φωτεινού παλμού όπως τον βλέπει ένας παρατηρητής στο Σ΄. Όπως φαίνεται στο σχήμα, η απόσταση που ταξιδεύει ο παλμός για να φτάσει στον καθρέφτη είναι μεγαλύτερη κατά την ποσότητα $u\Delta t_1$ από το μήκος (l) του χάρακα όπως το αντιλαμβάνεται αυτός.

Σχήμα 6-6.

Ένας χάρακας έχει τοποθετηθεί μέσα στο τρένο στη διεύθυνση κίνησης. Στο ένα άκρο του χάρακα στερεώνουμε μια πηγή φωτεινών αναλαμπών ενώ στο άλλο άκρο έναν καθρέφτη. Για τον παρατηρητή που ταξιδεύει μέσα στο τρένο ο χρόνος που χρειάζεται μια φωτεινή αναλαμπή για να επιστρέψει στην πηγή ανακλώμενη στον καθρέφτη θα είναι

$$\Delta t_o = \frac{2l_o}{c} \qquad (6.4)$$

όπου l_0 το μήκος του χάρακα όπως το αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής του τρένου.

Για τον παρατηρητή στο σταθμό, το φως ξεκινώντας από την πηγή, για να φτάσει στον καθρέφτη διανύει απόσταση $d = l + u\Delta t_1$ και για να επιστρέψει στην πηγή απόσταση $d' = l - u\Delta t_2$ όπου l το μήκος του χάρακα όπως το αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής.

Το φως διαδίδεται με την ίδια ταχύτητα και στις δύο περιπτώσεις. Επομένως μπορούμε να γράψουμε

$$d = c\Delta t_1 \quad \text{και} \quad d' = c\Delta t_2$$

ή $$l + u\Delta t_1 = c\Delta t_1 \quad \text{και} \quad l - u\Delta t_2 = c\Delta t_2$$

από τις οποίες παίρνουμε

$$\Delta t_1 = \frac{l}{c-u} \quad \text{και} \quad \Delta t_2 = \frac{l}{c+u}$$

Ο συνολικός χρόνος στον οποίο το φως διατρέχει την απόσταση πηγή - καθρέφτης - πηγή θα είναι:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{l}{c-u} + \frac{l}{c+u}$$

και τελικά $$\Delta t = \frac{2l}{c\left(1 - u^2/c^2\right)} \qquad (6.5)$$

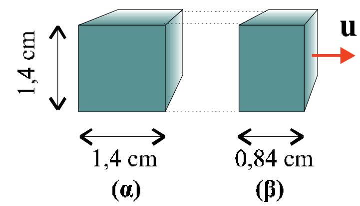
Από τις (6.3), (6.4) και (6.5) βρίσκουμε

$$\boxed{l = l_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad (6.6)$$

Βλέπουμε ότι το μήκος (l) που μετράει ο παρατηρητής που είναι ακίνητος στο σταθμό είναι μικρότερο από το μήκος (l_o) που μετράει ο παρατηρητής που βρίσκεται στο τρένο. Το φαινόμενο αυτό το ονομάζουμε «**συστολή μήκους**».

Το μήκος ενός αντικειμένου όπως μετριέται στο σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο ηρεμεί (το l_o στο πείραμά μας), ονομάζεται **ιδιομήκος** του αντικειμένου **ή μήκος ηρεμίας**.

Αποδείξαμε ότι μήκη σε διεύθυνση παράλληλη στη διεύθυνση της σχετικής κίνησης δυο αδρανειακών συστημάτων αναφοράς συστέλλονται. Αποδεικνύεται ακόμη ότι μήκη κάθετα στη διεύθυνση της κίνησης δε συστέλλονται (σχ. 6.7).



(α) Κύβος ακίνητος ως προς τον παρατηρητή. (β) Ο ίδιος κύβος κινούμενος με ταχύτητα $u = 0,8c$ ως προς τον παρατηρητή.

Σχήμα 6-7.

Εδώ αξίζει να σημειώσουμε ότι στην πραγματικότητα δε συστέλλεται το ίδιο το αντικείμενο, αλλά η μέτρησή του από ένα άλλο σύστημα αναφοράς. Είναι ο χώρος που παραμορφώνεται και όχι το αντικείμενο, όπως επίσης είναι ο χρόνος που παραμορφώνεται όταν βρίσκουμε ότι κάποια ρολόγια πηγαίνουν πιο αργά και όχι τα ίδια τα ρολόγια. Οι υπολογισμοί μας δε μέτρησαν παραμορφώσεις αντικειμένων ή γεγονότων αλλά διαφορετικές συνθήκες που επικρατούν στις διάφορες περιοχές του χωροχρόνου.

Παράδειγμα 6.2

Ας υποθέσουμε πάλι ένα τρένο που ταξιδεύει με ταχύτητα $u = 108\ km/h \quad (30\ m/s)$. Ένας επιβάτης του μετράει, με μια μετροταινία, το μήκος του βαγονιού στο οποίο βρίσκεται και το βρίσκει 25 m. Πόσο θα είναι το μήκος του βαγονιού για παρατηρητή ακίνητο στο σταθμό;

Απάντηση :

Σύμφωνα με την εξίσωση (6.6)

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = (25m)\cdot\sqrt{0,99999999999999} = 25\ m$$

Ο ακίνητος παρατηρητής βρίσκει στην ουσία, $l = l_0$. Η παγιωμένη μας αντίληψη για το αναλλοίωτο του μήκους είναι απολύτως δικαιολογημένη όσο οι ταχύτητες με τις οποίες τα συστήματα αναφοράς μας είναι πολύ μικρότερες της ταχύτητας του φωτός.

Ας υποθέσουμε ότι αντί για το τρένο του προβλήματος έχουμε ένα διαστημόπλοιο που ταξιδεύει με ταχύτητα $u = 0,5\ c$ και ο επιβάτης του πάλι μετράει το μήκος του και το βρίσκει $25\ m$. Πόσο θα το έβρισκε ο ακίνητος παρατηρητής της Γης;

$$l_1 = l_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = (25m)\cdot 0,866 = 21,65\ m$$

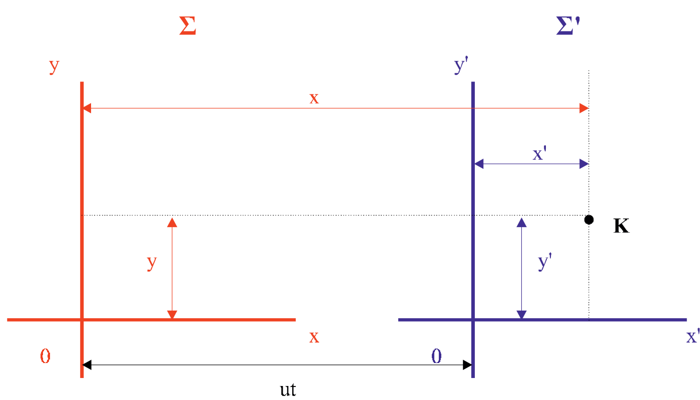
αν το διαστημόπλοιο ταξίδευε με ταχύτητα $u = 0{,}9\ c$
θα ήταν $l_2 = l_0 \cdot 0{,}436 = 10{,}9\ m$
ενώ αν ταξίδευε με ταχύτητα $u = 0{,}99\ c$
το μήκος του θα ήταν μόλις $l_3 = l_0 \cdot 0{,}141 = 3{,}525\ m$.

6.7. Μετασχηματισμοί Lorentz

Στις προηγούμενες δυο παραγράφους δείξαμε ότι η μέτρηση του μήκους και του χρόνου δε δίνει τα ίδια αποτελέσματα για δυο παρατηρητές που είναι ακίνητοι ως προς τα συστήματα αναφοράς τους, αν το σύστημα αναφοράς του ενός (Σ') κινείται με ταχύτητα $\mathbf{u}$ ως προς το σύστημα αναφοράς του άλλου (Σ).

Χρειαζόμαστε κάποιους «κανόνες» που να μετασχηματίζουν την εικόνα της πραγματικότητας του ενός παρατηρητή σε αυτήν κάποιου άλλου. Πιο συγκεκριμένα χρειαζόμαστε κάποιες σχέσεις μετασχηματισμού, ούτως ώστε οι μετρήσεις που κάνει ο παρατηρητής στο Σ να είναι αποδεκτές στο Σ' και αντίστροφα.

Ας υποθέσουμε ότι το Σ' κινείται ως προς το Σ παράλληλα προς τον άξονα των x και ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ τα δύο συστήματα ταυτίζονται (σχ. 6.8). Ένα σημείο K θα έχει ως προς το Σ συντεταγμένες (x, y, z) και ως προς το Σ' συντεταγμένες (x', y', z'). Για το x θα ισχύει $x = ut + x'$. Όμως μιλάμε για ένα x' όπως το βλέπει ο παρατηρητής του Σ και όχι όπως το βλέπει ο παρατηρητής του Σ' δηλαδή, συνεσταλμένο.



Σχήμα 6-8.

Για να το ξεχωρίζουμε θα το συμβολίζουμε x'_Σ. Πιο σωστά λοιπόν $x = ut + x'_\Sigma$. Μεταξύ του x'_Σ και του x' ισχύει η σχέση (6.6) δηλαδή $x'_\Sigma = x'\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}$.

$$x = ut + x'\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \qquad (6.7)$$

Λύνοντας ως προς x' προκύπτει $x' = \dfrac{x - ut}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}$ **(6.8)**

Για τα y', z' θα ισχύει $y' = y$ **(6.9)**

και $z' = z$ **(6.10)**

Έτσι αν ο παρατηρητής του Σ διαβιβάσει σ' αυτόν του Σ' όλες του τις μετρήσεις (x, y, z, u, t) τότε ο παρατηρητής του Σ' μπορεί να βρει τη θέση του Κ χωρίς να κάνει δικές του μετρήσεις.

Κανένα αδρανειακό σύστημα δε μπορεί να θεωρηθεί απολύτως ακίνητο. Όπως θεωρήσαμε το Σ ακίνητο και το Σ' κινούμενο με **u** μπορούμε θεωρήσουμε το **Σ΄** ακίνητο και το **Σ** κινούμενο με **-u**. Θα πρέπει λοιπόν να ισχύει και πάλι μια σχέση απολύτως συμμετρική με την (6.7). Αντικαθιστώντας στην (6.7) τους τονούμενους χαρακτήρες με μη τονούμενους και αντίστροφα και την ταχύτητα u με $-u$, προκύπτει

$$x' = -ut' + x\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

Αντικαθιστώντας το x' με το ίσον του από την (6.8) και λύνοντας ως προς t' καταλήγουμε

$$t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \qquad \textbf{(6.11)}$$

H. A. Lorentz (1853-1928), Ολλανδός κορυφαίος θεωρητικός φυσικός. O Lorentz εισήγαγε τους μετασχηματισμούς του το 1890, προκειμένου να διασώσει την Ηλεκτρομαγνητική θεωρία του Maxwell που δεν υπάκουε στους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου. Ο Einstein ήταν ο πρώτος που κατανόησε τη φυσική τους σημασία το 1905.

Εικόνα 6-5.

Οι εξισώσεις (6.8), (6.9), (6.10) και (6.11) ονομάζονται μετασχηματισμοί Lorentz από το Σ στο Σ'. Τους παραθέτουμε συγκεντρωτικά, μαζί με τους αντίστροφους μετασχηματισμούς (από το Σ' στο Σ).

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \end{aligned}}$$

← Από το Σ στο Σ΄

Από Σ΄ στο Σ →

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t' + ux'/c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \end{aligned}}$$

Βλέπουμε ότι όταν $u \ll c$ οι μετασχηματισμοί Lorentz δίνουν $x' = x - ut$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = t$, δηλαδή συμπίπτουν με τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου.

Επίσης βλέπουμε ότι το x' εξαρτάται και από το t και το t' από το x. Στην ειδική θεωρία της σχετικότητας ο χώρος και ο χρόνος είναι αλληλένδετοι. Μιλάμε πια για **χωροχρόνο**.

Το Ταυτόχρονο και η Θεωρία της Σχετικότητας

Ας υποθέσουμε ότι δυο γεγονότα συμβαίνουν ταυτόχρονα για ένα παρατηρητή ακίνητο ως προς το σύστημα Σ' στις θέσεις (x_1', y_1', z_1', t_1') και (x_2', y_2', z_2', t_2'). Θα συμβαίνουν ταυτόχρονα και για έναν παρατηρητή ακίνητο ως προς το Σ;

Σύμφωνα με τους αντίστροφους μετασχηματισμούς Lorentz (από το Σ' στο Σ) η χρονική στιγμή που θα συμβεί το γεγονός 1 για τον παρατηρητή του Σ θα είναι $t_1 = \dfrac{t_1' + ux_1'/c^2}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$ και η χρονική στιγμή που θα συμβεί το γεγονός 2 θα είναι $t_2 = \dfrac{t_2' + ux_2'/c^2}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$.

Ο χρόνος που μεσολάβησε ανάμεσα στα δυο γεγονότα για τον παρατηρητή του Σ θα είναι

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta t' + u\Delta x'/c^2}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \qquad (6.12)$$

Αν τα γεγονότα είναι ταυτόχρονα για τον παρατηρητή του Σ' τότε $\Delta t' = 0$, οπότε $\Delta t = \dfrac{u\Delta x'/c^2}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \neq 0$

Αυτό σημαίνει ότι για τον παρατηρητή που βρίσκεται στο Σ τα γεγονότα δεν είναι ταυτόχρονα. Βέβαια αν τα γεγονότα συμβαίνουν σε μικρή απόσταση μεταξύ τους ως προς το Σ' και το Σ' κινείται με ταχύτητα πολύ μικρότερη του c ως προς το Σ το Δt είναι πρακτικά μηδενικό και τα γεγονότα ταυτόχρονα και ως προς το Σ.

Παράδειγμα 6.3

Ένα μαχητικό αεροπλάνο κινείται με ταχύτητα $680\ m/s$ (διπλάσια της ταχύτητας του ήχου). Το αεροπλάνο έχει μήκος $20\ m$. Ο πιλότος αντιλαμβάνεται ταυτόχρονα δυο εκρήξεις, μια από το ρύγχος του αεροπλάνου και μια από την ουρά. Με ποια διαφορά χρόνου αντιλαμβάνεται τις εκρήξεις ένας παρατηρητής ακίνητος στη Γη;

Απάντηση:

Ένας παρατηρητής θα «δει» τις λάμψεις με χρονική διαφορά

$$\Delta t = \frac{u\Delta x'/c^2}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} = \frac{680\cdot 20/9\cdot 10^{16}}{\sqrt{1-\dfrac{680^2}{9\cdot 10^{16}}}} = 0{,}00000000000015\ s$$

Η διαφορά αυτή είναι πάρα πολύ μικρή και δε γίνεται αντιληπτή.

6.8. Μετασχηματισμοί Ταχυτήτων Lorentz

Έστω ότι σ' ένα σημείο του συστήματος συντεταγμένων Σ βρίσκεται ένα σώμα που μετατοπίζεται, κινούμενο στη διεύθυνση του άξονα των x. Για έναν παρατηρητή ακίνητο στο Σ σε χρόνο Δt το σώμα μετακινήθηκε κατά Δx. Ένας παρατηρητής ακίνητος στο Σ' αντιλαμβάνεται ότι το γεγονός διάρκεσε χρόνο $\Delta t'$ και ότι η μετατόπιση ήταν $\Delta x'$. Το Σ', όμως, κινείται με ταχύτητα u παράλληλα στον άξονα των x.

Από τις σχέσεις $x' = \dfrac{x - ut}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}$ και $t' = \dfrac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}$

εύκολα προκύπτουν $\Delta x' = \dfrac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}$ και $\Delta t' = \dfrac{\Delta t - u\Delta x/c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}$

και για στοιχειώδεις μεταβολές

$$dx' = \frac{dx - udt}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \quad \text{και} \quad dt' = \frac{dt - udx/c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}$$

Η ταχύτητα υ' του κινητού ως προς το Σ' θα είναι

$$\upsilon' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - udt}{dt - udx/c^2}$$

ή

$$\upsilon' = \frac{\dfrac{dx}{dt} - u}{1 - \dfrac{u}{c^2}\dfrac{dx}{dt}}$$

Όμως $\dfrac{dx}{dt} = \upsilon$ είναι η ταχύτητα του κινητού όπως την αντιλαμβάνεται παρατηρητής του Σ. Επομένως, η τελευταία σχέση παίρνει τη μορφή

$$\boxed{\upsilon' = \frac{\upsilon - u}{1 - \dfrac{u}{c^2}\upsilon}} \qquad (6.13)$$

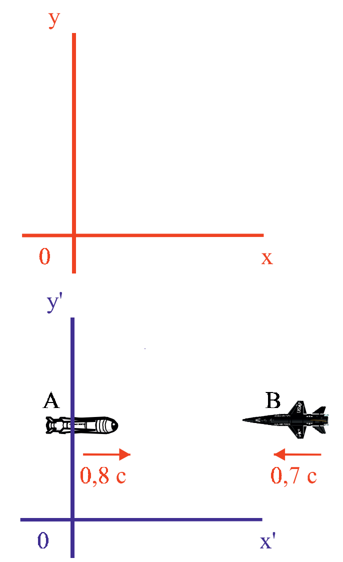
Η σχέση αυτή εκφράζει την ταχύτητα υ' του κινητού, ως προς το Σ', σε συνάρτηση με την ταχύτητά του υ ως προς το σύστημα Σ.

Αντίστροφα, η σχέση $\boxed{\upsilon = \dfrac{\upsilon' + u}{1 + \dfrac{u}{c^2}\upsilon'}}$ (6.14)

εκφράζει την ταχύτητα υ' του κινητού, ως προς το σύστημα Σ' σε συνάρτηση με την ταχύτητά του ως προς το Σ.

Παρατηρούμε ότι όταν οι ταχύτητες υ και u πολύ μικρότερες από c θα είναι $\upsilon' \approx \upsilon - u$ και $\upsilon \approx \upsilon' + u$ όπως προβλέπουν οι μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου.

Ακόμη, όταν $\upsilon = c$ προκύπτει $\upsilon' = c$ και, αντίστροφα, όταν $\upsilon' = c$ προκύπτει $\upsilon = c$, δηλαδή όταν ένα σώμα κινείται με την ταχύτητα του φωτός η ταχύτητά του είναι η ίδια για όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Το συμπέρασμα συμφωνεί με τη δεύτερη παραδοχή της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας.



Σχήμα 6-9.

Παράδειγμα 6.4

Ένας παρατηρητής στη Γη βλέπει δυο διαστημόπλοια A, B να κινούνται πάνω στην ίδια ευθεία, με ταχύτητες $0{,}8c$ και $0{,}7c$, αντίστοιχα, αντίθετης φοράς. (σχ. 6.9). Με τι ταχύτητα κινείται το B ως προς το A;

Απάντηση:

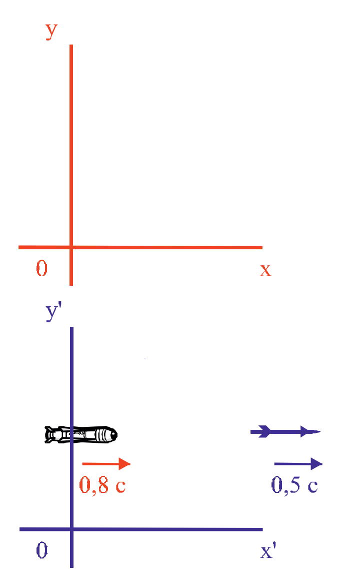
Σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου ο πιλότος του A θα έβλεπε το B να πλησιάζει προς αυτόν με ταχύτητα $0{,}8c + 0{,}7c = 1{,}5c$. Η ταχύτητα αυτή είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός και έρχεται σε σύγκρουση με την παραδοχή ότι τίποτε δεν κινείται με ταχύτητα μεγαλύτερη του c. Ας δούμε τι προβλέπουν οι μετασχηματισμοί Lorentz. Αν θεωρήσουμε σαν Σ τη Γη και σαν Σ' το διαστημόπλοιο A, η ταχύτητα του B ως προς το A θα δίνεται από τη σχέση 6.13 δηλαδή

$$\upsilon'_B = \frac{\upsilon_B - u}{1 - \frac{u}{c^2}\upsilon_B}$$

Αν θεωρήσω την ταχύτητα του A ως προς τη Γη θετική θα έχω $u = 0{,}8c$ και $\upsilon_B = -0{,}7c$ οπότε

$$\upsilon'_B = \frac{\upsilon_B - u}{1 - \frac{u}{c^2}\upsilon_B} \quad \text{και τελικά}$$

$$\upsilon'_B = \frac{-0{,}7c - 0{,}8c}{1 - \frac{0{,}8c}{c^2}(-0{,}7c)} = -0{,}96\,c$$



Σχήμα 6-10.

Παράδειγμα 6.5

Διαστημόπλοιο που κινείται με ταχύτητα $0{,}6c$ ως προς τη Γη εκτοξεύει πύραυλο με ταχύτητα $0{,}5c$ ως προς αυτό, και με κατεύθυνση ίδια με την κατεύθυνση της ταχύτητας του διαστημόπλοιου (σχ. 6.10). Ποια η ταχύτητα του πυραύλου ως προς τη Γη;

Απάντηση:

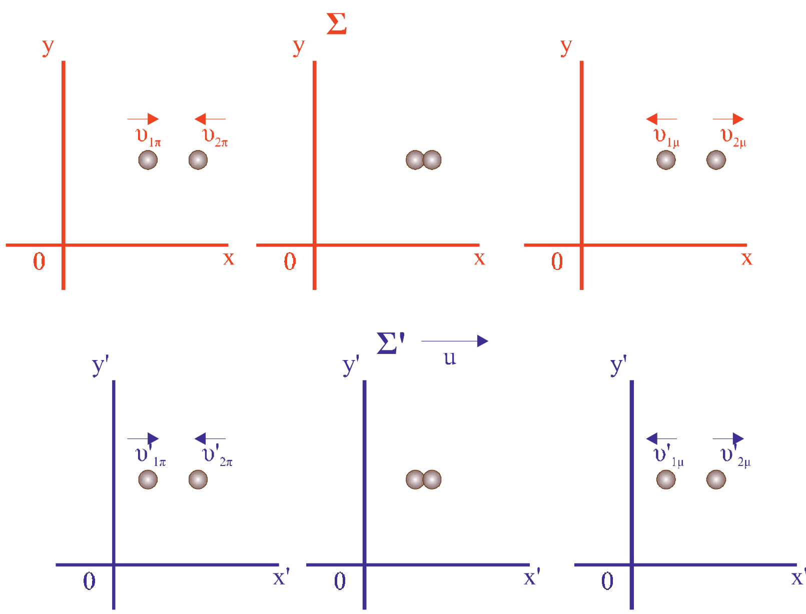
Σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου, ο παρατηρητής στη Γη θα έβλεπε τον πύραυλο να κινείται με την ταχύτητα του διαστημοπλοίου συν την ταχύτητά του ως προς το διαστημόπλοιο δηλαδή $0,6c+0,5c=1,1c$. Η ταχύτητα αυτή είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός. Το άτοπο αίρεται αν χρησιμοποιήσουμε τους μετασχηματισμούς Lorentz. Αν θεωρήσουμε σαν Σ τη Γη και σαν Σ' το διαστημόπλοιο η ταχύτητα του πυραύλου ως προς τη Γη θα δίνεται από τη σχέση 6.14. Είναι δηλαδή

$$\upsilon=\frac{\upsilon'+u}{1+\dfrac{u}{c^2}\upsilon'} \quad \text{οπότε} \quad \upsilon=\frac{0,5c+0,6c}{1+\dfrac{0,6c}{c^2}0,5c}=0,85c$$

6.9. Η Σχετικιστική Ορμή

Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ορμής, η ορμή συστήματος δυο ή περισσότερων σωμάτων διατηρείται σταθερή, αν το σύστημα των σωμάτων είναι απομονωμένο.

Μια συνηθισμένη εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ορμής είναι η περίπτωση της κρούσης δυο σωμάτων.



Σχήμα 6-11.

Ας υποθέσουμε ότι δυο σώματα κινούνται παράλληλα με τον άξονα των x του συστήματος Σ με ταχύτητες $\upsilon_{1\pi}$ και $\upsilon_{2\pi}$ (σχ. 6.10) και συγκρούονται. Μετά την κρούση τα σώματα θα έχουν ταχύτητες $\upsilon_{1\mu}$ και $\upsilon_{2\mu}$ αντίστοιχα. Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ορμής θα ισχύει $m_1\upsilon_{1\pi}-\mathrm{m}_2\upsilon_{2\pi}=m_2\upsilon_{2\mu}-\mathrm{m}_1\upsilon_{1\mu}$. Οι δείκτες ($\pi$, μ) παραπέμπουν στο «αμέσως πριν» και στο «αμέσως μετά» την κρούση.

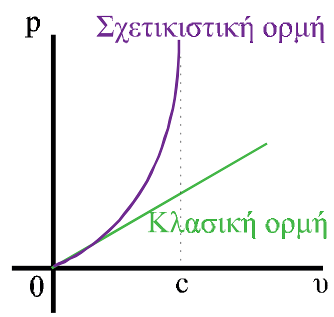
Ας παρατηρήσουμε την ίδια κρούση από ένα σύστημα αναφοράς Σ' που κινείται με ταχύτητα $\mathbf{u}$ ως προς το Σ. Οι ταχύτητες με τις οποίες θα αντιλαμβανόμαστε να κινούνται τα σώματα πριν και μετά την κρούση θα είναι $\upsilon'_{1\pi}$, $\upsilon'_{2\pi}$, $\upsilon'_{1\mu}$, $\upsilon'_{2\mu}$, που δίνονται από τη σχέση μετασχηματισμού ταχυτήτων του Lorentz (6.13). Αν υπολογίσουμε την ορμή του συστήματος με βάση τις τιμές αυτές, θα διαπιστώσουμε ότι για το σύστημα Σ' η αρχή διατήρησης της ορμής, με τη μορφή που γνωρίζουμε, δεν ισχύει. Όμως οι νόμοι της Φυσικής θα έπρεπε να ισχύουν με την ίδια μαθηματική μορφή για όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

Πρέπει, επομένως, να ορίσουμε την ορμή με τέτοιο τρόπο ώστε η αρχή διατήρησης της ορμής να ισχύει και στις περιπτώσεις στις οποίες εφαρμόζουμε τους μετασχηματισμούς Lorentz.

Η απαίτηση αυτή ικανοποιείται αν ορίσουμε την ορμή σώματος μάζας m που κινείται με ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}$ με τη σχέση:

$$\boxed{p = \frac{m\,\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}} \qquad (6.15)$$

(σχετικιστικός ορισμός της ορμής)



Παρατηρούμε ότι για υ<<c οι δυο καμπύλες πρακτικά συμπίπτουν.

Σχήμα 6-12.

Παρατηρήσεις

1. Με τον σχετικιστικό ορισμό της ορμής εξασφαλίζεται η ισχύς της αρχής διατήρησης της ορμής για όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.
2. Όταν η ταχύτητα του σώματος υ είναι πολύ μικρότερη του c προκύπτει $p \approx m\,\upsilon$. Βλέπουμε, δηλαδή, ότι ο προηγούμενος κλασικός ορισμός της ορμής δεν καταργείται, απλώς αποτελεί μια ειδική περίπτωση του σχετικιστικού ορισμού.
3. Η σχετικιστική ορμή είναι γενικά μεγαλύτερη της κλασικής.
4. Όταν η ταχύτητα του σώματος τείνει στο c η ορμή του τείνει στο άπειρο. (σχ. 6.12).
5. Το μέγεθος m ταυτίζεται με αυτό που λέμε μάζα στη νευτώνεια μηχανική και εκφράζει και εδώ την αδράνεια του σώματος. Στη σχετικότητα το ονομάζουμε **μάζα ηρεμίας** του σώματος.
6. Εφόσον η ορμή δεν είναι πια ανάλογη της ταχύτητας και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής, δηλαδή η δύναμη, δε θα είναι ανάλογη με το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας, δηλαδή την επιτάχυνση. Είναι φανερό ότι, όσο αυξάνεται η ταχύτητα ενός σώματος, η επιτάχυνση που οφείλεται σε μια δεδομένη δύναμη συνεχώς μειώνεται. Όταν η ταχύτητα του σώματος τείνει στο c η επιτάχυνσή του τείνει στο μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα του φωτός είναι η ανώτερη δυνατή ταχύτητα στη φύση.

6.10. Σχετικιστική Ενέργεια

Ένα από τα σπουδαιότερα συμπεράσματα της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας είναι πως ένα σώμα μάζας ηρεμίας m που κινείται με ταχύτητα υ έχει ενέργεια

$$\boxed{E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}} \qquad (6.16)$$

Την ενέργεια αυτή δε μπορούμε να τη θεωρήσουμε μόνο κινητική. Αν θέσουμε όπου $\upsilon = 0$ βρίσκουμε $E = mc^2$ και όχι $E = 0$.

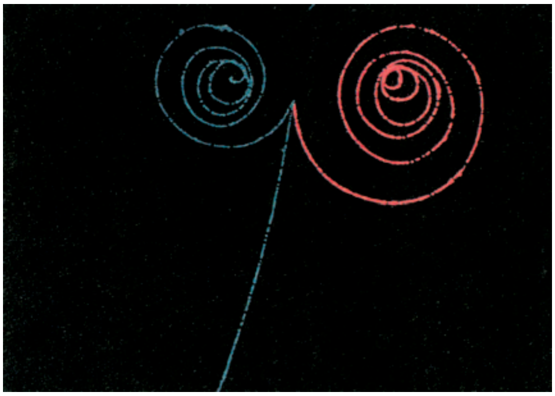
Το ποσό ενέργειας mc^2 που κατέχει ένα σώμα όταν ηρεμεί το ονομάζουμε ενέργεια ηρεμίας του σώματος.

Η ενέργεια ηρεμίας είναι ένα ποσό ενέργειας που συσχετίζεται μόνο με τη μάζα ηρεμίας του σώματος. Με άλλα λόγια, μια ποσότητα μάζας m ισοδυναμεί με ένα ποσό ενέργειας mc^2. Πηγαίνοντας το συλλογισμό ένα βήμα πιο πέρα λέμε ότι η μάζα και η ενέργεια είναι δυο όψεις της ίδιας οντότητας.

Είναι πάρα πολλά τα πειράματα όπου ένα μετρήσιμο ποσό μάζας εξαφανίζεται και δίνει τη θέση του σε ένα ισοδύναμο (mc^2) ποσό ενέργειας και, αντίστροφα, ένα ποσό ενέργειας μετατρέπεται σε μάζα.

Σε μια πυρηνική σχάση το άθροισμα των μαζών ηρεμίας των προϊόντων της σχάσης είναι μικρότερο από τη μάζα ηρεμίας του αρχικού πυρήνα. Το έλλειμμα μάζας πολλαπλασιαζόμενο επί c^2 δίνει το ποσό της εκλυόμενης ενέργειας.

Όταν πυρήνες υδρογόνου συνδέονται για να σχηματίσουν πυρήνες ηλίου, σχεδόν το 0,1% της μάζας τους μετατρέπεται σε ενέργεια. Αυτό συμβαίνει στα αστέρια και φυσικά, στον Ήλιο. Συγκεκριμένα, η μάζα του Ήλιου ελαττώνεται με ρυθμό 4,5 εκατομμύρια τόνους το δευτερόλεπτο. Παρόλο που ο ρυθμός αυτός για τα δικά μας δεδομένα είναι τρομακτικός, ο Ήλιος είναι τεράστιος. Η μάζα αυτή που «χάνεται» στον Ήλιο μετατρέπεται σε ενέργεια. Στο μέρος αυτής της ενέργειας, που φτάνει στη Γη, οφείλεται η διατήρηση της ζωής στον πλανήτη μας.

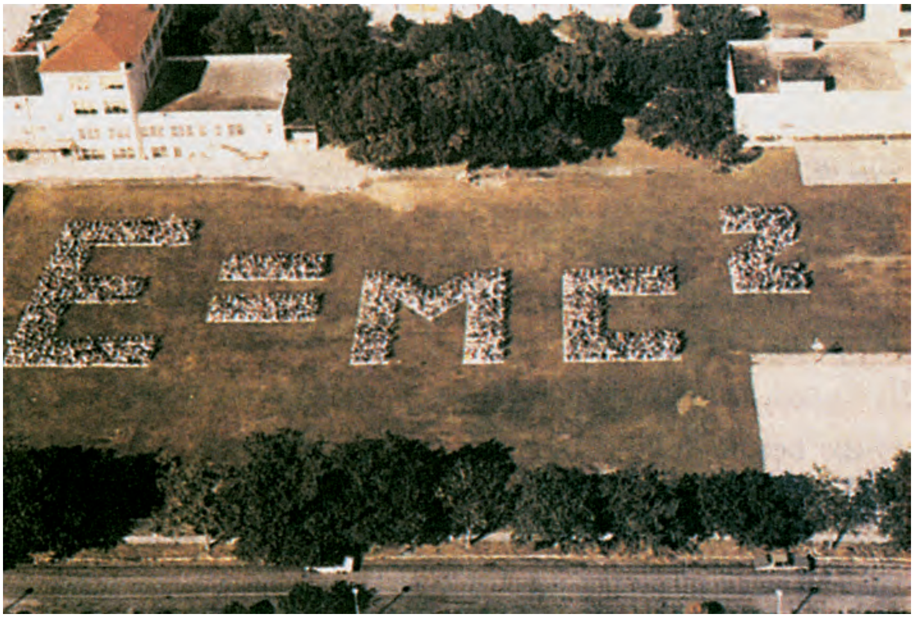


Ένα φωτόνιο ακτινοβολίας γ προσκρούει σε ένα ηλεκτρόνιο και μετατρέπεται σ' ένα ηλεκτρόνιο και ένα ποζιτρόνιο. Το φαινόμενο λέγεται δίδυμη γένεση. Ένα ποσό ενέργειας μετατράπηκε σε ύλη. Στη φωτογραφία η υλοποίηση του φωτονίου έγινε σε χώρο όπου υπάρχει μαγνητικό πεδίο. Το ποζιτρόνιο έχει αντίθετο φορτίο από το ηλεκτρόνιο και γι' αυτό διαγράφει σπειροειδή τροχιά αντίστροφης φοράς από αυτήν που διαγράφει το ηλεκτρόνιο.

Εικόνα 6-6.

Το 1932 ο Αμερικανός φυσικός C. D. Anderson (Άντερσον) ανακάλυψε πως ένα φωτόνιο ακτινοβολίας γ, μετατράπηκε σε ένα ζεύγος σωματιδίων. Το ένα ήταν ηλεκτρόνιο και το άλλο ποζιτρόνιο. Το φαινόμενο ονομάστηκε δίδυμη γένεση. Στο φαινόμενο αυτό ενέργεια (του φωτονίου) μετατρέπεται σε ύλη.

Οι αρχές διατήρησης της μάζας και της ενέργειας συντίθενται από τη θεωρία της σχετικότητας σε μια ευρύτερη αρχή διατήρησης μάζας-ενέργειας.



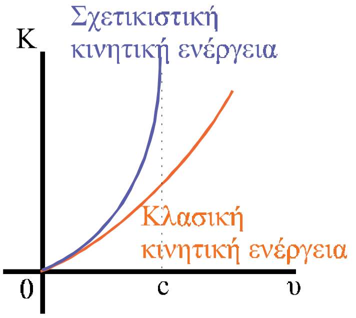
Μαθητές ενός λυκείου στο Μαϊάμι γιορτάζουν την εκατοστή επέτειο της γέννησης του Einstein.

Εικόνα 6-7.

Εάν θέλουμε να υπολογίσουμε την κινητική ενέργεια (K) του σώματος πρέπει από την ολική του ενέργεια (E) να αφαιρέσουμε την ενέργεια ηρεμίας (mc^2) του σώματος

$$\boxed{K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - mc^2} \qquad \textbf{(6.17)}$$

Η σχέση (6.17) για $\upsilon \ll c$ να δίνει $K = \frac{1}{2}m\upsilon^2$. (Για την απόδειξη της σχέσης βλέπε σελ. 216). Βλέπουμε επίσης ότι η σχέση (6.17) για $\upsilon = 0$ δίνει $K = 0$. Επίσης, όταν η υ τείνει στο c η κινητική ενέργεια τείνει στο άπειρο, όπως φαίνεται και στη γραφική παράσταση $K = f(\upsilon)$ του σχήματος 6.13



Παρατηρούμε ότι για υ«c οι δυο καμπύλες πρακτικά συμπίπτουν.

Σχήμα 6-13.

Παράδειγμα 6.6

Η μάζα του πρωτονίου και του νετρονίου είναι $1,67309\times10^{-27}\,kg$ και $1,67538\times10^{-27}\,kg$ αντίστοιχα. Η μάζα ενός πυρήνα δευτερίου $\left({}^2_1\mathrm{H}\right)$ είναι $3,34451\times10^{-27}\,kg$. Πόση ενέργεια πρέπει να προσφέρουμε για να διαχωρίσουμε τον πυρήνα του δευτερίου στα συστατικά του:

Απάντηση:

Εάν αθροίσουμε τη μάζα των συστατικών του πυρήνα βρίσκουμε ότι είναι μεγαλύτερη από τη μάζα του πυρήνα κατά Δm . Υπολογίζουμε το Δm.

$$\Delta m = (1,67309 + 1,67538 - 3,34451)\times10^{-27}\,kg = 0,00396\times10^{-27}\,kg$$

Η διαφορά μάζας μεταξύ της μάζας των συστατικών του πυρήνα και της μάζας του πυρήνα αντιστοιχεί σε ενέργεια

$$E = \Delta m c^2 = 0,00396\times10^{-27}\cdot\left(3\times10^8\right)^2 J = 0,03564\times10^{-11} J$$

Το πείραμα επαληθεύει ότι τόσο είναι το ποσό ενέργειας που πρέπει να προσφερθεί στον πυρήνα του δευτερίου για να διαχωριστεί στα συστατικά του. Η ενέργεια αυτή λέγεται **ενέργεια σύνδεσης του πυρήνα**.

Παράδειγμα 6.7

Ένα ηλεκτρόνιο κινείται με ταχύτητα $\upsilon = 0{,}85\ c$. Να βρεθεί η ενέργεια ηρεμίας του ηλεκτρονίου και η κινητική του ενέργεια σε eV. Η μάζα ηρεμίας ενός ηλεκτρονίου είναι $m = 9{,}1\times10^{-31}kg$.

Απάντηση:

Η ενέργεια ηρεμίας θα είναι

$$mc^2 = \left(9{,}1\times10^{-31}kg\right)\cdot\left(3\times10^8 m/s\right)^2 = 81{,}9\times10^{-15}J = 0{,}511\ MeV$$

Η ολική ενέργεια είναι $E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} = \dfrac{0{,}511\ MeV}{\sqrt{1-\left(\dfrac{0{,}85c}{c}\right)^2}} = 0{,}97\ MeV$

Η κινητική ενέργεια βρίσκεται αν από την ολική ενέργεια αφαιρέσουμε την ενέργεια ηρεμίας

$$K = E - mc^2 = 0{,}97\ MeV - 0{,}511\ MeV = 0{,}459\ MeV$$

6.11. Σχέση Ενέργειας - Ορμής

Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε τον αριθμητή της σχέσης (6.15) με c οπότε βρίσκουμε $p = \dfrac{mc\upsilon/c}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$

Λύνουμε ως προς $\dfrac{\upsilon}{c}$ και βρίσκουμε

$$\frac{\upsilon}{c} = \frac{p}{\sqrt{p^2+m^2c^2}}$$

Αυτό συνεπάγεται ότι

$$\sqrt{1-\upsilon^2/c^2} = \frac{mc}{\sqrt{p^2+m^2c^2}}$$

Αντικαθιστώντας στην (6.16) το $\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}$ με το ίσον του βρίσκουμε

$$\boxed{E = \sqrt{m^2c^4+p^2c^2}} \qquad (6.18)$$

Παρατηρούμε ότι όταν η ορμή του σώματος είναι ίση με το μηδέν (το σώμα ηρεμεί) έχει ενέργεια $E = mc^2$, όπως αναμενόταν.

Επίσης, όταν η μάζα ηρεμίας του σώματος είναι μηδενική, ισχύει η σχέση $E = pc$.

Αναρωτιέται κανείς πώς είναι δυνατόν ένα σώμα να έχει μηδενική μάζα ηρεμίας και ορμή διάφορη του μηδενός. Το ερώτημα είναι βάσιμο μόνο αν λάβουμε υπόψη μας τον κλασικό ορισμό της ορμής $\mathbf{p} = m\upsilon$. Αν όμως λάβουμε υπόψη μας το σχετικιστικό ορισμό της ορμής $\mathbf{p} = \dfrac{m\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$ βλέπούμε ότι αν ένα σωματίδιο έχει μηδενική μάζα ηρεμίας και κινείται με την ταχύτητα του φωτός η ορμή ισούται μ' ένα μαθηματικά απροσδιόριστο κλάσμα $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ και, πάντως, δεν είναι ίση με το μηδέν.

Η ύπαρξη σωματιδίων με μηδενική μάζα ηρεμίας έχει επιβεβαιωθεί πειραματικά. Πρόκειται για σωματίδια που κινούνται με την ταχύτητα του φωτός όπως το φωτόνιο και το νετρίνο. Τα σωματίδια αυτά μεταφέρουν ορμή και ενέργεια αλλά όχι μάζα, κάτι που μας θυμίζει έντονα το κύμα.

(6.12.) Μετασχηματισμοί Έντασης Ηλεκτρικού - Μαγνητικού Πεδίου

Μέχρι εδώ είδαμε πως μέσω των μετασχηματισμών Lorentz οι βασικοί νόμοι της μηχανικής ισχύουν ισοδύναμα σε όλα τα αδρανειακά συστήματα χωρίς να παραβιάζουν τις αρχές της θεωρίας της σχετικότητας. Τι γίνεται όμως με τον άλλο μεγάλο τομέα της Φυσικής, τον ηλεκτρομαγνητισμό;

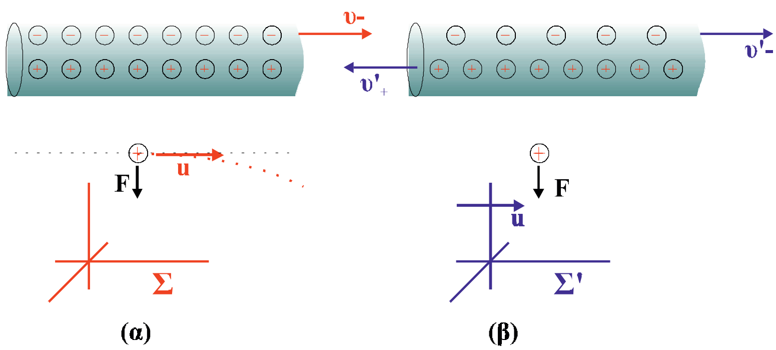
Σε πολλά φαινόμενα του ηλεκτρομαγνητισμού υπεισέρχονται μεγέθη όπως η ταχύτητα, το μήκος, ο χρόνος. Για παράδειγμα η δύναμη που ασκεί ένα μαγνητικό πεδίο σε ένα φορτισμένο σωματίδιο κινούμενο κάθετα στις δυναμικές γραμμές είναι $F = Bu|q|$, εξαρτάται δηλαδή άμεσα από μια ταχύτητα. Ακόμη η ένταση του πεδίου μεταξύ των οπλισμών ενός επίπεδου φορτισμένου πυκνωτή εξαρτάται από τις διαστάσεις των οπλισμών και τη μεταξύ τους απόσταση. Εφόσον οι ταχύτητες και τα μήκη έχουν διαφορετικές τιμές στα διάφορα αδρανειακά συστήματα καταλαβαίνουμε ότι και μεγέθη όπως η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ή του μαγνητικού πεδίου θα έχουν διαφορετική έκφραση, ανάλογα με το σύστημα αναφοράς από το οποίο παρατηρούμε τα φαινόμενα.

Είναι ανάγκη να βρούμε μετασχηματισμούς που να συνδέουν τις μετρήσεις των παραπάνω μεγεθών από δύο παρατηρητές σε διαφορετικά αδρανειακά συστήματα. Η παραγωγή αυτών των μετασχηματισμών στην πληρότητά τους είναι μια επίπονη μαθηματική διαδικασία. Εμείς απλά θα μελετήσουμε κάποια επιλεγμένα παραδείγματα και στο τέλος θα παραθέσουμε τους μετασχηματισμούς.

Κίνηση φορτίου παράλληλα με ρευματοφόρο αγωγό

Ένα θετικά φορτισμένο σωματίδιο κινείται με ταχύτητα u, στη διεύθυνση του άξονα των x ενός συστήματος αναφοράς Σ και παράλληλα προς ένα ρευματοφόρο αγωγό. Για έναν παρατηρητή ακίνητο ως προς το Σ το φορτίο θα δεχθεί δύναμη $F = Buq$ από το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ο αγωγός και θα παρεκκλίνει της ευθύγραμμης πορείας του (σχ. 6.14α).

Ο αγωγός δεν ασκεί καμία ηλεκτρική δύναμη στο σωματίδιο. Η πυκνότητα αρνητικού φορτίου είναι απολύτως ίση με αυτήν του θετικού φορτίου. Απλουστεύοντας λίγο μπορούμε να υποθέσουμε ότι μέσα στον αγωγό υπάρχει μια γραμμική κατανομή αρνητικών φορτίων που κινείται ισοταχώς προς τα δεξιά με ταχύτητα υ_- και μια γραμμική κατανομή, ίσων κατ' απόλυτη τιμή με τα αρνητικά, θετικών φορτίων που είναι ακίνητη. Η γραμμική πυκνότητα (φορτίο ανά μονάδα μήκους) και στις δυο κατανομές είναι ίδια, δηλαδή η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών φορέων φορτίου είναι η ίδια και για τις δυο κατανομές.



Σχήμα 6-14.

Ας δούμε τώρα πώς αντιλαμβάνεται το φαινόμενο ένας παρατηρητής ακίνητος ως προς σύστημα αναφοράς Σ' που κινείται ως προς το Σ με ταχύτητα u παράλληλη προς τον άξονα των x. (σχ. 6.14 β) Τον παρατηρητή αυτόν θα τον λέμε συνοπτικά Σ'.

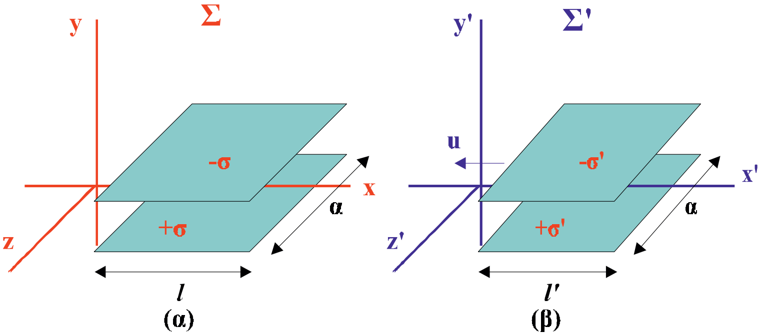
Ο Σ' βλέπει το φορτισμένο σωμάτιο ακίνητο (6.13). Δε μπορεί λοιπόν να ερμηνεύσει τη δύναμη που δέχεται το φορτισμένο σωματίδιο ως δύναμη μαγνητικού πεδίου. Ο Σ' όμως βλέπει και το ρευματοφόρο αγωγό διαφορετικά από τον Σ. Ως προς τον Σ' τα θετικά φορτία δεν είναι ακίνητα, κινούνται με ταχύτητα $\upsilon'_+ = -u$ ενώ τα αρνητικά με $\upsilon'_- = \dfrac{\upsilon_- - u}{1 - \dfrac{u}{c^2}\upsilon_-}$. Οι ταχύτητες υ'_+ και υ'_- δεν είναι ίσες.

Αυτό σημαίνει ότι η απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών αρνητικών φορτίων φαίνεται διαφορετική από την απόσταση δυο θετικών φορτίων (6.6). Η γραμμική πυκνότητα των αρνητικών φορτίων όπως την αντιλαμβάνεται ο Σ' είναι διαφορετική από τη γραμμική πυκνότητα των θετικών φορτίων. Με λίγα λόγια, για τον Σ' ο ρευματοφόρος αγωγός εμφανίζεται φορτισμένος και μάλιστα θετικά. Η δύναμη που δέχεται λοιπόν το φορτισμένο σωμάτιο για τον Σ' είναι ηλεκτρική και ασκείται από το ηλεκτρικό πεδίο του αγωγού. Η δύναμη αυτή είναι ακριβώς ίση με αυτήν του μαγνητικού πεδίου που αντιλαμβάνεται ο Σ.

Οι σχετικιστικοί μετασχηματισμοί των εντάσεων των πεδίων κάνουν άλλοτε ένα ηλεκτρικό πεδίο να φαίνεται σαν μαγνητικό και άλλοτε αντίστροφα.

Ομογενές πεδίο φορτισμένου πυκνωτή

Έστω φορτισμένος επίπεδος πυκνωτής (σχ. 6.15α) με τους οπλισμούς του παράλληλους στο επίπεδο xOz ενός συστήματος αναφοράς. Οι οπλισμοί ως προς το Σ, ως προς το οποίο ο πυκνωτής είναι ακίνητος, έχουν διαστάσεις $l \times a$. Η ένταση του πεδίου μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή είναι $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$, όπου σ η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στους οπλισμούς (ποσότητα φορτίου ανά μονάδα επιφανείας).



Σχήμα 6-15.

Έστω τώρα παρατηρητής ακίνητος ως προς σύστημα αναφοράς Σ' που κινείται ως προς το Σ παράλληλα με τον άξονα των x με ταχύτητα u. Ποια είναι η ένταση του πεδίου στο εσωτερικό του πυκνωτή που αντιλαμβάνεται ο Σ';

Ο Σ' βλέπει τον πυκνωτή να κινείται ως προς αυτόν με ταχύτητα $-u$ (σχ. 6.14β). Το μήκος των οπλισμών του πυκνωτή για τον Σ' θα είναι

$$l' = l\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

ενώ το πλάτος των οπλισμών $\quad \alpha' = \alpha$

Το εμβαδόν των οπλισμών θα είναι $\quad A' = l' \times \alpha' = A\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}$

και η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\quad \sigma' = \dfrac{Q}{A'} = \dfrac{Q}{A\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$

Άρα η ένταση του πεδίου είναι $\quad E'_{\perp} = \dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \dfrac{E_{\perp}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$

Οι δείκτες $\perp$ υποδηλώνουν ότι μιλάμε για ένα πεδίο με την έντασή του κάθετη στη διεύθυνση κίνησης.

Στην παραπάνω επεξεργασία σιωπηρά δεχτήκαμε ότι ο Σ' βλέπει την ίδια ποσότητα φορτίου Q στους οπλισμούς του πυκνωτή με τον Σ. Πράγματι **το φορτίο είναι, όπως και η μάζα ηρεμίας, μια αναλλοίωτη ποσότητα για όλα τα συστήματα αναφοράς.**

Εάν η ένταση του πεδίου ήταν παράλληλη στον άξονα των x θα καταλήγαμε στο συμπέρασμα ότι $E'_{||} = E_{||}$

Με ανάλογους τρόπους βρίσκουμε μετασχηματισμούς για όλες τις διευθύνσεις και για το μαγνητικό πεδίο αλλά και για συνδυασμό ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου.

Οι μετασχηματισμοί στον πίνακα που ακολουθεί αναφέρονται στην περίπτωση στην οποία το σύστημα Σ' κινείται ως προς το Σ παράλληλα με τον άξονα x.

$$E'_x = E_x \qquad E'_y = \frac{\left(E_y - uB_z\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad E'_z = \frac{\left(E_z + uB_y\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$B'_x = B_x \qquad B'_y = \frac{\left(B_y + \frac{u}{c^2}E_z\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad B'_z = \frac{\left(B_z - \frac{u}{c^2}E_y\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι δε χρειάστηκε να τροποποιήσουμε σε κανένα σημείο τους ορισμούς που γνωρίζαμε μέχρι τώρα για τον ηλεκτρομαγνητισμό όπως κάναμε για παράδειγμα προηγουμένως για την ορμή ή όπως θα κάνουμε αργότερα για τη θεωρία του βαρυτικού πεδίου. Η ηλεκτρομαγνητική θεωρία είναι συμβατή με τη θεωρία της σχετικότητας.

6.13. Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας

Στην ειδική θεωρία της σχετικότητας ασχοληθήκαμε αποκλειστικά με την παρατήρηση των φαινομένων από αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Όμως αδρανειακά συστήματα αναφοράς με την αυστηρή έννοια του όρου, δηλαδή συστήματα στα οποία δεν ασκείται καμία δύναμη, με αποτέλεσμα, αν κινούνται να κινούνται ευθύγραμμα ομαλά, δεν υπάρχουν. Ένα συνηθισμένο σύστημα που θεωρούμε αδρανειακό είναι η Γη. Η Γη όμως επιταχύνεται, αφού περιστρέφεται γύρω από τον Ήλιο υπό την επίδραση βαρυτικών δυνάμεων. Το ίδιο συμβαίνει και με τον Ήλιο και με το γαλαξία μας. Προκύπτει λοιπόν η ανάγκη να επεκτείνουμε τα συμπεράσματά μας και σε επιταχυνόμενα συστήματα αναφοράς. Να προσαρμόσουμε δηλαδή τις θεωρίες μας ώστε να ισχύουν οι δυο βασικές παραδοχές της σχετικότητας που αναφέρθηκαν στην αρχή του κεφαλαίου και στα επιταχυνόμενα συστήματα αναφοράς. Αυτό είναι το αντικείμενο της **γενικής θεωρίας της σχετικότητας**.

Η ηλεκτρομαγνητική θεωρία, που στηρίζεται στις εξισώσεις του Maxwell, δεν παρουσιάζει προβλήματα, είναι συμβατή με τις παραδοχές της σχετικότητας. Εκεί που υπάρχουν προβλήματα είναι η θεωρία του βαρυτικού πεδίου του Newton. Για παράδειγμα σύμφωνα με τη θεωρία του Newton οι βαρυτικές αλληλεπιδράσεις διαδίδονται ακαριαία στο χώρο. Όμως σύμφωνα με τη θεωρία της σχετικότητας τίποτε δε μπορεί να διαδοθεί με ταχύτητα μεγαλύτερη της ταχύτητας του φωτός.

Η γενική θεωρία της σχετικότητας στηρίζεται στην **ισοδυναμία της βαρυτικής και της αδρανειακής μάζας**.

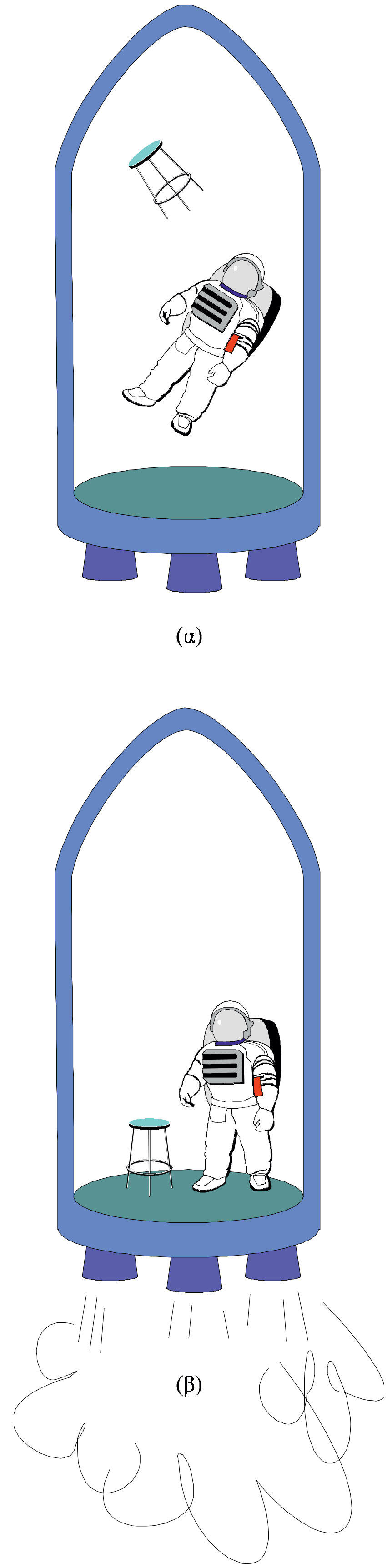
Έχουμε συναντήσει τη μάζα με δυο όψεις. Τη μάζα δημιουργό και υπόθεμα βαρυτικού πεδίου $\left(F_B = G\dfrac{Mm}{r^2}\right)$ και τη μάζα μέτρο της αδράνειας ενός σώματος ($F = ma$). Οι δυο αυτές μάζες είναι ισοδύναμες μεταξύ τους. Η κεντρική ιδέα του Einstein στη γενική θεωρία της σχετικότητας είναι ότι μπορούμε να μελετήσουμε ένα επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς αγνοώντας ότι επιταχύνεται και υποθέτοντας ότι βρίσκεται σ' ένα βαρυτικό πεδίο και αντίστροφα να μελετήσουμε ένα σύστημα που βρίσκεται μέσα σ' ένα βαρυτικό πεδίο αγνοώντας το βαρυτικό πεδίο και υποθέτοντας ότι επιταχύνεται. Όλα αυτά είναι λίγο ασαφή. Ας δούμε το παρακάτω νοητικό πείραμα:

Ένας άνθρωπος βρίσκεται μέσα σ' ένα διαστημόπλοιο χωρίς παράθυρα. Το διαστημόπλοιο κινείται ισοταχώς μακριά από οποιοδήποτε πεδίο βαρύτητας. Ο άνθρωπος και τα αντικείμενα που βρίσκονται ελεύθερα μέσα στο διαστημόπλοιο δε δέχονται καμία δύναμη, άρα αιωρούνται μέσα σ' αυτό (σχ. 6.16α).

Έστω τώρα ότι το διαστημόπλοιο επιταχύνεται με επιτάχυνση α. Ο άνθρωπος «κολλάει» στο δάπεδο και τα αντικείμενα που αιωρούνται γύρω του πέφτουν, σαν να απέκτησαν ξαφνικά βάρος (σχ. 6.16β). Εάν ο άνθρωπος αγνοεί ότι το διαστημόπλοιο επιταχύνθηκε το πρώτο πράγμα που θα σκεφθεί είναι ότι το διαστημόπλοιο μπήκε σε μια περιοχή όπου υπάρχει πεδίο βαρύτητας. Με απλά πειράματα μάλιστα μπορεί να υπολογίσει την ένταση αυτού του πεδίου βαρύτητας. Θα τη βρει απολύτως ίση με την επιτάχυνση του διαστημοπλοίου.

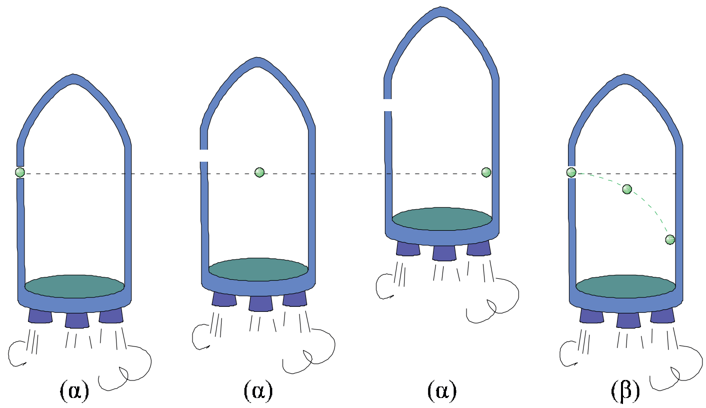
Ας υποθέσουμε τώρα ότι από ένα μικρό άνοιγμα στο πλευρικό τοίχωμα του επιταχυνόμενου διαστημοπλοίου μπαίνει ένα σώμα το οποίο, σύμφωνα με έναν παρατηρητή που βρίσκεται έξω από το διαστημόπλοιο, κινείται ευθύγραμμα ομαλά (σχ. 6.17α).

Το σώμα θα προσκρούσει στο απέναντι τοίχωμα σε μια θέση που δε βρίσκεται ακριβώς απέναντι από το άνοιγμα, αλλά λίγο πιο κάτω. Για τον εξωτερικό παρατηρητή αυτό είναι απολύτως φυσιολογικό. Αλλά και για τον εσωτερικό παρατηρητή δεν υπάρχει πρόβλημα. Εφόσον έχει υποθέσει ότι βρίσκεται μέσα σε πεδίο βαρύτητας τι πιο φυσιολογικό από το να σκεφτεί ότι το σώμα διαγράφει μια παραβολική τροχιά όπως κάνουν όλα τα σώματα που εκτελούν οριζόντια βολή στην πατρίδα του τη Γη; Μέχρι εδώ λοιπόν ο εσωτερικός παρατηρητής με την υπόθεση ότι βρίσκεται μέσα σε βαρυτικό πεδίο ερμηνεύει όλα τα



Σχήμα 6-16.

φαινόμενα, που ο εξωτερικός παρατηρητής αποδίδει στην επιτάχυνση του διαστημόπλοιου.



Στις περιπτώσεις (α) βλέπουμε πώς αντιλαμβάνεται την κίνηση του σώματος ο εξωτερικός παρατηρητής. Στην περίπτωση (β) βλέπουμε πως αντιλαμβάνεται την κίνηση του σώματος ο επιβάτης του διαστημοπλοίου. Τα ίδια ισχύουν και αν αντικαταστήσουμε το σώμα με μια φωτεινή δέσμη.

Σχήμα 6-17.

Από το ίδιο άνοιγμα μπαίνει τώρα μια δέσμη φωτός (σχ. 6.17). Και σ' αυτή την περίπτωση εφόσον το φως ταξιδεύει με πεπερασμένη ταχύτητα, η δέσμη θα συναντήσει το απέναντι τοίχωμα λίγο χαμηλότερα από το ύψος του ανοίγματος. Για τον εξωτερικό παρατηρητή αυτό είναι απολύτως φυσιολογικό. Ο εσωτερικός παρατηρητής, εάν θέλει να διατηρήσει την υπόθεσή του για το βαρυτικό πεδίο στο οποίο βρίσκεται το διαστημόπλοιο, είναι υποχρεωμένος να πάρει μια γενναία απόφαση για να εξηγήσει την καμπύλωση της δέσμης του φωτός.

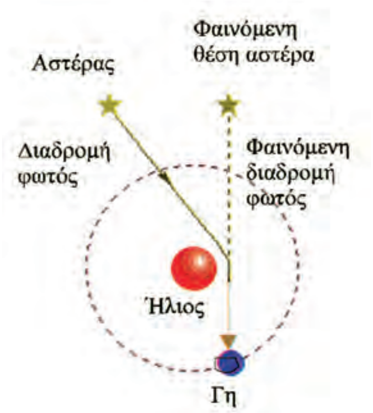
Σύμφωνα με τη νευτώνεια θεωρία, το βαρυτικό πεδίο ασκεί δύναμη μόνο σε σώματα που έχουν μάζα. Όμως το φως δεν έχει μάζα. Ο επιβάτης του διαστημόπλοιου πρέπει να εγκαταλείψει τη νευτώνεια θεωρία και να υποθέσει ότι το βαρυτικό του πεδίο μπορεί να καμπυλώσει την τροχιά όχι μόνο ενός σώματος που έχει μάζα αλλά και ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος.

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο δυστυχής επιβάτης του διαστημοπλοίου έμπλεξε άσχημα και οδηγείται σε παρανοϊκές σκέψεις γιατί δε γνωρίζει την πολύ απλή αλήθεια ότι το βαρυτικό του πεδίο δεν υπάρχει και ότι το διαστημόπλοιο απλώς επιταχύνεται.

Το εντυπωσιακό όμως είναι ότι φαινόμενα εκτροπής φωτεινών δεσμών από ισχυρά βαρυτικά πεδία έχουν πια παρατηρηθεί και επιβεβαιωθεί. Κατά τη διάρκεια εκλείψεων του Ηλίου, παρατηρήθηκαν από τους αστρονόμους αστέρες σε θέσεις διαφορετικές από αυτές στις οποίες βρίσκονται στην πραγματικότητα (σχ. 6.18). Το φαινόμενο οφείλεται στην καμπύλωση της τροχιάς του φωτός που εκπέμπουν τα άστρα από το ισχυρό βαρυτικό πεδίο του Ήλιου.

Ο επιβάτης του διαστημοπλοίου μας ανακάλυψε μια φυσική πραγματικότητα, μένοντας απλώς συνεπής στην αρχική του υπόθεση.

Για να είμαστε πιο ακριβείς, τουλάχιστον όσο μας επιτρέπει το επί-

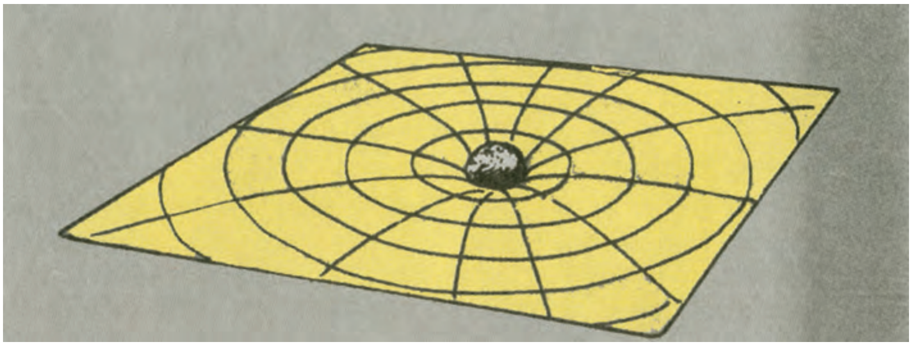


Σχήμα 6-18.

πεδο αυτού του βιβλίου, πρέπει να πούμε ότι ο Einstein, για να εξηγήσει την εκτροπή του φωτός από την ευθύγραμμη πορεία του, όταν διαδίδεται μέσα σε βαρυτικό πεδίο, δεν απέδωσε στο φως ιδιότητες αντίστοιχες με τις ιδιότητες της μάζας. Υπέθεσε ότι η παρουσία μιας μάζας, που δημιουργεί γύρω της ένα βαρυτικό πεδίο, καμπυλώνει το χωροχρόνο.

Είναι πολύ δύσκολο να περιγράψει κανείς ποιοτικά έναν καμπυλωμένο χώρο τεσσάρων διαστάσεων. Η δυσκολία προκύπτει από το γεγονός ότι είμαστε όντα που βιωματικά αντιλαμβάνονται χώρους τριών διαστάσεων και επιπλέον από το γεγονός ότι το βασικό μας εργαλείο για την κατανόηση του χώρου, η ευκλείδεια γεωμετρία, δεν ισχύει σε καμπυλωμένους χώρους. Με δυο παραδείγματα θα προσπαθήσουμε να φωτίσουμε λίγο τα πράγματα και θα σταματήσουμε εκεί.

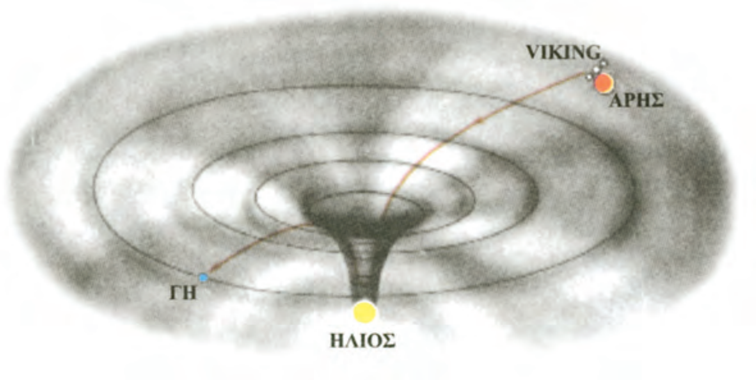
Πάνω σε μια λεία επίπεδη μεμβράνη εκτοξεύουμε οριζόντια ένα σφαιρίδιο πολύ μικρής μάζας. Το σφαιρίδιο, πρακτικά, κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Στο κέντρο της μεμβράνης τοποθετούμε μια σφαίρα πολύ μεγάλης μάζας. Η επιφάνεια της μεμβράνης παραμορφώνεται (σχ. 6.19).



Σχήμα 6-19.

Εκτοξεύουμε πάλι ένα πολύ μικρό σφαιρίδιο πάνω στην επιφάνεια της μεμβράνης. Το σφαιρίδιο τώρα προφανώς δεν πρόκειται να κινηθεί ευθύγραμμα. Η τροχιά του θα είναι καμπύλη. Η καμπύλωση της τροχιάς του σφαιριδίου είναι εντονότερη κοντά στη σφαίρα, στο κέντρο της μεμβράνης. Η καμπύλωση αυτή δεν οφείλεται στη βαρυτική έλξη που ασκεί στο σφαιρίδιο η μεγάλη σφαίρα αλλά στην παραμόρφωση που προκάλεσε η μεγάλη σφαίρα στο επίπεδο πάνω στο οποίο κινείται το σφαιρίδιο. Με ανάλογο τρόπο μια πολύ μεγάλη μάζα παραμορφώνει το χωροχρόνο γύρω της στο Σύμπαν.

Για να γίνει αισθητή η καμπύλωση του χωροχρόνου πρέπει η μάζα που την προκαλεί να είναι τεράστια. Για παράδειγμα η καμπύλωση που προκαλεί η Γη δεν είναι καν αισθητή. Τα διαστημικά ταξίδια που γίνονται από τη Γη στη Σελήνη αν και απαιτούν εξαιρετική ακρίβεια υπολογισμών σχεδιάζονται με βάση τη νευτώνεια θεωρία βαρύτητας. Από τα γειτονικά μας ουράνια σώματα μόνο ο Ήλιος έχει αρκετή μάζα για να παραμορφώσει το χωροχρόνο αισθητά (σχ. 6.20).



Τα ηλεκτρομαγνητικά σήματα που έστελνε στη Γη το διαστημόπλοιο Viking κατά τη διάρκεια της αποστολής του στον Άρη παρουσίαζαν μια καθυστέρηση στη διάδοσή τους σε σχέση με τον αναμενόμενο χρόνο όταν ο Ήλιος βρισκόταν ανάμεσα στο διαστημόπλοιο και τη Γη.
Η τροχιά των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων όταν περνούν κοντά από τον Ήλιο καμπυλώνεται με αποτέλεσμα να χρειάζονται περισσότερο χρόνο για να φτάσουν στη Γη από ότι θα χρειάζονταν αν διαδίδονταν ευθύγραμμα.
Σχήμα 6-20.

Η γενική θεωρία της σχετικότητας είχε αρκετές επιτυχίες μέχρι τώρα. Υπάρχουν όμως ακόμη κάποια αναπάντητα ερωτήματα. Για παράδειγμα δε γνωρίζουμε πώς διαδίδονται οι βαρυτικές επιδράσεις. Ο Einstein υπέθεσε ότι διαδίδονται με βαρυτικά κύματα που κινούνται με την ταχύτητα του φωτός όπως οι ηλεκτρομαγνητικές επιδράσεις διαδίδονται με ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Βαρυτικά κύματα όμως μέχρι τώρα δεν έχουν ανιχνευθεί ίσως γιατί, σύμφωνα και με την πρόβλεψη, είναι εξαιρετικά ασθενή. Αν ποτέ ανιχνευθούν η φυσική θα έχει κάνει ένα πολύ μεγάλο βήμα στην ανάπτυξη μιας ενιαίας θεωρίας για την προέλευση των ηλεκτρομαγνητικών και βαρυτικών δυνάμεων.

Σύνοψη

Το πείραμα Michelson-Morley έδειξε ότι
η ταχύτητα διάδοσης του φωτός δεν υπακούει στους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου. Είναι η ίδια για όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

Η ειδική θεωρία της σχετικότητας στηρίζεται σε δυο αξιώματα.

1. **Οι νόμοι της φυσικής είναι ίδιοι για όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.**
2. **Η ταχύτητα του φωτός είναι ίδια για όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς και είναι ανεξάρτητη από την κίνηση της φωτεινής πηγής.**

Διαστολή χρόνου
Η χρονική διάρκεια ενός φαινομένου εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς από το οποίο παρατηρούμε το φαινόμενο. Εάν το φαινόμενο συμβαίνει σ' ένα σύστημα αναφοράς το οποίο κινείται ως προς εμάς

με ταχύτητα **u** και, για ένα παρατηρητή ακίνητο στο σύστημα αναφοράς διαρκεί Δt_0, για μας το φαινόμενο θα διαρκεί $\Delta t = \dfrac{\Delta t_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$.

Κάθε σύστημα αναφοράς έχει το δικό του **ιδιόχρονο**.

Συστολή μήκους

Το μήκος ενός αντικειμένου εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς από το οποίο παρατηρούμε το αντικείμενο. Εάν το αντικείμενο βρίσκεται μέσα σ' ένα σύστημα αναφοράς το οποίο κινείται ως προς εμάς με ταχύτητα **u** και ένας παρατηρητής που βρίσκεται στο σύστημα αναφοράς βρίσκει ότι το μήκος του, στη διεύθυνση της κίνησης του συστήματος, είναι l_o, για μας θα έχει μήκος $l = l_o\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}$. Τα μήκη που είναι κάθετα στη διεύθυνση κίνησης του συστήματος είναι ίδια για τους παρατηρητές των δύο συστημάτων αναφοράς.

Μετασχηματισμοί Lorentz

Εάν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες (x, y, z, t) ή ενός γεγονότος σ' ένα σύστημα αναφοράς Σ οι μετασχηματισμοί Lorentz μάς δίνουν τις συντεταγμένες του σ' ένα σύστημα Σ' το οποίο κινείται με ταχύτητα $\mathbf{u}$ ως προς το Σ. Αν η $\mathbf{u}$ είναι παράλληλη στον άξονα των x και τα Σ και Σ' ταυτίζονται τη στιγμή $t = 0$, οι μετασχηματισμοί Lorentz έχουν την ακόλουθη μορφή

$$x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \qquad \leftarrow \text{Από το } \Sigma \text{ στο } \Sigma' \qquad x = \frac{x'+ut'}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$$

$$y' = y \qquad\qquad y = y'$$

$$z' = z \qquad\qquad z = z'$$

$$t' = \frac{t-ux/c^2}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \qquad \text{Από το } \Sigma' \text{ στο } \Sigma \rightarrow \qquad t = \frac{t'+ux'/c^2}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$$

Όταν $u \ll c$ οι μετασχηματισμοί Lorentz συμπίπτουν με τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου.

Οι συντεταγμένες του χώρου εξαρτώνται από τις συντεταγμένες του χρόνου και αντίστροφα. Στην ειδική θεωρία της σχετικότητας ο χώρος και ο χρόνος είναι αλληλένδετοι. Μιλάμε πια για **χωροχρόνο**.

Μετασχηματισμοί ταχυτήτων Lorentz

Ένα σώμα που κινείται με ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}$ σε σύστημα αναφοράς Σ παράλληλα στον άξονα των x, ως προς σύστημα αναφοράς Σ' που κινείται ως προς το Σ με ταχύτητα $\mathbf{u}$, πάλι παράλληλα με τον άξονα των x έχει ταχύτητα

$$\upsilon' = \frac{\upsilon-u}{1-\dfrac{u}{c^2}\upsilon} \qquad \text{και αντίστροφα} \qquad \upsilon = \frac{\upsilon'+u}{1+\dfrac{u}{c^2}\upsilon'}$$

Αν οι ταχύτητες υ και u είναι πολύ μικρότερες του c τότε ισχύουν οι μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου. Όταν ένα σώμα κινείται με την ταχύτητα του φωτός η ταχύτητά του είναι η ίδια για όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

Σχετικιστική ορμή

$$\mathbf{p} = \frac{m\boldsymbol{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$$

Όταν η ταχύτητα υ είναι πολύ μικρότερη του c θα είναι $\mathbf{p} = m\boldsymbol{\upsilon}$. Η σχετικιστική ορμή είναι γενικά μεγαλύτερη της κλασικής.
Όταν η ταχύτητα του σώματος τείνει στο c, η ορμή του τείνει στο άπειρο.
Το μέγεθος m ταυτίζεται με αυτό που λέμε μάζα στη νευτώνεια μηχανική και εκφράζει και εδώ τις αδρανειακές ιδιότητες του σώματος. Στη σχετικότητα το ονομάζουμε **μάζα ηρεμίας** του σώματος.
Όταν η ταχύτητα του σώματος τείνει στο c η επιτάχυνσή του τείνει στο μηδέν.
Η ταχύτητα του φωτός είναι η μεγαλύτερη δυνατή ταχύτητα στη φύση.

Σχετικιστική ενέργεια

Το ποσό ενέργειας mc^2 που κατέχει ένα σώμα όταν ηρεμεί το ονομάζουμε ενέργεια ηρεμίας του σώματος.

Η **συνολική ενέργεια** ενός σώματος που κινείται με ταχύτητα υ είναι

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$$

Η **κινητική ενέργεια** ενός σώματος που κινείται με ταχύτητα υ είναι

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - mc^2$$

Για $\upsilon \ll c$ δίνει $K = \frac{1}{2}m\upsilon^2$

Όταν η ταχύτητα υ τείνει στο c η κινητική ενέργεια τείνει στο άπειρο.

Σχέση ενέργειας ορμής

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$$

Αν η ορμή του σώματος είναι ίση με το μηδέν (το σώμα ηρεμεί) η ενέργειά του θα είναι $E = mc^2$.
Αν η μάζα ηρεμίας του σώματος είναι μηδενική θα ισχύει: $E = pc$.

Στη φύση υπάρχουν σωματίδια μηδενικής μάζας ηρεμίας, όπως το φωτόνιο. Τα σωματίδια αυτά κινούνται με την ταχύτητα του φωτός.

Δραστηριότητες

1. Καμπύλωση χώρου

Καλύψτε με μια τεντωμένη ελαστική μεμβράνη μια μεγάλη λεκάνη. Εκτοξεύστε με μικρή αρχική ταχύτητα ένα μπαλάκι του πινγκ-πονγκ πάνω στη μεμβράνη. Παρατηρήστε την τροχιά του. Τοποθετήστε ένα αντικείμενο στο κέντρο της μεμβράνης και ξαναρίξτε το μπαλάκι του πινγκ-πονγκ. Ξανακάνετε το ίδιο με ένα αντικείμενο μεγαλύτερης μάζας στο κέντρο. Έχετε τώρα μια εικόνα του πώς μια μάζα καμπυλώνει μια επίπεδη επιφάνεια και του πως η καμπύλωση επιδρά στην κίνηση των σωμάτων πάνω στην επιφάνεια.

2. Τελικά δεν ήταν και τόσο δύσκολο....

Μια παράσταση της μορφής $(1+x)^n$ μπορεί να εκφρασθεί ως άθροισμα όρων ως εξής

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Με τη βοήθεια της παραπάνω μαθηματικής σχέσης προσπαθήστε να δείξετε ότι η σχέση

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - mc^2 \quad \text{για} \quad \upsilon \langle\langle c \quad \text{δίνει} \quad K = \frac{1}{2}m\upsilon^2.$$

Ερωτήσεις

6.1 Ποιο ήταν το συμπέρασμα από το πείραμα των Michelson και Morley, για την ταχύτητα του φωτός;

6.2 Συμπληρώστε τις προτάσεις:
Σύμφωνα με το πρώτο αξίωμα της θεωρίας της σχετικότητας οι νόμοι της φυσικής είναι .... σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Σύμφωνα με το δεύτερο αξίωμα η ταχύτητα .... είναι .... σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

6.3 Συγκρίνετε τα αποτελέσματα που λαμβάνονται για μετρήσεις μήκους και χρόνου από παρατηρητές σε συστήματα αναφοράς των οποίων η σχετική ταχύτητα είναι c. Με ποια έννοια, από την άποψη αυτή, το c γίνεται οριακή ταχύτητα;

6.4 Η χρονική διάρκεια ενός φυσικού φαινομένου στο αδρανειακό σύστημα Σ είναι Δt. Η χρονική διάρκεια $\Delta t'$ του ίδιου φαινομένου, όταν αυτό παρατηρείται από το αδρανειακό σύστημα Σ' το οποίο κινείται ως προς το πρώτο με ταχύτητα u συγκρίσιμη με την ταχύτητα του φωτός, είναι

α) ίση με Δt; β) μεγαλύτερη από Δt; γ) μικρότερη από Δt;

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.

6.5 Ένας παρατηρητής στο αδρανειακό σύστημα Σ διαπιστώνει ότι ένας φάρος ανάβει σε ίσα χρονικά διαστήματα. Θα διαπιστώνει το ίδιο και ένας παρατηρητής που βρίσκεται σε άλλο αδρανειακό σύστημα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

6.6 Ένα διαστημόπλοιο απομακρύνεται από τη Γη με ταχύτητα που πλησιάζει την ταχύτητα του φωτός. Ένας παρατηρητής ακίνητος στη Γη, μετράει το μήκος του διαστημόπλοιου. Το ίδιο κάνει και ένας παρατηρητής μέσα στο διαστημόπλοιο. Συμφωνούν τα αποτελέσματα των μετρήσεών τους; Αν όχι, ποιος βρίσκει μεγαλύτερη τιμή για το μήκος;

6.7 Συστολή μήκους είναι το φαινόμενο κατά το οποίο:

α) Ο παρατηρητής της Γης διαπιστώνει ότι το διαστημόπλοιο που ταξιδεύει έχει μικρότερο μήκος από αυτό που είχε όταν το μέτρησε ακίνητο στη Γη.

β) Ο αστροναύτης διαπιστώνει ότι στη διάρκεια του ταξιδιού του το διαστημόπλοιο έχει μικρότερο μήκος από αυτό που είχε όταν το μέτρησε ακίνητο στη Γη.

Ποια από τις προτάσεις είναι ορθή;

6.8 Ακίνητος παρατηρητής A μετράει τις διαστάσεις ενός αντικειμένου ακίνητου ως προς αυτόν και συμπεραίνει ότι πρόκειται για κύβο ακμής d. Ένας δεύτερος παρατηρητής B, που κινείται με ταχύτητα η οποία πλησιάζει την ταχύτητα του φωτός, σε διεύθυνση παράλληλη σε μια ακμή του στερεού, θα καταλήξει στο συμπέρασμα ότι:

α) πρόκειται για κύβο με ακμή d.

β) πρόκειται για κύβο με ακμή μικρότερη από d.

γ) πρόκειται για κύβο με ακμή μεγαλύτερη από d.

δ) οι δύο διαστάσεις του στερεού είναι d αλλά η τρίτη είναι μεγαλύτερη.

ε) οι δύο διαστάσεις του στερεού είναι d αλλά η τρίτη είναι μικρότερη.

Επιλέξτε το σωστό.

6.9 Εφόσον ο χρόνος ζωής των μιονίων τούς επιτρέπει να διανύσουν περίπου $600\ \mathrm{m}$ προτού διασπασθούν, πώς κατορθώνουν να φτάσουν -από τα ανώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας - στην επιφάνεια της Γης;

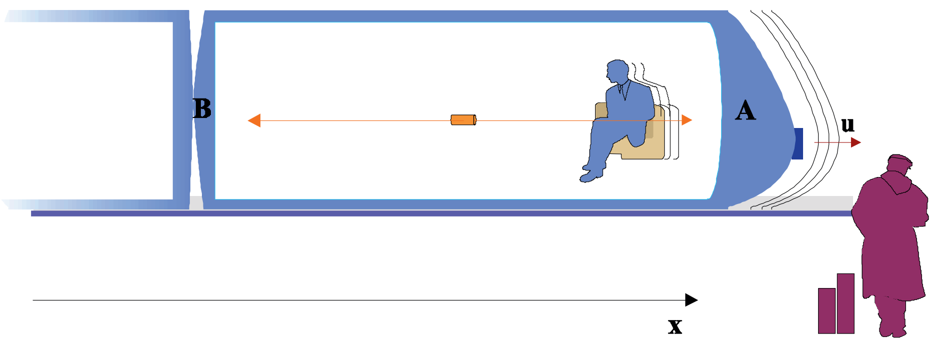
6.10 Από διαστημόπλοιο εκτοξεύεται πύραυλος στη διεύθυνση της κίνησής του. Σε ποια περίπτωση η ταχύτητα του πυραύλου για έναν παρατηρητή στη Γη είναι μεγαλύτερη.

α) Αν το διαστημόπλοιο κινείται ως προς τη Γη;

β) Αν το διαστημόπλοιο είναι ακίνητο ως προς τη Γη;

6.11 Να απαντήσετε στην προηγούμενη ερώτηση αν αντικαταστήσετε τον πύραυλο με ένα φωτεινό παλμό.

6.12 Υποθέστε ότι ένα βαγόνι κινείται με ταχύτητα u, που πλησιάζει την ταχύτητα του φωτός. Στο μέσον αυτού του βαγονιού παράγονται ταυτόχρονα δύο φωτεινοί παλμοί. Οι παλμοί διαδίδονται κατά τη διεύθυνση x, που συμπίπτει με τη διεύθυνση της κίνησης του βαγονιού, σε αντίθετες κατευθύνσεις, και φτάνουν στις δυο απέναντι πλευρές του βαγονιού A και B.



Σχήμα 6-21.

Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι ορθές;

α) Ένας παρατηρητής που βρίσκεται μέσα στο βαγόνι βρίσκει ότι οι δυο παλμοί φτάνουν ταυτόχρονα στις πλευρές A και B του βαγονιού.

β) Ένας παρατηρητής που βρίσκεται μέσα στο βαγόνι βρίσκει ότι ο παλμός που διαδίδεται προς το B φτάνει πρώτος.

γ) Ένας παρατηρητής ακίνητος στο σταθμό βρίσκει ότι οι δυο παλμοί φτάνουν ταυτόχρονα στις πλευρές A και B του βαγονιού.

δ) Ο παρατηρητής που βρίσκεται στο σταθμό βρίσκει ότι ο παλμός που διαδίδεται προς το A κινείται με μεγαλύτερη ταχύτητα από αυτόν που ταξιδεύει προς το B.

ε) Ο παρατηρητής που βρίσκεται στο σταθμό βρίσκει ότι ο παλμός που διαδίδεται προς το B φτάνει πρώτος.

6.13 Ένας ακίνητος παρατηρητής βλέπει να περνάει μπροστά του με πολύ μεγάλη ταχύτητα ένα κυκλικό αντικείμενο. Το αντικείμενο κινείται στη διεύθυνση x και το επίπεδό του βρίσκεται στο επίπεδο x, y. Τι σχήμα έχει το αντικείμενο, για κάποιον που κινείται μαζί με αυτό;

6.14 Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από κινούμενα ηλεκτρικά φορτία εξαρτάται από την κίνηση του παρατηρητή. Δώστε ένα απλό παράδειγμα που να επιβεβαιώνει την πρόταση.

6.15 Είναι η ενέργεια μια αναλλοίωτη ποσότητα; Είναι δηλαδή ή ίδια σε όλα τα αδρανειακά συστήματα; Ισχύει σε όλα τα αδρανειακά συστήματα η αρχή διατήρησης της ενέργειας;

6.16 Εφόσον υπάρχει άνω όριο στην ταχύτητα ενός σωματίου θα υπάρχει και άνω όριο στην ορμή και την κινητική του ενέργεια;

6.17 Ένα πρωτόνιο και ένα ηλεκτρόνιο που κινούνται με μεγάλες ταχύτητες έχουν τη ίδια ενέργεια. Η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι
α) ίση, β) μικρότερη ή γ) μεγαλύτερη από την ενέργεια του πρωτονίου;
Επιλέξτε το σωστό.

6.18 Η ενέργεια συνδέσεως του ατόμου του υδρογόνου είναι $13{,}6\ eV$. Αυτό σημαίνει ότι η μάζα του ατόμου του υδρογόνου είναι:
α) μεγαλύτερη από το άθροισμα των μαζών ενός πρωτονίου κι ενός ηλεκτρονίου.
β) μικρότερη από το άθροισμα των μαζών ενός πρωτονίου κι ενός ηλεκτρονίου.
γ) ίση με το άθροισμα των μαζών ενός πρωτονίου κι ενός ηλεκτρονίου.

Ασκήσεις

6.19 Ένα ορθογώνιο τραπέζι διαστάσεων $10\ m$ x $20\ m$ βρίσκεται μέσα σε διαφανές διαστημόπλοιο με τη μεγάλη του πλευρά παράλληλη στη διεύθυνση κίνησης του διαστημόπλοιου. Με τι ταχύτητα πρέπει να περάσει από μπροστά μας το διαστημόπλοιο ώστε το τραπέζι να μας φανεί τετράγωνο;

[Απ : 0,87 c]

6.20 Επιβάτης διαστημοπλοίου που ταξιδεύει με ταχύτητα $0{,}99\ c$ κοιμάται για $5\ min$, σύμφωνα με το ρολόι του. Πόση ώρα κοιμήθηκε, σύμφωνα με παρατηρητή στη Γη;

[Απ : 35,5 min]

6.21 Ενοικιαστής σχετικιστικού ποδηλάτου επιστρέφει το ποδήλατο μετά από μια ώρα όπως έδειξε το δικό του ρολόι. Στο γραφείο ενοικιάσεων επιμένουν ότι έλειψε δυο ώρες. Ποια ήταν η ταχύτητά του;

[Απ : $\frac{\sqrt{3}}{2}c$]

6.22 Θέλετε να ενοικιάσετε έναν πύραυλο - ταξί που ταξιδεύει με ταχύτητα $0{,}5\ c$. Η χρέωση γίνεται με την ώρα. Πόσο τοις εκατό ακριβότερη θα είναι μια διαδρομή αν η ώρα του ταξιδιού μετρηθεί με το ρολόι του γραφείου ενοικίασης που εδρεύει στη Γη από ό,τι αν μετρηθεί με το ρολόι του πιλότου - ταξιτζή;

[Απ : 15,5%]

6.23 Κατά την έκρηξη μιας πυρηνικής βόμβας $10\ \mathrm{mg}$ ύλης εξαφανίστηκαν. Πόση ενέργεια απελευθερώθηκε;
Δίνεται $c = 3\times10^{8}\ \mathrm{m/s}$.

[Απ : $9\times10^{11}\ J$]

6.24 Ένα διαστημόπλοιο μάζας $1000\ kg$ πρόκειται να επιταχυνθεί σε ταχύτητα $0{,}5\ c$.
Πόση ενέργεια απαιτείται γι' αυτό;
Δίνεται $c = 3\times10^{8}\ m/s$.

[Απ : $1{,}4\times10^{19}\ J$]

6.25 Πόση ενέργεια απαιτείται για να επιταχυνθεί ένα ηλεκτρόνιο
α) από $0{,}5c$ σε $0{,}9c$.
β) από $0{,}9c$ σε $0{,}99c$.
Δίνεται η ενέργεια ηρεμίας του ηλεκτρονίου $0{,}511\ MeV$.

[Απ : $0{,}582\,MeV$, $2{,}45\,MeV$]

Προβλήματα

6.26 Ένα γεγονός συμβαίνει στο αδρανειακό σύστημα Σ σε θέση με συντεταγμένες $x = 100\text{km}$, $y = 10\text{km}$, $z = 1\text{km}$ τη χρονική στιγμή t=0,5ms. Ποιες οι συντεταγμένες του γεγονότος (x', y', z', t') για ένα παρατηρητή σε άλλο αδρανειακό σύστημα Σ' που κινείται με ταχύτητα -0,8 c ως προς το Σ με διεύθυνση παράλληλη στον κοινό άξονα x; (Τη στιγμή $t = 0$ τα συστήματα ταυτίζονται).

[Απ : $x' = 367$ km, $y' = 10$ km, $z' = 1$ km, $t' = 1{,}28$ ms]

6.27 Ένα διαστημόπλοιο σε ηρεμία, στη Γη, έχει μήκος 100 m. Ένας παρατηρητής στη Γη μετράει ότι όταν το διαστημόπλοιο κινείται χρειάζεται 4 μs για να περάσει από μπροστά του. Ποια η ταχύτητα του διαστημόπλοιου ως προς τη Γη;

[Απ : 0,083 c]

6.28 Ο πληθυσμός ενός είδους βακτηριδίου διπλασιάζεται κάθε 20 μέρες. Δύο από αυτά τα βακτηρίδια τοποθετούνται σ' ένα διαστημόπλοιο και ταξιδεύουν για 1000 γήινες ημέρες με ταχύτητα 0,995c ως προς τη Γη. Πόσα βακτηρίδια θα υπάρχουν μέσα στο διαστημόπλοιο όταν επιστρέψει στη Γη; Πόσα θα υπήρχαν αν το διαστημόπλοιο παρέμενε αυτές τις 1000 μέρες στη Γη; Αγνοήστε τις επιταχύνσεις και επιβραδύνσεις που πρέπει να υποστεί το διαστημόπλοιο στη διάρκεια του ταξιδιού.

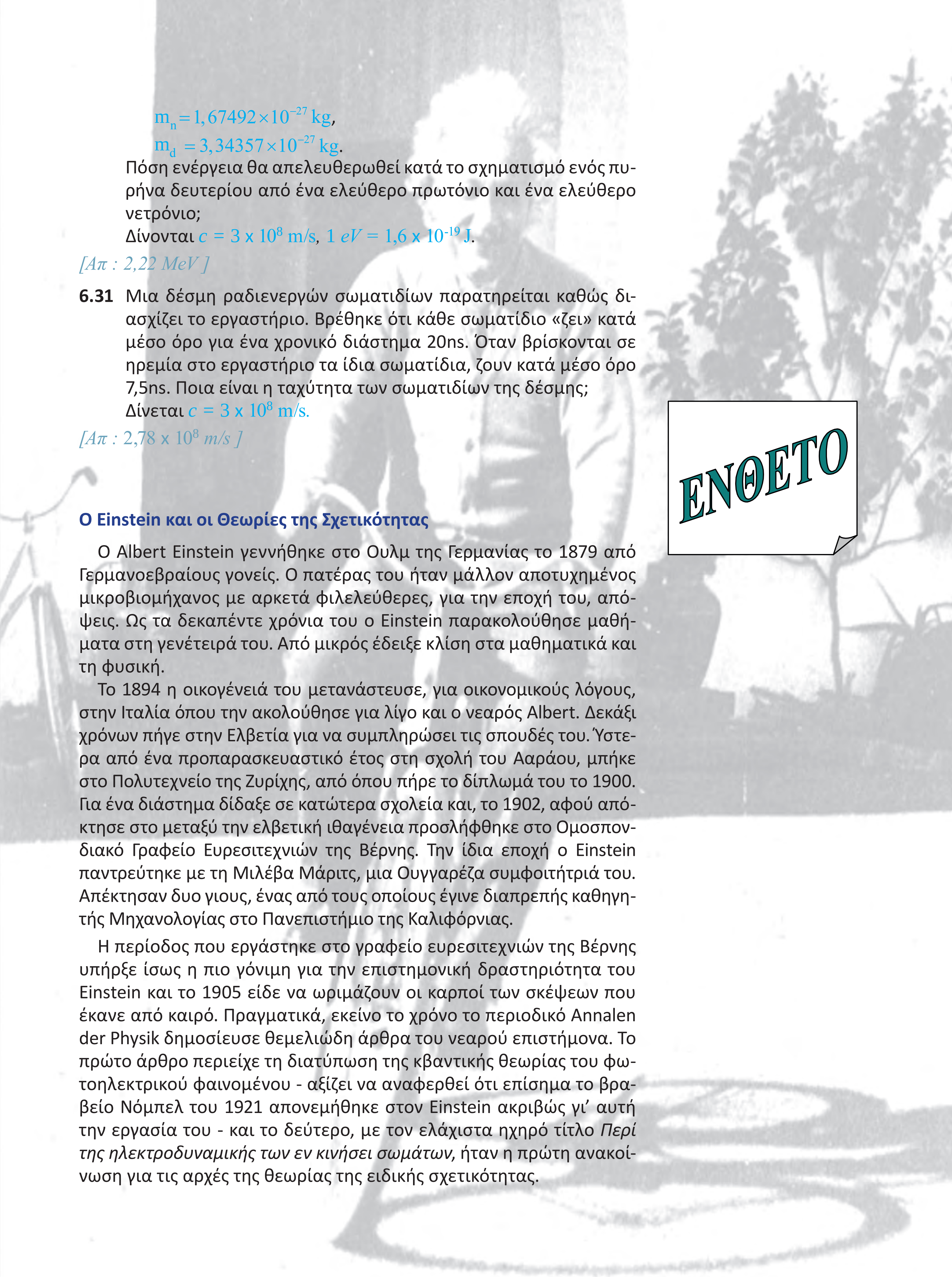
[Απ : 64 βακτηρίδια, 2^{51} βακτηρίδια]

6.29 Δύο πύραυλοι Α και Β ταξιδεύουν σε αντίθετες κατευθύνσεις με ταχύτητες 0,8c και 0,6c, αντίστοιχα, ως προς τη Γη. Ποια η ταχύτητα του πυραύλου Α ως προς το αδρανειακό σύστημα του πυραύλου Β;

[Απ : 0,946 c]

6.30 Για τα πρωτόνια, τα νετρόνια και τους πυρήνες δευτερίου ισχύουν

$$m_p = 1{,}67261\times10^{-27}\ \text{kg},$$



$m_n = 1,67492 \times 10^{-27}$ kg,

$m_d = 3,34357 \times 10^{-27}$ kg.

Πόση ενέργεια θα απελευθερωθεί κατά το σχηματισμό ενός πυρήνα δευτερίου από ένα ελεύθερο πρωτόνιο και ένα ελεύθερο νετρόνιο;

Δίνονται $c = 3 \times 10^8$ m/s, $1\ eV = 1,6 \times 10^{-19}$ J.

[Απ : 2,22 MeV]

6.31 Μια δέσμη ραδιενεργών σωματιδίων παρατηρείται καθώς διασχίζει το εργαστήριο. Βρέθηκε ότι κάθε σωματίδιο «ζει» κατά μέσο όρο για ένα χρονικό διάστημα 20ns. Όταν βρίσκονται σε ηρεμία στο εργαστήριο τα ίδια σωματίδια, ζουν κατά μέσο όρο 7,5ns. Ποια είναι η ταχύτητα των σωματιδίων της δέσμης;

Δίνεται $c = 3 \times 10^8$ m/s.

[Απ : 2,78 x 10⁸ m/s]

ΕΝΘΕΤΟ

Ο Einstein και οι Θεωρίες της Σχετικότητας

Ο Albert Einstein γεννήθηκε στο Ουλμ της Γερμανίας το 1879 από Γερμανοεβραίους γονείς. Ο πατέρας του ήταν μάλλον αποτυχημένος μικροβιομήχανος με αρκετά φιλελεύθερες, για την εποχή του, απόψεις. Ως τα δεκαπέντε χρόνια του ο Einstein παρακολούθησε μαθήματα στη γενέτειρά του. Από μικρός έδειξε κλίση στα μαθηματικά και τη φυσική.

Το 1894 η οικογένειά του μετανάστευσε, για οικονομικούς λόγους, στην Ιταλία όπου την ακολούθησε για λίγο και ο νεαρός Albert. Δεκάξι χρόνων πήγε στην Ελβετία για να συμπληρώσει τις σπουδές του. Ύστερα από ένα προπαρασκευαστικό έτος στη σχολή του Ααράου, μπήκε στο Πολυτεχνείο της Ζυρίχης, από όπου πήρε το δίπλωμά του το 1900. Για ένα διάστημα δίδαξε σε κατώτερα σχολεία και, το 1902, αφού απόκτησε στο μεταξύ την ελβετική ιθαγένεια προσλήφθηκε στο Ομοσπονδιακό Γραφείο Ευρεσιτεχνιών της Βέρνης. Την ίδια εποχή ο Einstein παντρεύτηκε με τη Μιλέβα Μάριτς, μια Ουγγαρέζα συμφοιτήτριά του. Απέκτησαν δυο γιους, ένας από τους οποίους έγινε διαπρεπής καθηγητής Μηχανολογίας στο Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας.

Η περίοδος που εργάστηκε στο γραφείο ευρεσιτεχνιών της Βέρνης υπήρξε ίσως η πιο γόνιμη για την επιστημονική δραστηριότητα του Einstein και το 1905 είδε να ωριμάζουν οι καρποί των σκέψεων που έκανε από καιρό. Πραγματικά, εκείνο το χρόνο το περιοδικό Annalen der Physik δημοσίευσε θεμελιώδη άρθρα του νεαρού επιστήμονα. Το πρώτο άρθρο περιείχε τη διατύπωση της κβαντικής θεωρίας του φωτοηλεκτρικού φαινομένου - αξίζει να αναφερθεί ότι επίσημα το βραβείο Νόμπελ του 1921 απονεμήθηκε στον Einstein ακριβώς γι’ αυτή την εργασία του - και το δεύτερο, με τον ελάχιστα ηχηρό τίτλο *Περί της ηλεκτροδυναμικής των εν κινήσει σωμάτων*, ήταν η πρώτη ανακοίνωση για τις αρχές της θεωρίας της ειδικής σχετικότητας.

Τον ίδιο χρόνο ανέλαβε ένα αξίωμα στο Πανεπιστήμιο της Ζυρίχης, από όπου το 1910 πήγε στην Πράγα, που τότε βρισκόταν κάτω από αυστρο - ουγγρική κυριαρχία. Το 1912 ξαναγύρισε στη Ζυρίχη ως καθηγητής στο Πολυτεχνείο και έμεινε στη θέση αυτή ως το 1914, οπότε, ύστερα από μεσολάβηση του Max Planck πήγε στο Βερολίνο. Εκεί παρέμεινε είκοσι σχεδόν χρόνια, κάτοχος της έδρας της φυσικής στην Πρωσική Ακαδημία Επιστημών και διάδοχος (1914) του Van' t Hoff στη διεύθυνση του Ινστιτούτου Φυσικής «Kaiser Wilchelm». Στο Βερολίνο ο Einstein πήρε διαζύγιο από την πρώτη του σύζυγο και παντρεύτηκε την εξαδέλφη του Έλσα, που στάθηκε η πιστή σύντροφος της ζωής του.

Στα μετά το 1905 χρόνια, παρόλο που οι μελέτες του στρέφονταν κατά πρώτο και κύριο λόγο στην ανάπτυξη της θεωρίας της σχετικότητας ασχολήθηκε και με άλλους τομείς της θεωρητικής φυσικής : το 1906 έδωσε την κλασική διατύπωση της θεωρίας της κίνησης Brown και το 1907 διατύπωσε την κβαντική θεωρία των ειδικών θερμοτήτων, θέματα που τον απασχόλησαν και στα επόμενα χρόνια.

Η σπουδαιότητα αυτών των εργασιών είναι τόση ώστε να δικαιολογείται η κρίση πολλών φυσικών, κατά τους οποίους και αν ακόμη ο Einstein δεν είχε γράψει ούτε μια γραμμή για τη θεωρία της σχετικότητας, οι άλλες του εργασίες θα έφταναν για να του εξασφαλίσουν μια σπουδαιότατη θέση στην ιστορία της φυσικής.

Στη γενίκευση της θεωρίας της σχετικότητας και στη σχέση μεταξύ των φαινομένων της βαρύτητας και των επιταχυνόμενων κινήσεων ο Einstein αφιέρωσε μεγάλο μέρος της δραστηριότητας του στη Ζυρίχη, την Πράγα και το Βερολίνο, αντλώντας από τις θεμελιώδεις υποθέσεις ποσοτικά συμπεράσματα που θα μπορούσαν να επαληθευθούν πειραματικά : διακήρυξε ότι οι φωτεινές ακτίνες των αστέρων καμπυλώνονται καθώς περνούν κοντά από τον Ήλιο (1911), έδωσε μια ερμηνεία ορισμένων ανωμαλιών της κίνησης του Ερμή που δε μπορούσαν να εξηγηθούν μέσα στα πλαίσια της νευτώνειας μηχανικής (1915), εξήγησε θεωρητικά τη μετακίνηση προς το ερυθρό των γραμμών του φάσματος. Καρπός σκέψεων δέκα χρόνων και περισσότερο, υπήρξε η δημοσίευση (1916) της θεωρίας της γενικής σχετικότητας. Αυτό ήταν το έργο που ο ίδιος ο Einstein θεωρούσε ως τη σπουδαιότερη συμβολή του στην επιστημονική σκέψη. Σε διάφορες ευκαιρίες είπε πως η θεωρία της ειδικής σχετικότητας θα είχε διατυπωθεί και δίχως αυτόν, γιατί βρισκόταν ήδη διάχυτη στον επιστημονικό κόσμο. Όμως εξαιτίας της έλλειψης εντυπωσιακών πειραμάτων θα ήταν πολύ δυσκολότερο να είχε σκεφτεί κάποιος να επανεξετάσει τη θεωρία της βαρύτητας, που φαινόταν οριστικά συστηματοποιημένη από τον Newton. Για να γίνει αυτό χρειαζόταν η εξαιρετική πνευματική διορατικότητα του Einstein και η μεγάλη αδέσμευτη κρίση του. Το έργο που απασχόλησε ιδιαίτερα το μυαλό του Einstein σχεδόν 30 χρόνια, ήταν η προσπάθειά του να επεξεργασθεί μια ενιαία γενική θεωρία, που θα ενοποιούσε τη θεωρία του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και του πεδίου βαρύτητας. Παρόλο που η προσπάθεια αυτή θεωρητικής επεξεργασίας δεν κατάληξε σε οριστικά αποτελέσματα, παραμένει πάντα ένα από τα υψηλότερα σημεία στα οποία έφτασε η επιστημονική σκέψη όλων των εποχών.

Η εργασία του στο πρόβλημα που τον ενδιέφερε με πάθος και που απορρόφησε σχεδόν ολοκληρωτικά τη δραστηριότητά του στα τελευταία χρόνια της ζωής τον, δεν εμπόδισε τον Einstein να παρεμβαίνει ενεργά στις συζητήσεις για τα θεμελιώδη ζητήματα της σύγχρονης φυσικής, με ιδέες μεγάλης αξίας. Παράλληλα με τις επιστημονικές του έρευνες, ανάπτυξε σημαντική δράση στον τομέα της ιστορίας της επιστήμης, και στο πεδίο των φιλοσοφικών συζητήσεων για τα θεμέλια της επιστήμης .

Όταν αναγκάστηκε, λόγω των αντισημιτικών φυλετικών διώξεων των ναζιστών, να εγκαταλείψει τη Γερμανία (1932), ο Einstein εγκαταστάθηκε αρχικά στο Βέλγιο και αργότερα στις Ηνωμένες Πολιτείες, όπου έγινε καθηγητής στο Ινστιτούτο Ανωτέρων Σπουδών του Princeton. Το 1936 είχε την ατυχία να χάσει τη σύζυγο του, που είχε σταθεί γι’ αυτόν πραγματική σύντροφος της ζωής του. Το 1940 έλαβε την αμερικανική υπηκοότητα.

Άνθρωπος απλός και βαθύτατα ευγενικός, περιφρονούσε κάθε εξωτερική επίδειξη και δημοσιότητα. Οι αρετές αυτές έπαιξαν σημαντικό ρόλο στο να αποκτήσει τη συμπάθεια του μεγάλου κοινού. Ψυχή εξαιρετικά ευαίσθητη έτρεφε μεγάλη αγάπη για την καλή μουσική και ήταν ο ίδιος εξαίρετος καλλιτέχνης του βιολιού.

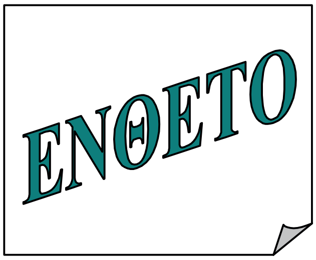
Η επίδραση του έργου του Einstein στο φιλοσοφικό στοχασμό ήταν και είναι μεγάλη. Η ριζική τροποποίηση των εννοιών του χώρου και του χρόνου, που εισήγαγε η θεωρία της σχετικότητας είχε τεράστιας σημασίας φιλοσοφικά επακόλουθα. Η εξάλειψη από το πεδίο της φυσικής των εννοιών του απόλυτου χώρου και του απόλυτου χρόνου, αποτέλεσε αληθινή επανάσταση στην επιστημονική σκέψη. Για να φτάσει κανείς σε μια τόσο επαναστατική άποψη χρειαζόταν εξαιρετική ελευθερία σκέψης η οποία θα επέτρεπε να ανατραπούν έννοιες που αποτελούσαν τους ακρογωνιαίους λίθους της φυσικής για δυο αιώνες.

Ο Einstein, μέχρι το τέλος της ζωής του επιδίωξε το ιδανικό της κλασικής φυσικής, σύμφωνα με το οποίο για κάθε φαινόμενο μπορεί να προσδιορισθεί μια σαφής σχέση αιτίου - αποτελέσματος. Τη θέση αυτή απορρίπτει σήμερα το μεγαλύτερο μέρος των σύγχρονων φυσικών οι οποίοι βασιζόμενοι στις αρχές της κβαντικής θεωρίας θεωρούν ότι τα φαινόμενα που εκτυλίσσονται σε ατομική κλίμακα είναι αδύνατον να προσδιορισθούν με απόλυτο τρόπο. Οι δρόμοι που ακολούθησε η κβαντική θεωρία βρήκαν αντίθετο τον Einstein που, αν και θεμελιωτής της, προτίμησε να απομονωθεί από την υπόλοιπη επιστημονική κοινότητα και να εργαστεί μόνος του στις τελευταίες δεκαετίες της ζωής του.

Πλούσια ήταν και η πολιτική και κοινωνική δράση του Einstein. Το 1914 αρνήθηκε να υπογράψει μια διακήρυξη Γερμανών διανοούμενων που δικαιολογούσε τη γερμανική επίθεση εναντίον του Βελγίου. Αγωνίστηκε για την προστασία των Εβραίων και για να τους ξαναδοθεί μια πατρίδα στην Παλαιστίνη. Του προσφέρθηκε η θέση του πρώτου προέδρου του κράτους του Ισραήλ αλλά την αρνήθηκε. Το 1939 του ζητήθηκε να υποστηρίξει το σχέδιο ανάπτυξης της ατομικής βόμβας από τις Ηνωμένες

Πολιτείες. Το δίλημμα ήταν μεγάλο. Ο Einstein ήξερε ότι η χιτλερική Γερμανία ήδη είχε ξεκινήσει ένα ανάλογο πρόγραμμα. Τελικά με μια ιστορική του επιστολή στον πρόεδρο Roosevelt τάχθηκε υπέρ του σχεδίου. Την τελευταία δεκαετία της ζωής του, μετά την ατομική καταστροφή της Χιροσίμα και του Ναγκασάκι (1945), την αφιέρωσε στην εκστρατεία για την ειρηνική χρήση της ατομικής ενέργειας. Πέθανε στο Princeton το 1955.

Το Παράδοξο των Διδύμων



Δύο δίδυμα αδέλφια, ο Γιώργος και ο Θανάσης, έχουν πολύ διαφορετικούς χαρακτήρες. Ο Γιώργος είναι πολύ ανήσυχο πνεύμα και ψάχνει συνέχεια για καινούριες εμπειρίες. Ο Θανάσης είναι ένας ήσυχος άνθρωπος. Όταν τα δύο αδέλφια βρίσκονται σε ηλικία είκοσι χρόνων ο Γιώργος παίρνει τη μεγάλη απόφαση να ταξιδέψει σ’ ένα μακρινό αστέρι που απέχει από τη Γη 30 έτη φωτός. Το διαστημόπλοιό του μπορεί να ταξιδεύει με ταχύτητα που πλησιάζει την ταχύτητα του φωτός.

Όταν ο Γιώργος φτάνει στον προορισμό του διαπιστώνει ότι κανένα μέρος δεν του αρέσει τόσο όσο η πατρίδα του η Γη και αποφασίζει να επιστρέψει. Όμως, όταν επιστρέφει στη Γη τριάντα χρονών … πλούσιος σε εμπειρίες και πιο ώριμος τον περιμένει μια έκπληξη. Τα πράγματα έχουν αλλάξει πολύ και ο αδελφός του ο Θανάσης είναι γέρος ογδόντα χρονών!

Μια βιαστική προσέγγιση θα απέδιδε τη διαφορά στην ηλικία των δύο αδελφών στην επιβράδυνση των βιολογικών λειτουργιών του Γιώργου επειδή ταξίδεψε για μεγάλο διάστημα σε σχέση με το Θανάση με ταχύτητα κοντά στην ταχύτητα του φωτός.

Θα μπορούσε όμως κανείς εύλογα να αναρωτηθεί γιατί να θεωρήσουμε τον Γιώργο να ταξιδεύει ως προς το Θανάση κι όχι το Θανάση ως προς το Γιώργο. Ανάμεσα σε δυο αδρανειακά συστήματα που κινούνται το ένα ως προς το άλλο έχουμε πάντα την ευχέρεια να θεωρούμε το ένα ακίνητο και το άλλο κινούμενο ως προς το πρώτο και αντίστροφα.

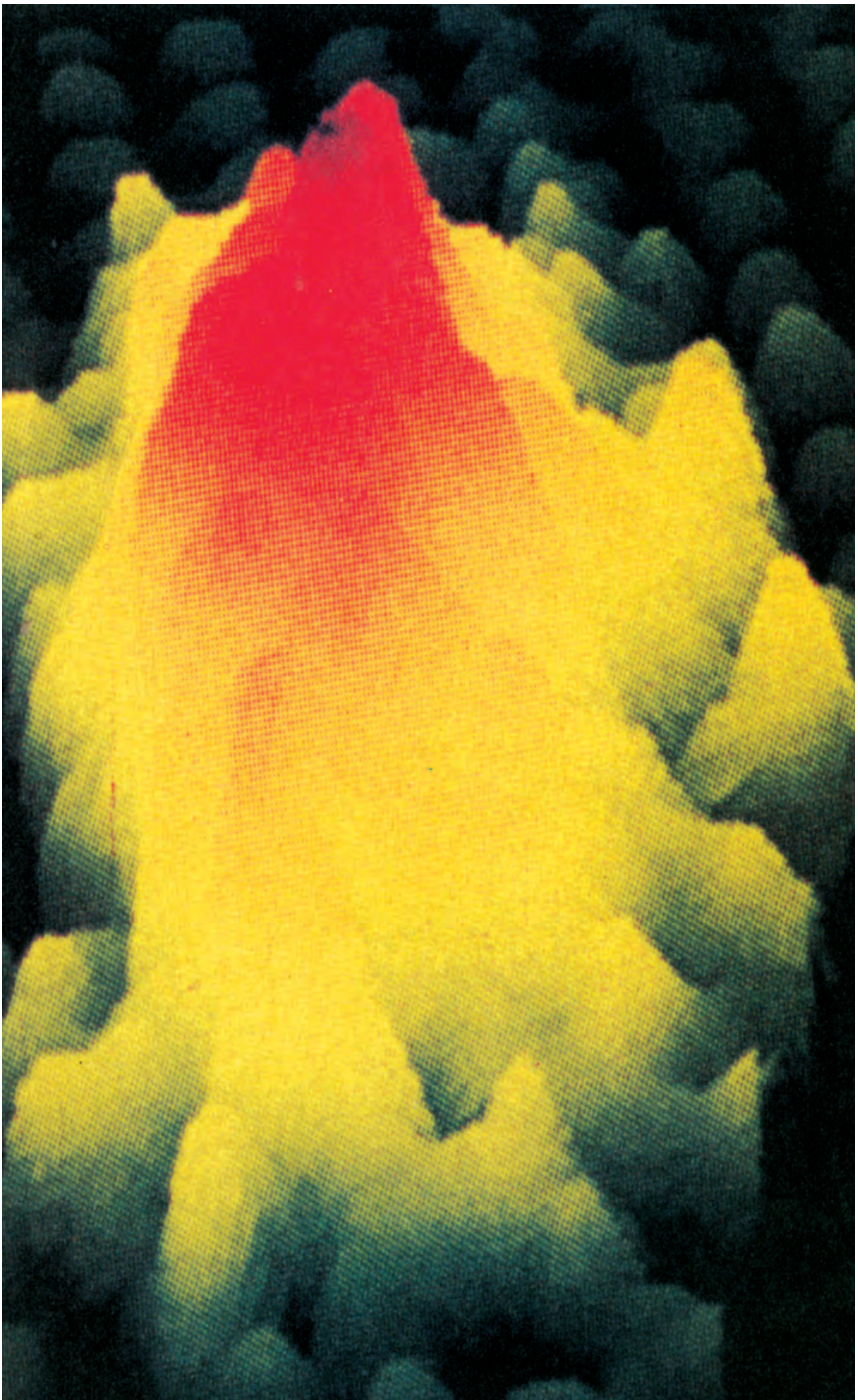
Γιατί λοιπόν να μην είναι ο Γιώργος που γέρασε περισσότερο από τον Θανάση; Εδώ βρίσκεται το παράδοξο.

Το σύστημα διαστημόπλοιο - Γη δεν παρουσιάζει συμμετρία. Αν η Γη είναι αδρανειακό σύστημα το διαστημόπλοιο δεν είναι αδρανειακό σύστημα σ’ όλη τη διάρκεια του ταξιδιού. Για να φτάσει την ταχύτητα του φωτός πρέπει να επιταχύνθηκε για κάποιο χρονικό διάστημα. Επίσης φτάνοντας στον προορισμό του, για να επιστρέψει στη Γη, χρειάστηκε να αλλάξει κατεύθυνση δηλαδή να μεταβάλλει και πάλι την ταχύτητά του. Τέλος για να προσγειωθεί στη Γη πρέπει να επιβραδύνθηκε για κάποιο χρονικό διάστημα.

Δεν μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε πιστά στο πρόβλημα των διδύμων αυτά που μάθαμε για την ειδική θεωρία της σχετικότητας.

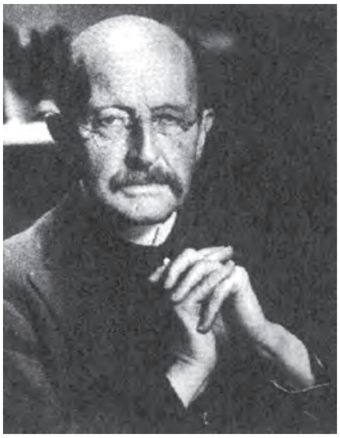
Υπενθυμίζεται ότι τα συμπεράσματα της ειδικής θεωρίας ισχύουν μόνο για αδρανειακά συστήματα και ότι ισχύει για ένα σύστημα Σ' ως προς ένα άλλο σύστημα Σ ισχύει και αντίστροφα για το Σ ως προς το Σ'.

7 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ



7.1. Εισαγωγή

Ο Maxwell, με την ενοποιημένη θεωρία του για τον ηλεκτρομαγνητισμό (1864), είχε προβλέψει την ύπαρξη των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων ως μηχανισμού διάδοσης της ενέργειας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στο χώρο. Αρκετά χρόνια αργότερα, το 1886, και ενώ ο Maxwell είχε πεθάνει, ο Γερμανός Heinrich Hertz παρήγαγε ηλεκτρομαγνητικά κύματα με ταλαντούμενα ηλεκτρικά δίπολα και απέδειξε ότι αυτά διαδίδονται στο χώρο με την ταχύτητα του φωτός. Είχε ανοίξει ο δρόμος για τη διερεύνηση της αλληλεπίδρασης ακτινοβολίας και ύλης. Ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα μπορούσε να μεταφέρει ενέργεια σ' ένα άτομο θέτοντάς το σε εξαναγκασμένη ταλάντωση και, αντίστροφα, ένα ταλαντούμενο άτομο, παρήγαγε ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα.



Max Planck (1858-1947). Γερμανός, θεμελιωτής της κβαντικής θεωρίας. Νόμπελ Φυσικής 1918. Η ζωή του σημαδεύτηκε από το θάνατο των τεσσάρων παιδιών του στη διάρκεια των δύο παγκοσμίων πολέμων. Αν και ανοιχτά αντίθετος στο ναζιστικό καθεστώς παρέμεινε στη Γερμανία γεγονός που του στοίχισε σε διώξεις μέχρι το τέλος του Β΄ παγκοσμίου πολέμου.

Εικόνα 7-1.

Η κλασική θεωρία προβλέπει ότι η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία μπορεί να μεταφέρει οποιοδήποτε ποσό ενέργειας, ανάλογα με τη συχνότητά της. Εντούτοις μια σειρά από φαινόμενα, όπως **η ακτινοβολία του μέλανος σώματος, το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, τα γραμμικά φάσματα εκπομπής και το φαινόμενο της σκέδασης των ακτίνων X (φαινόμενο Compton)**, δεν μπορούσαν να ερμηνευτούν με την κλασική θεωρία.

Το 1900 ο Max Planck κάνει την πολύ ριζοσπαστική υπόθεση ότι η ενέργεια εκπέμπεται ή απορροφάται από ένα αντικείμενο κατά διακριτές ποσότητες (κατά κβάντα) ή, πιο απλά, κατά μικρά πακέτα. Η συνολική ενέργεια λοιπόν δεν μπορεί παρά να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του κβάντου ενέργειας. Η υπόθεση αυτή αποδείχθηκε επιτυχής στην αντιμετώπιση των αδιεξόδων στα οποία είχε οδηγηθεί η κλασική θεωρία.

Η κβάντωση ενός μεγέθους δεν μας είναι άγνωστη υπόθεση. Για παράδειγμα το ηλεκτρικό φορτίο είναι κβαντισμένο μέγεθος με κβάντο το φορτίο του ηλεκτρονίου. Οποιαδήποτε ποσότητα φορτίου είναι πάντα ακέραιο πολλαπλάσιο του φορτίου του ηλεκτρονίου.

Η υπόθεση του Planck ήταν το θεμέλιο μιας νέας θεωρίας, της **κβαντικής θεωρίας**. Η κβαντική θεωρία προβλέπει κβάντωση κι άλλων μεγεθών όπως η ορμή και η στροφορμή.

Η κβαντική θεωρία ερμηνεύει φαινόμενα σε ατομικό επίπεδο τα οποία αδυνατεί να ερμηνεύσει η κλασική θεωρία. Όταν εξετάζουμε φαινόμενα του μακρόκοσμου η κβάντωση των μεγεθών γίνεται δυσδιάκριτη και τα συμπεράσματα της κβαντικής θεωρίας ταυτίζονται με αυτά της κλασικής.

7.2. Η Ακτινοβολία του Μέλανος Σώματος

Ένα οποιοδήποτε σώμα δε φαίνεται στο σκοτάδι ενώ αν το φωτίσουμε το βλέπουμε. Αυτό συμβαίνει γιατί όλο ή ένα μέρος από το φως που πέφτει στο σώμα επανεκπέμπεται (διαχέεται) στο περιβάλλον με αποτέλεσμα κάποιες από τις επανεκπεμπόμενες φωτεινές ακτίνες να φτάνουν στα μάτια μας. Με βάση αυτή τη διαδικασία καθορίζεται και το χρώμα που αποδίδουμε στο σώμα. Πιο συγκεκριμένα, αν φωτίσουμε ένα σώμα με λευκό φως εν γένει απορροφά κάποια μήκη κύματος ενώ άλλα τα επανεκπέμπει. Από τα επανεκπεμπόμενα μήκη κύματος καθορίζεται το χρώμα του σώματος που βλέπουμε. Στην ειδική περίπτωση που επανεκπέμπονται όλα τα μήκη κύματος του λευκού φωτός το σώμα φαίνεται λευκό. Στην αντίθετη περίπτωση, δηλαδή όταν το σώμα απορροφά όλα τα μήκη κύματος, φαίνεται μαύρο.

Μέλαν σώμα στη φυσική θεωρείται το σώμα που απορροφά την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που προσπίπτει σ' αυτό, σε όλο το φάσμα της (όλες τις συχνότητες).

Στην πράξη, μέλαν σώμα μπορεί να θεωρηθεί ένα οποιοδήποτε αντικείμενο με αιθαλωμένη την επιφάνειά του.

Ακτινοβολία μέλανος σώματος

Κάθε σώμα σε οποιαδήποτε θερμοκρασία κι αν βρίσκεται εκπέμπει ενέργεια με μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Η ακτινοβολία αυτή ονομάζεται θερμική ακτινοβολία.

Το μέγεθος που εκφράζει την ενέργεια που εκπέμπεται από τη μονάδα της επιφανείας ενός σώματος στη μονάδα του χρόνου ονομάζεται **ένταση της ακτινοβολίας**, συμβολίζεται με το I και στο S.I. μετριέται σε J/m^2s ή W/m^2.

Η ένταση της ακτινοβολίας που εκπέμπει ένα σώμα εξαρτάται από τη θερμοκρασία του.

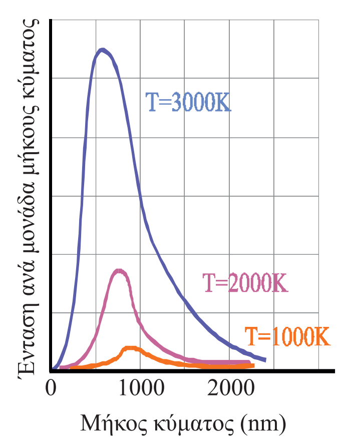
Ιδιαίτερο ενδιαφέρον, λόγω του ρόλου που έπαιξε στην εξέλιξη της φυσικής, έχει η μελέτη της θερμικής ακτινοβολίας του μέλανος σώματος.

Το μέλαν σώμα, σ' οποιαδήποτε θερμοκρασία κι αν βρίσκεται εκπέμπει ενέργεια με τη μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας σ' όλο το φάσμα της. Το μεγαλύτερο όμως τμήμα της ενέργειας που εκπέμπεται μ' αυτό τον τρόπο περιορίζεται σε μια στενή περιοχή, με «αιχμή» κάποιο μήκος κύματος (λ_{max}), διαφορετικό για κάθε θερμοκρασία. Σε θερμοκρασίες γύρω στους $1000\ K$ το μέλαν σώμα εκπέμπει κυρίως στην υπέρυθρη περιοχή, ενώ σε ψηλότερες θερμοκρασίες το λ_{max} μετατοπίζεται σε μικρότερα μήκη κύματος (μεγαλύτερες συχνότητες), στην περιοχή του ορατού (σχ. 7.1).

Η σχέση που συνδέει την απόλυτη θερμοκρασία (T) του μέλανος σώματος με το μήκος κύματος αιχμής (λ_{max}) είναι

$$\lambda_{max}T = σταθερό$$ (νόμος μετατόπισης Wien)

Για την ερμηνεία των πειραματικών δεδομένων οι ερευνητές δέχτηκαν ότι τα άτομα των σωμάτων ταλαντώνονται. Το πλάτος της ταλάντωσής τους είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας στην οποία βρίσκονται τα σώματα. Αποτέλεσμα αυτής της ταλάντωσης των ατόμων,



Διάγραμμα της έντασης ανά μονάδα μήκους κύματος σε συνάρτηση με το μήκος κύματος για το μέλαν σώμα, σε τρεις διαφορετικές θερμοκρασίες. Το μέγιστο της καμπύλης μετατοπίζεται σε μικρότερα μήκη κύματος όταν αυξάνεται η θερμοκρασία.

Σχήμα 7-1

που μπορούμε να τα δούμε ως στοιχειώδη ταλαντούμενα ηλεκτρικά δίπολα, είναι η εκπομπή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Η υπόθεση όμως αυτή δεν μπόρεσε να ερμηνεύσει ικανοποιητικά τα πειραματικά αποτελέσματα.

Το φαινόμενο ερμηνεύτηκε πλήρως το 1900, με τις δύο υποθέσεις που διατύπωσε ο Planck.

1. **Η ενέργεια των ταλαντούμενων ατόμων δε μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Μπορεί να πάρει μόνο διακριτές (κβαντισμένες) τιμές. Οι τιμές της ενέργειας που μπορεί να έχει το ταλαντούμενο άτομο είναι**

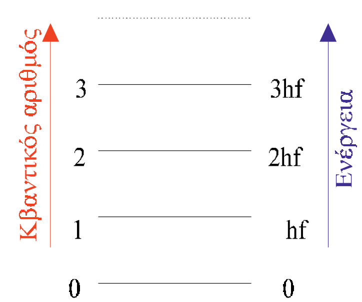
$$\boxed{E_n = nhf}$$

όπου n ένας θετικός ακέραιος αριθμός που ονομάζεται **κβαντικός αριθμός**, f η συχνότητα ταλάντωσης του ατόμου και h μια σταθερά που αργότερα έπαιξε μεγάλο ρόλο στη φυσική και ονομάστηκε **σταθερά δράσης του Planck**. Η τιμή της βρέθηκε

$$\boxed{h = 6,626 \times 10^{-34}\, J \cdot s}$$

2. **Το ποσό της ενέργειας, που μπορεί να απορροφήσει ή να εκπέμψει ένα άτομο, υπό μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, μπορεί να πάρει μόνο διακριτές τιμές.**

Στο σχήμα 7.2 δίνουμε μία εικόνα των ενεργειακών σταθμών στις οποίες μπορεί να βρεθεί το άτομο. Αν το άτομο απορροφήσει ένα κβάντο ενέργειας δηλαδή ενέργεια $E = hf$, αυξάνει την ενέργειά του κατά ένα σκαλοπάτι στην κλίμακα των ενεργειακών σταθμών. Αν πάλι το άτομο εκπέμψει ένα κβάντο ενέργειας υπό μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας τότε κατεβαίνει ένα σκαλοπάτι στην ίδια κλίμακα. Όσο ένα άτομο παραμένει στην ίδια ενεργειακή κατάσταση (στάθμη), ούτε εκπέμπει ούτε απορροφά ενέργεια. Τα άτομα, λοιπόν, απορροφούν ή εκπέμπουν ενέργεια όχι συνεχώς αλλά κάνοντας ενεργειακά άλματα.



Σχήμα 7-2.

Παράδειγμα 7.1

Ένα σώμα μάζας $m = 50\ g$ είναι δεμένο σε ελατήριο σταθεράς $K = 5\ N/m$ και εκτελεί απλή γραμμική ταλάντωση πλάτους $A = 5\ cm$. Αν θεωρηθεί ότι το σύστημα αποτελεί κβαντικό ταλαντωτή (ταλαντωτή που η ενέργειά του μπορεί να πάρει μόνο διακριτές τιμές) να υπολογιστούν : α) το ενεργειακό διάστημα μεταξύ δύο ενεργειακών σταθμών, δηλαδή το κβάντο ενέργειας αυτού του ταλαντωτή και β) ο κβαντικός αριθμός n της ενεργειακής στάθμης στην οποία βρίσκεται ο ταλαντωτής.

Απάντηση :

α) Η συχνότητα της ταλάντωσης θα είναι

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{5N/m}{0,05kg}} = \frac{5}{\pi}s^{-1}$$

Εάν ο ταλαντωτής χάνει ενέργεια λόγω τριβών, σύμφωνα με την υπόθεση του Planck θα πρέπει να χάνει την ενέργειά του κατά άλματα που το μέγεθός τους θα είναι

$$\Delta E = hf = (6,626\times10^{-34}J\cdot s)\cdot\left(\frac{5}{\pi}s^{-1}\right) = 10,551\times10^{-34}J$$

Πρόκειται για ένα ποσό ενέργειας που πολύ δύσκολα να ανιχνεύεται.

β) Η ολική ενέργεια του ταλαντωτή είναι

$$E = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}(5N/m)\cdot(0,05m)^2 = 6,25\times10^{-3}J$$

Όμως επίσης $E = nhf$. Άρα $n = \dfrac{E}{hf} = \dfrac{6,25\times10^{-3}J}{10,551\times10^{-34}J} = 6\times10^{30}$

Πρόκειται για ένα τεράστιο αριθμό.

Σε ανάλογα αποτελέσματα καταλήγουμε αν επιχειρήσουμε να ανιχνεύσουμε την κβάντωση της ενέργειας σε οποιοδήποτε σύστημα στο μακρόκοσμο.

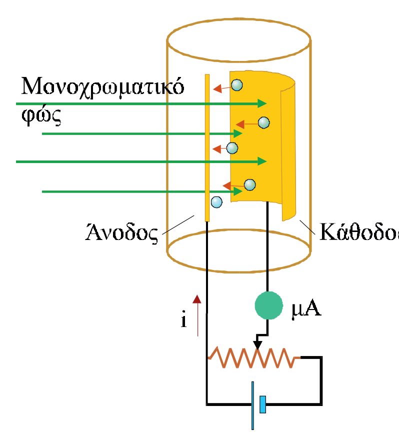
7.3. Το Φωτοηλεκτρικό Φαινόμενο

Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο είναι το φαινόμενο κατά το οποίο μια μεταλλική επιφάνεια απελευθερώνει ηλεκτρόνια στο περιβάλλον όταν πάνω της προσπίπτει φως.

Τα ηλεκτρόνια που υπάρχουν στο εσωτερικό ενός αγωγού περιορίζονται στο χώρο που καταλαμβάνει ο αγωγός, από δυνάμεις που εμποδίζουν τη διάχυσή τους στο περιβάλλον. Όταν μια δέσμη φωτός προσπίπτει πάνω στην επιφάνεια του αγωγού κάποια ηλεκτρόνια απορροφούν ενέργεια αρκετή για να υπερνικήσουν αυτές τις δυνάμεις και βγαίνουν από το μέταλλο (**φωτοηλεκτρόνια**).

Για τη μελέτη του φωτοηλεκτρικού φαινομένου θα χρησιμοποιήσουμε τη διάταξη του σχήματος 7.3 .

Μέσα σε ένα σωλήνα υψηλού κενού ($\approx 10^{-7}atm$) τοποθετούμε δύο ηλεκτρόδια. Το πρώτο, που χρησιμεύει ως **κάθοδος**, έχει μεγάλη επιφάνεια, φέρει επίστρωση από ένα αλκαλιμέταλλο (K ή Cs) και όταν φωτίζεται εκπέμπει ηλεκτρόνια. Τα ηλεκτρόνια αυτά συλλέγονται από το δεύτερο ηλεκτρόδιο την **άνοδο**. Με τη βοήθεια μιας ποτενσιομετρικής διάταξης μπορούμε να μεταβάλλουμε την τάση που εφαρμόζεται στα ηλεκτρόδια. Τέλος, με ένα μικροαμπερόμετρο που παρεμβάλλεται στο κύκλωμα μπορούμε να μετρήσουμε την ένταση του ρεύματος που οφείλεται στα ηλεκτρόνια που εκπέμπει η φωτιζόμενη



Σχηματική παράσταση ενός κυκλώματος φωτοκύτταρου.

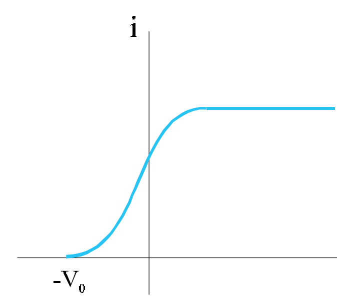
Σχήμα 7-3.

κάθοδος. Όταν η κάθοδος φωτίζεται εκπέμπει ηλεκτρόνια (φωτοηλεκτρόνια) τα οποία επιταχύνονται από το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των ηλεκτροδίων (σχ. 7.3) και καταλήγουν στην άνοδο.

Πειραματικά διαπιστώνεται ότι

1. Εκπομπή φωτοηλεκτρονίων έχουμε μόνο όταν η συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι μεγαλύτερη ή ίση μιας ορισμένης συχνότητας, η οποία είναι χαρακτηριστική για το μέταλλο. Αυτή η οριακή συχνότητα ονομάζεται **συχνότητα κατωφλίου (**f_o**)**.
2. Ο αριθμός των ηλεκτρονίων που αποσπώνται από το μέταλλο ανά μονάδα χρόνου είναι ανάλογος της έντασης της φωτεινής ακτινοβολίας που προσπίπτει στο μέταλλο.
3. Η ταχύτητα με την οποία εξέρχονται τα ηλεκτρόνια δεν εξαρτάται από την ένταση της φωτεινής ακτινοβολίας αλλά μόνο από τη συχνότητά της και αυξάνεται όταν η συχνότητα της ακτινοβολίας μεγαλώνει.

Το διάγραμμα 7.4 παριστάνει την ένταση του ρεύματος σε συνάρτηση με την τάση μεταξύ ανόδου καθόδου στο κύκλωμα του σχήματος 7.3. Παρατηρήστε ότι για τάση μηδέν έχουμε ρεύμα, που σημαίνει ότι τα φωτοηλεκτρόνια εξέρχονται από την κάθοδο με κινητική ενέργεια που τους επιτρέπει να κινηθούν μέχρι την άνοδο. Ρεύμα έχουμε και για τάσεις λίγο μικρότερες από το μηδέν. Τάση αρνητική, εδώ, σημαίνει ότι η άνοδος έχει μικρότερο δυναμικό από την κάθοδο. Στην περίπτωση αυτή το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ ανόδου - καθόδου παρεμποδίζει τα ηλεκτρόνια που εξέρχονται από την κάθοδο να φτάσουν στην άνοδο. Εφόσον για κάποιες αρνητικές τιμές της τάσης έχουμε ρεύμα, η κινητική ενέργεια ορισμένων ηλεκτρονίων, όταν εξέρχονται από την κάθοδο, είναι αρκετά μεγάλη ώστε να υπερνικήσουν το αντιτιθέμενο ηλεκτρικό πεδίο και να φτάσουν στην άνοδο. Η τάση (V_o) στην οποία διακόπτεται το ρεύμα ονομάζεται **τάση αποκοπής**.

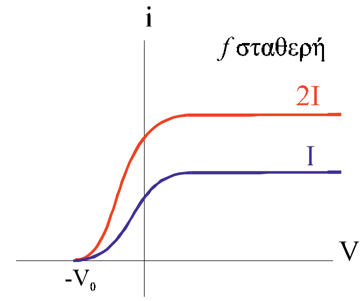


Διάγραμμα της έντασης του ρεύματος σε συνάρτηση με την τάση στο φωτοκύτταρο.
Σχήμα 7-4.

Το φαινόμενο δε μπορεί να εξηγηθεί μόνο από το γεγονός ότι το φως είναι ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

Για να υπερνικήσει τις δυνάμεις που το συγκρατούν στο μέταλλο ένα ηλεκτρόνιο πρέπει να προσλάβει ένα ελάχιστο ποσό ενέργειας. Η ενέργεια αυτή ονομάζεται **έργο εξαγωγής** και συμβολίζεται με φ. Το έργο εξαγωγής ποικίλει από μέταλλο σε μέταλλο.

Το φως, ως ηλεκτρομαγνητικό κύμα, μεταφέρει ενέργεια, επομένως, είναι αναμενόμενο ότι τα ηλεκτρόνια κάποιου μετάλλου μπορούν να απορροφήσουν ενέργεια από το φως και να εξέλθουν από το μέταλλο. Η κλασική θεωρία όμως δε μπόρεσε να ερμηνεύσει το γεγονός, ότι η εξαγωγή ηλεκτρονίων από το μέταλλο και η κινητική ενέργεια με την οποία εξέρχονται εξαρτάται από τη συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας και όχι από την ενέργεια που μεταφέρει η φωτεινή δέσμη που προσπίπτει στο μέταλλο, δηλαδή από την ένταση της ακτινοβολίας.



Διάγραμμα της έντασης του ρεύματος σε συνάρτηση με την τάση για διαφορετικές τιμές της έντασης της ακτινοβολίας.
Σχήμα 7-5.

Το φαινόμενο ερμηνεύτηκε το 1905 από τον Einstein ο οποίος, επεκτείνοντας τις απόψεις του Planck, υπέθεσε ότι

«το φως αποτελείται από μικρά πακέτα ενέργειας, που ονομάζονται κβάντα φωτός ή φωτόνια»

Η ενέργεια κάθε φωτονίου είναι

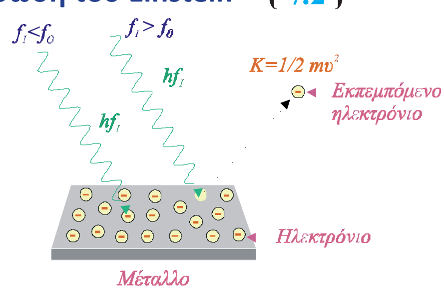
$$\boxed{E = hf} \qquad (7.1)$$

όπου f η συχνότητά του και h η σταθερά του Planck.

Κατά τον Einstein, κάθε φωτόνιο της δέσμης που φωτίζει την κάθοδο μεταδίδει όλη του την ενέργεια hf σε ένα μόνο από τα ηλεκτρόνια του μετάλλου. Αν η ενέργεια hf του φωτονίου είναι μικρότερη από το έργο εξαγωγής, το ηλεκτρόνιο δε μπορεί να εγκαταλείψει το μέταλλο. Εάν είναι μεγαλύτερη ή ίση με το έργο εξαγωγής φ το ηλεκτρόνιο εγκαταλείπει το μέταλλο με κινητική ενέργεια που υπολογίζεται από τη σχέση.

$\boxed{K = hf - \phi}$ **Φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein** (7.2)

Κινητική ενέργεια ηλεκτρονίου	=	*Ενέργεια προσπίπτοντος φωτονίου*	-	*Έργο εξαγωγής*
1/2 mυ^2	=	***hf***	-	***Φ***



Σχηματική παράσταση του φωτοηλεκτρικού φαινομένου.
Σχήμα 7-6.

Η φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein ερμηνεύει όλα τα πειραματικά δεδομένα.

Για να εξέλθει ένα ηλεκτρόνιο από το μέταλλο πρέπει

$$hf - \phi \geq 0$$

δηλαδή η ενέργεια του προσπίπτοντος φωτονίου να είναι μεγαλύτερη ή οριακά ίση με το έργο εξαγωγής $hf \geq \phi$

ή $$f \geq \frac{\phi}{h}$$

Η συχνότητα $f_0 = \dfrac{\phi}{h}$ είναι η **συχνότητα κατωφλίου**.

Αν η συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι μεγαλύτερη από τη συχνότητα κατωφλίου η αύξηση της έντασης της προσπίπτουσας ακτινοβολίας συνεπάγεται αύξηση του αριθμού των φωτονίων που πέφτουν στην κάθοδο ανά μονάδα χρόνου και επομένως αύξηση του αριθμού των φωτοηλεκτρονίων που εξέρχονται από το μέταλλο στον ίδιο χρόνο. Τέλος όπως φαίνεται από τη φωτοηλεκτρική εξίσωση, η κινητική ενέργεια με την οποία εξέρχονται τα ηλεκτρόνια από κάποιο μέταλλο εξαρτάται μόνο από τη συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας.

Η ορμή των φωτονίων

Στην παράγραφο 6-11 είδαμε ότι ένα σωμάτιο με μηδενική μάζα ηρεμίας - τέτοιο είναι το φωτόνιο - έχει ενέργεια $E = pc$. Όμως είδαμε επίσης ότι η ενέργεια ενός φωτονίου είναι $E = hf$. Εύκολα βρίσκει κανείς ότι $p = \frac{hf}{c}$. Αν λάβουμε υπόψη ότι $c = \lambda f$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ορμή του φωτονίου δίνεται από τη σχέση

$$\boxed{p = \frac{h}{\lambda}} \qquad (7.3)$$

Το φως στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο συμπεριφέρεται σαν ένα ρεύμα σωματιδίων (φωτονίων). Σε άλλες περιπτώσεις όμως το φως συμπεριφέρεται σαν κύμα (π.χ. δίνει φαινόμενα συμβολής). Η σχέση (7.3) είναι ιδιαίτερα σημαντική γιατί φωτίζει τη δυαδική φύση του φωτός. Συνδέει μία καθαρά σωματιδιακή ιδιότητα, όπως η ορμή, με μια καθαρά κυματική ιδιότητα, όπως το μήκος κύματος. Ο σύνδεσμος μεταξύ τους είναι η σταθερά του Planck.

7.4. Φαινόμενο Compton

Οι ακτίνες Χ

Το 1895 ο Wilchelm Röntgen (Ρέντγκεν) ανακάλυψε ότι όταν ένα μέταλλο «βομβαρδιστεί» με ηλεκτρόνια που κινούνται με μεγάλη ταχύτητα εκπέμπει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Η ακτινοβολία αυτή ονομάστηκε **ακτίνες Χ** ή ακτίνες Röntgen. Ακτίνες Χ χρησιμοποιούνται καθημερινά σήμερα για την λήψη κοινών ακτινογραφιών. Οι ακτίνες Χ έχουν μήκη κύματος από $0{,}001\ nm$, έως $1\ nm$.

Ο μηχανισμός παραγωγής των ακτίνων Χ είναι ακριβώς ο αντίστροφος του φωτοηλεκτρικού φαινομένου. Στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο μια μεταλλική επιφάνεια «βομβαρδίζεται» με ηλεκτρομαγνητικό κύμα και εκπέμπει ηλεκτρόνια. Στις ακτίνες Χ η μεταλλική επιφάνεια «βομβαρδίζεται» με ηλεκτρόνια και εκπέμπει ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

Όταν τα ηλεκτρόνια της δέσμης φτάνουν στην επιφάνεια του μετάλλου επιβραδύνονται απότομα. Η επιβράδυνση αυτή συνοδεύεται από εκπομπή ακτινοβολίας, το φωτόνιο της οποίας θα έχει ενέργεια μικρότερη ή ίση με την ενέργεια του ηλεκτρονίου στο οποίο οφείλεται η εκπομπή του.

Υπάρχει και άλλη αιτία για την οποία εκπέμπεται ακτινοβολία από τη μεταλλική επιφάνεια. Καθώς τα ηλεκτρόνια συγκρούονται με τα άτομα της επιφάνειας του μετάλλου τούς μεταφέρουν ενέργεια. Τα άτομα διεγείρονται, τα ηλεκτρόνιά τους δηλαδή μεταφέρονται σε στιβάδες μεγαλύτερης ενέργειας. Όταν αποδιεγείρονται, όταν δηλαδή τα ηλεκτρόνια επανέλθουν στην αρχική τους στιβάδα, εκπέμπουν στο περιβάλλον ενέργεια υπό μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας.

Wilchelm Röntgen (1845-1923). Ολλανδία, Ελβετία, Γερμανία. Η ανακάλυψη των ομώνυμων ακτίνων έφερε επανάσταση στην ιατρική. Νόμπελ Φυσικής το 1902.

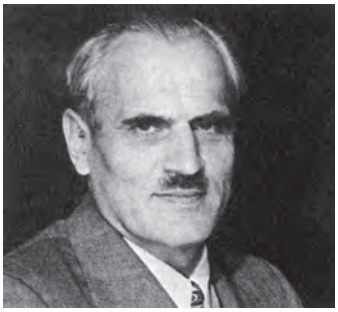
Εικόνα 7-2.

Η σκέδαση Compton (Κόμπτον)

Η ύπαρξη φωτονίων επιβεβαιώθηκε πειραματικά το 1924 από τον Αμερικανό Arthur Holly Compton. Ο Compton παρατήρησε ότι όταν ακτίνες Χ προσπίπτουν πάνω σε μια υλική επιφάνεια ένα μέρος τους εκτρέπεται από τα σωματίδια της ύλης (σκεδάζεται). Ο Compton διαπίστωσε ότι το σκεδαζόμενο τμήμα της ακτινοβολίας έχει μήκος κύματος μεγαλύτερο από το μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας (μικρότερη συχνότητα). Οι μετρήσεις του Compton έδειξαν ότι η μεταβολή του μήκους κύματος ανάμεσα στην προσπίπτουσα και τη σκεδαζόμενη δέσμη εξαρτάται μόνο από τη γωνία ανάμεσα στις δύο δέσμες και μάλιστα υπακούει στη σχέση

$$\boxed{\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)}$$

όπου λ' το μήκος κύματος της σκεδαζόμενης δέσμης, λ το μήκος κύματος της προσπίπτουσας δέσμης, m η μάζα του ηλεκτρονίου και φ η γωνία μεταξύ προσπίπτουσας και ανακλώμενης δέσμης.



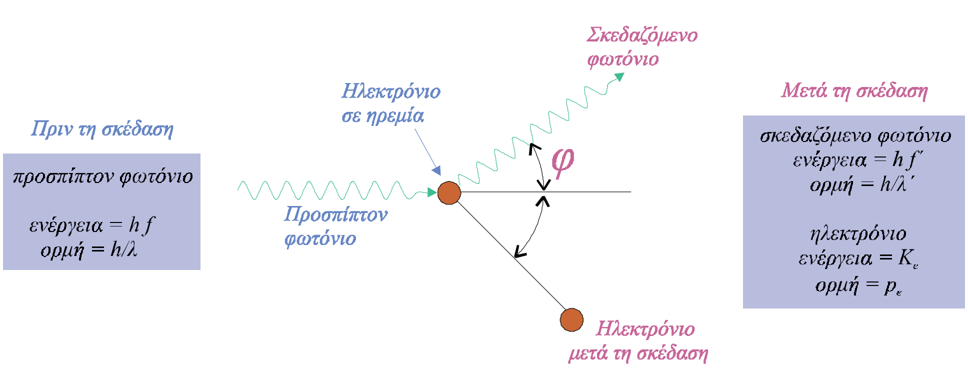
Arthur Holly Compton (1892-1962) Αμερική.

Εικόνα 7.3

Σύμφωνα με την κλασική θεωρία ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα συχνότητας f που προσπίπτει σ' ένα υλικό αναγκάζει τα ηλεκτρόνια του υλικού να ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα και, επακόλουθα, να παράγουν με τη σειρά τους σαν μικρές κεραίες, ηλεκτρομαγνητικό κύμα της ίδιας συχνότητας f. Η κλασική θεωρία, λοιπόν, θα περίμενε η σκεδαζόμενη δέσμη να έχει την ίδια συχνότητα και, αντίστοιχα, ίδιο μήκος κύματος με την προσπίπτουσα δέσμη.

Τα πράγματα φωτίζονται αν δούμε την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία ως ρεύμα φωτονίων, δηλαδή σωματίων με μηδενική μάζα ηρεμίας που μεταφέρουν ενέργεια και ορμή. Τότε το πρόβλημα της σκέδασης της ακτινοβολίας μετατρέπεται σε πρόβλημα κρούσης ανάμεσα σ' ένα φωτόνιο και ένα ηλεκτρόνιο.

Ας υποθέσουμε ότι ένα φωτόνιο μήκους κύματος λ συγκρούεται μ' ένα πρακτικώς ακίνητο ηλεκτρόνιο (σχ. 7.7). Μετά τη σκέδαση το φωτόνιο κινείται σχηματίζοντας γωνία φ με την αρχική διεύθυνση κίνησης και έχοντας χάσει τμήμα της αρχικής του ενέργειας αφού ένα μέρος της αρχικής του ενέργειας θα μεταφερθεί στο ηλεκτρόνιο. Το σκεδαζόμενο φωτόνιο θα έχει μετατραπεί σε φωτόνιο μήκους κύματος λ' με $\lambda' > \lambda$. Κατά τη διάρκεια της σκέδασης πρέπει να διατηρούνται η ενέργεια και η ορμή του συστήματος.



Σχήμα 7-7.

Το φωτόνιο έχει πριν τη σκέδαση ενέργεια $E = hf = hc/\lambda$ και μετά τη σκέδαση $E' = hc/\lambda'$. Θα πρέπει λοιπόν να ισχύει

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + K_e$$

όπου K_e η κινητική ενέργεια του ανακρουόμενου ηλεκτρονίου. Επειδή το ηλεκτρόνιο μετά την κρούση μπορεί να κινείται με ταχύτητα που πλησιάζει την ταχύτητα του φωτός καλό είναι να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση 6.17 για την κινητική του ενέργεια οπότε

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + \frac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - mc^2 \qquad (7.4)$$

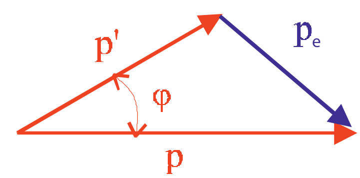
Η ορμή του φωτονίου πριν είναι $p = E/c = h/\lambda$ και η ορμή του φωτονίου μετά είναι $p' = h/\lambda'$. Η ορμή του ηλεκτρονίου θα είναι σύμφωνα με τη σχέση (6.15) $p_e = \dfrac{m\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$.

Η διατήρηση της ορμής σε διανυσματική μορφή δίνει

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}_e$$

οπότε

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$$



Σχήμα 7-8.

Χρησιμοποιώντας τον νόμο του συνημίτονου στο διανυσματικό διάγραμμα του σχήματος 7.8 προκύπτει

$$p_e^2 = p^2 + p'^2 - 2pp'\sigma\upsilon\nu\varphi$$

Δηλαδή

$$\frac{m^2\upsilon^2}{1-\upsilon^2/c^2} = \frac{h^2}{\lambda^2} + \frac{h^2}{\lambda'^2} - \frac{2h^2}{\lambda\lambda'}\sigma\upsilon\nu\varphi \qquad (7.5)$$

Από τις (7.4) και (7.5), αν απαλείψουμε το υ, προκύπτει η σχέση

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)$$

Παράδειγμα 7.2

Δέσμη ακτίνων X με $\lambda = 0{,}1\ nm\ (10^{-10}\ m)$ σκεδάζεται από επιφάνεια άνθρακα. Η σκεδασθείσα δέσμη σχηματίζει γωνία $90°$ με την προσπίπτουσα. Να βρεθούν :

α) Η ενέργεια και η ορμή των φωτονίων της προσπίπτουσας δέσμης.

β) Το μήκος κύματος, η ενέργεια και η ορμή του φωτονίου της σκεδαζόμενης δέσμης.

γ) Η κινητική ενέργεια που προσδίδεται σε ένα ανακρουόμενο ηλεκτρόνιο.

Απάντηση :

α) $E = hf = \dfrac{hc}{\lambda} = \dfrac{(6{,}626\times10^{-34}J\cdot s)\cdot(3\times10^{8}m/s)}{10^{-10}m} = 19{,}878\times10^{-16}J = 12424\ eV$

$$p=\frac{h}{\lambda}=\frac{6,626\times10^{-34}\ J\cdot s}{10^{-10}m}=6,626\times10^{-24}\ kg\cdot m/s$$

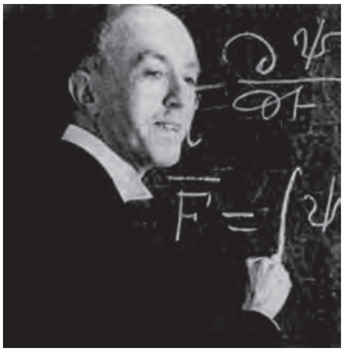
β) $$\lambda'-\lambda=\frac{h}{mc}(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)$$

άρα $$\lambda'=\lambda+\frac{h}{mc}(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)=10^{-10}m+\frac{6,626\times10^{-34}\ J\cdot s}{\left(9,11\times10^{-31}kg\right)\cdot\left(3\times10^{8}m/s\right)}=1,024\times10^{-10}m$$

$$E'=\frac{hc}{\lambda'}=\frac{\left(6,626\times10^{-34}\ J\cdot s\right)\cdot\left(3\times10^{8}\ m/s\right)}{1,024\times10^{-10}\ m}=19,412\times10^{-16}\ J=12133\ eV$$

$$p'=\frac{h}{\lambda'}=\frac{6,626\times10^{-34}\ J\cdot s}{1,024\times10^{-10}\ m}=6,471\times10^{-24}\ kg\cdot m/s$$

γ) $$K_e=E-E'=291\ eV$$



Πρίγκιπας Louis de Broglie (1892-1987). Γάλλος αριστοκρατικής καταγωγής. Βραβείο Νόμπελ 1929.

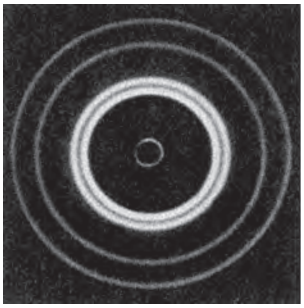
Εικόνα 7-4.

7.5. Η Κυματική Φύση της Ύλης

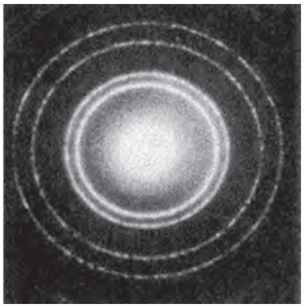
Είκοσι περίπου χρόνια μετά την υπόθεση του Einstein ότι ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα, όπως το φως, έχει σωματιδιακή υπόσταση, στα 1924, ο Γάλλος Louis de Broglie (Λουί ντε Μπρολί) πιστεύοντας στη συμμετρία της φύσης έθεσε το αξίωμα ότι οποιοδήποτε σωμάτιο ορμής p είναι συνδεδεμένο με ένα κύμα μήκους κύματος λ που δίνεται από τη σχέση

$$\boxed{\lambda=\frac{h}{p}}$$

Η υπόθεση de Broglie δεν άργησε να επαληθευθεί. Το 1927, στην Αμερική, οι Davisson και Germer διαπίστωσαν ότι μία δέσμη ηλεκτρονίων που κινούνται με μεγάλη ταχύτητα περιθλάται με τρόπο ανάλογο με αυτόν που περιθλάται μια δέσμη ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, μια δέσμη ακτίνων X για παράδειγμα. Σύντομα, νέα πειράματα έδειξαν ότι κυματική συμπεριφορά παρουσιάζουν και δέσμες σωματιδίων α και δέσμες νετρονίων. Τα αποτελέσματα ήταν τέτοια που δεν άφηναν κανένα περιθώριο να αμφισβητηθεί ότι τα σωμάτια έχουν και κυματική φύση.



(α)



(β)

(α) Εικόνα περίθλασης ακτίνων X. (β) Εικόνα περίθλασης δέσμης ηλεκτρονίων.

Εικόνα 7-5.

Παράδειγμα 7.3

Ποιο μήκος κύματος προβλέπει η υπόθεση de Broglie α) για μία μπάλα του μπάσκετ, μάζας $1\ kg$, που κινείται με ταχύτητα $3\ m/s$, β) για τη σφαίρα ενός πυροβόλου όπλου μάζας $20\ g$ που κινείται με ταχύτητα $300\ m/s$, γ) για ένα ηλεκτρόνιο μάζας $9,11\times10^{-31}\ kg$ που έχει ταχύτητα $7\times10^{6}\ m/s$.

Απάντηση :

Και τα τρία σώματα, ακόμη και το ηλεκτρόνιο, κινούνται με ταχύτητες σημαντικά μικρότερες της ταχύτητας του φωτός, δε χρειάζεται λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε τη σχετικιστική σχέση για την ορμή.

α) $\lambda_1 = \dfrac{h}{p_1} = \dfrac{6,626\times10^{-34}\ J\cdot s}{(1\ kg)\cdot(3\ m/s)} = 2,21\times10^{-34}\ m$

β) $\lambda_2 = \dfrac{h}{p_2} = \dfrac{6,626\times10^{-34}\ J\cdot s}{(20\times10^{-3}\ kg)\cdot(3\times10^{2}\ m/s)} = 1,1\times10^{-32}\ m$

γ) $\lambda_3 = \dfrac{h}{p_3} = \dfrac{6,626\times10^{-34}\,J\cdot s}{(9,11\times10^{-31}kg)\cdot(7\times10^{6}m/s)} = 1,04\times10^{-10}m$

Από τα δύο πρώτα αποτελέσματα βλέπουμε ότι ένα σώμα του μακρόκοσμου συνδέεται με μήκος κύματος τόσο μικρό που μάλλον δεν θα μπορέσουμε να το ανιχνεύσουμε ποτέ. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι η υπόθεση του de Broglie για την κυματική φύση της ύλης έχει ουσιαστικά εφαρμογή μόνο για σωμάτια ατομικής και υποατομικής κλίμακας.

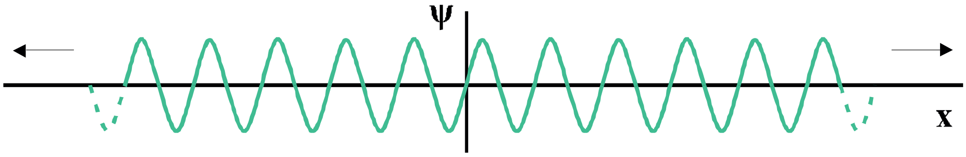
7.6. Αρχή της Αβεβαιότητας

Είδαμε ότι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα συμπεριφέρονται άλλοτε σαν κύματα και άλλοτε σαν δέσμες σωματίων. Επίσης δέσμες κλασικών σωματιδίων, όπως τα ηλεκτρόνια, έχουν και κυματική συμπεριφορά. Μπορούμε να πούμε ότι η ύλη, με την ευρύτερη έννοια (συμπεριλαμβάνοντας και την ενέργεια), έχει διπλή οντότητα -σωματιδιακή και κυματική. Πρόκειται για ένα συμπέρασμα πολύ καλά θεμελιωμένο πειραματικά.

Κάτω από μια τέτοια θεώρηση προκύπτει ένα σημαντικό πρόβλημα. Ένα σωματίδιο, όπως το αντιλαμβάνονται οι κλασικοί φυσικοί, είναι κάτι του οποίου η θέση στο χώρο ήταν αυστηρά προσδιορισμένη. Αντίθετα, ένα κύμα εκτείνεται στο χώρο. Ένα σωματίδιο με κυματική συμπεριφορά πού βρίσκεται; Η απάντηση της κβαντικής θεωρίας, όσο κι αν μας σοκάρει, είναι:

«δεν μπορούμε να γνωρίζουμε πού ακριβώς βρίσκεται.»

Ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο που έχει κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή ορμή $\mathbf{p}$ παράλληλη στον άξονα των x. Σύμφωνα με την υπόθεση de Broglie και τη σχέση $\lambda = \dfrac{h}{p}$, εάν γνωρίζουμε επακριβώς την ορμή του σωματιδίου αυτό θα συνδέεται και με ένα κύμα με επακριβώς ορισμένο μήκος κύματος λ. Η εξίσωση που περιγράφει το στιγμιότυπο ενός τέτοιου κύματος στο χώρο τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $\psi = A\,\eta\mu\left(\dfrac{2\pi x}{\lambda}\right)$ και η γραφική της παράσταση είναι αυτή του σχήματος 7.9.

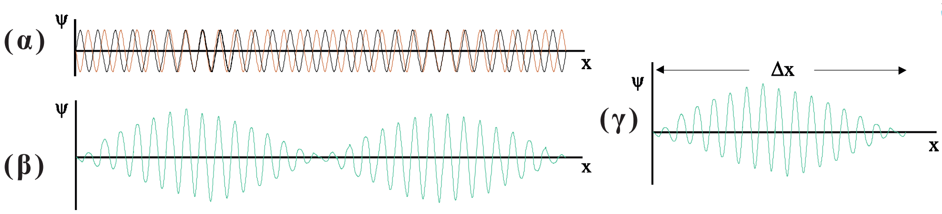


Η αβεβαιότητα της θέσης, Δx , είναι άπειρη.
Σχήμα 7-9.

Werner Heisemberg (1901-1976) Γερμανία. Σε ηλικία περίπου είκοσι χρονών ολοκλήρωσε τη βασική του εργασία για την κβαντική θεωρία. Βραβείο Νόμπελ για την αρχή της αβεβαιότητας το 1932.
Εικόνα 7-6.

Το στιγμιότυπο εκτείνεται από το $-\infty$ στο $+\infty$. Πού βρίσκεται το σωματίδιο που είναι συνδεδεμένο με αυτό το κύμα; Μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε.

Για να μη καταστρέψουμε εντελώς τη σωματιδιακή εικόνα χρειαζόμαστε κύματα περιορισμένα στο χώρο. Θα ονομάζουμε αυτά τα κύματα **κυματοπακέτα**. Μπορούμε να φτιάξουμε και να περιγράψουμε μαθηματικά οποιαδήποτε κυματομορφή με τη μέθοδο της υπέρθεσης συνδυάζοντας κατάλληλα διάφορα κύματα με επιλεγμένα μήκη κύματος πλάτη και φάσεις. Υπάρχει όμως κάποιος περιορισμός. Όσο πιο εντοπισμένο στο χώρο (πιο σωματιδιακό) θέλουμε να είναι το κυματοπακέτο τόσο περισσότερα και πιο διασκορπισμένα μήκη κύματος πρέπει να χρησιμοποιήσουμε (σχ. 7.10). Πληρώνουμε δηλαδή τον εντοπισμό της θέσης του σωματιδίου-κύματος με απροσδιοριστία στο μήκος κύματος που του αντιστοιχίζουμε και - κατ' επέκταση - στην ορμή του $\left(p = \dfrac{h}{\lambda}\right)$.



(α) Οι κόκκινες και οι μαύρες γραμμές δείχνουν κύματα με πολύ μικρή διαφορά στο μήκος κύματός τους. Η υπέρθεσή τους δίνει το κύμα (β) (διακρότημα). Με την υπέρθεση μεγάλου αριθμού κυμάτων μπορούμε να συνθέσουμε ένα κυματοπακέτο, όπως αυτό του σχήματος (γ), με περιορισμένη αβεβαιότητα Δx ως προς τη θέση του στο χώρο.
Σχήμα 7-10.

Η αδυναμία μας να προσδιορίσουμε επακριβώς ταυτόχρονα τη θέση και την ορμή ενός σωματιδίου δεν οφείλεται σε πειραματικές ατέλειες. Είναι σύμφυτη με την ίδια την κβαντική δομή της ύλης.

Ο Heisemberg το 1927 κωδικοποίησε τα παραπάνω διατυπώνοντας την **αρχή της αβεβαιότητας** (ή απροσδιοριστίας) με τη σχέση:

$$\boxed{\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \frac{h}{2\pi}}$$

Δεν είναι δυνατόν να μετρήσουμε ταυτόχρονα και τη θέση και την ορμή ενός σωματιδίου με απεριόριστη ακρίβεια.

Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι τα σύμβολα Δx και Δp_x δε σημαίνουν τη μεταβολή των μεγεθών αλλά το εύρος της αβεβαιότητας με την οποία γνωρίζουμε τα μεγέθη. Ανάλογες σχέσεις ισχύουν και για τις άλλες διευθύνσεις $\left(\Delta p_y \cdot \Delta y \geq \frac{h}{2\pi},\ \Delta p_z \cdot \Delta z \geq \frac{h}{2\pi}\right)$.

Μία άλλη διατύπωση της αρχής της αβεβαιότητας του Heisemberg είναι η

$$\boxed{\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}}$$

Η αβεβαιότητα στη μέτρηση της ενέργειας μιας κατάστασης ενός συστήματος είναι αντίστροφα ανάλογη με τον χρόνο που το σύστημα παραμένει σ' αυτή την κατάσταση.

Δηλαδή όλες οι μετρήσεις ενέργειας περιέχουν μια αβεβαιότητα, εκτός αν διαθέτουμε για τη μέτρηση άπειρο χρόνο.

Σε ένα διεγερμένο άτομο ένα ή περισσότερα ηλεκτρόνια δε βρίσκονται στη θεμελιώδη τους κατάσταση, αλλά σε κατάσταση μεγαλύτερης ενέργειας. Όταν ένα τέτοιο ηλεκτρόνιο μεταπηδήσει στη θεμελιώδη του κατάσταση, εκπέμπει ένα φωτόνιο ενέργειας hf, ίσης με τη διαφορά ενέργειας των δύο καταστάσεων στις οποίες βρέθηκε.

Ένα διεγερμένο άτομο εκπέμπει ακτινοβολία όταν ένα ή περισσότερα ηλεκτρόνια που δεν βρίσκονται στη θεμελιώδη κατάσταση επιστρέψουν σ' αυτή. Σε κάθε τέτοιο «κβαντικό άλμα» εκπέμπεται ένα φωτόνιο. Η μελέτη των φασμάτων εκπομπής δείχνει ότι οι φασματικές γραμμές δεν είναι αυστηρά καθορισμένες αλλά η κάθε μια εμφανίζει ένα φυσικό εύρος. Το εύρος των φασματικών γραμμών μπορεί να εξηγηθεί με την αρχή της αβεβαιότητας.

Ένα διεγερμένο άτομο μπορεί να εκπέμψει ένα φωτόνιο οποιαδήποτε στιγμή στο χρονικό διάστημα από μηδέν μέχρι άπειρο. Ο μέσος χρόνος στον οποίο ένας μεγάλος αριθμός διεγερμένων ατόμων εκπέμπει ακτινοβολία είναι της τάξης του 10^{-8} s.

Από τη σχέση $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$ και επειδή $\Delta E = h\ \Delta f$ προκύπτει

$$h\Delta f \geq \frac{h}{2\pi\ \Delta t} \quad \text{και} \quad \Delta f \geq \frac{1}{2\pi\ \Delta t}$$

θέτοντας όπου $\Delta t = 10^{-8}\mathrm{s}$ έχουμε

$$\Delta f \geq 1{,}6 \times 10^7\ Hz$$

όπου $1{,}6 \times 10^7\ Hz$ είναι το ελάχιστο εύρος της φασματικής γραμμής.

Παράδειγμα 7.4

Ένα ηλεκτρόνιο κινείται με ταχύτητα $3 \times 10^5\ m/s$ μετρημένη με ακρίβεια $0{,}1\%$. Με ποια ακρίβεια μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση του; Εάν στη θέση του ηλεκτρονίου έχουμε μια μπάλα του γκολφ που έχει μάζα $45\ g$ και κινείται με ταχύτητα $20\ m/s$, μετρημένη με την ίδια ακρίβεια, με ποια ακρίβεια μπορούμε να υπολογίσουμε τη θέση της;

Απάντηση :

α) $p_x = m_e \upsilon_x = \left(9{,}11\times 10^{-31} kg\right)\cdot\left(3\times 10^5 m/s\right) = 27{,}33\times 10^{-26} kg\cdot m/s$

Η αβεβαιότητα Δp_x θα είναι το $0{,}1\ \%$ της παραπάνω τιμής δηλαδή $27{,}33\times 10^{-29}\ kg\cdot m/s$.

Η αβεβαιότητα Δx στη θέση θα είναι το λιγότερο

$$\Delta x = \frac{h}{2\pi\cdot\Delta p_x} = \frac{6{,}626\times 10^{-34}\ J/s}{6{,}28\cdot 27{,}33\times 10^{-29}\ kg\cdot m/s} = 0{,}38\times 10^{-4}\ m.$$

Για τις διαστάσεις του ηλεκτρονίου η αβεβαιότητα θέσης είναι τεράστια. Πρόκειται για ένα ηλεκτρόνιο που δεν θα το βρούμε ποτέ. Είναι σα να ψάχνεις ψύλλους στ' άχυρα.

β) Με την ίδια διαδικασία, για το μπαλάκι του γκολφ βρίσκουμε αβεβαιότητα ως προς τη θέση $\Delta x \cong 1{,}16\times 10^{-27}\ m$.

Για ένα σώμα των διαστάσεων της μπάλας του γκολφ η αβεβαιότητα αυτή είναι μηδαμινή. Πρακτικά γνωρίζουμε με ακρίβεια τη θέση του.

7.7. Κυματοσυνάρτηση και Εξίσωση Schrödinger (Σρέντινγκερ)

Είδαμε ότι ένα υποατομικό σωματίδιο, για παράδειγμα ένα ηλεκτρόνιο, δε μπορεί να περιγραφεί σαν υλικό σημείο, με τρεις συντεταγμένες στο χώρο. Υπό ορισμένες συνθήκες συμπεριφέρεται σαν κύμα. Για την περιγραφή του χρειαζόμαστε μία **κυματοσυνάρτηση** σε αναλογία με την εξίσωση κύματος που χρησιμοποιούμε για την περιγραφή ενός μηχανικού ή ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Την κυματοσυνάρτηση αυτή θα τη συμβολίζουμε με Ψ .

Η κυματοσυνάρτηση είναι μία συνάρτηση της θέσης και του χρόνου $\Psi = \Psi\ (x, y, z, t)$.

Στα μηχανικά κύματα η εξίσωση κύματος μάς δίνει για κάθε χρονική στιγμή τη θέση κάθε σημείου του υλικού μέσου στο οποίο διαδίδεται το κύμα. Στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα οι εξισώσεις κύματος που τα περιγράφουν μας δίνουν για κάθε χρονική στιγμή την τιμή της έντασης του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου σε κάθε σημείο του χώρου στον οποίο διαδίδεται το κύμα. Η κυματοσυνάρτηση $\mathit{\Psi}$ όμως που περιγράφει ένα σωματίδιο-κύμα δεν σχετίζεται με κάποιο μέσον διάδοσης ούτε με κάποιες ιδιότητες του χώρου. Είναι δύσκολο να της αποδώσουμε κάποια φυσική σημασία. Μπορούμε μόνο να περιγράψουμε πώς σχετίζεται με τα φυσικά παρατηρούμενα φαινόμενα.

Για κάποιο συγκεκριμένο σημείο, ορισμένη χρονική στιγμή η κυματοσυνάρτηση θα έχει μια συγκεκριμένη τιμή. Ο Max Born πρότεινε να ερμηνεύσουμε το τετράγωνο του μέτρου της κυματοσυνάρτησης σαν την πιθανότητα θέσης ανά μονάδα όγκου. Δηλαδή, αν ορίσουμε έναν στοιχειώδη όγκο dV γύρω από ένα συγκεκριμένο σημείο (x, y, z) **το γινόμενο $|\Psi|^2 dV$ δίνει την πιθανότητα να βρίσκεται το σωμάτιο μέσα στον όγκο dV στη δεδομένη χρονική στιγμή.**

Αν χωρίσουμε το σύνολο του χώρου σε στοιχειώδεις όγκους dV και σε κάθε σημείο του χώρου βρούμε την τιμή της Ψ για κάποια χρονική στιγμή το άθροισμα των γινομένων $|\Psi|^2 dV$ πρέπει να είναι ίσο με τη μονάδα.

$$\boxed{\sum |\Psi|^2 dV = 1}$$

Δηλαδή η πιθανότητα να βρίσκεται το σωματίδιο κάπου στο χώρο είναι ίση με τη μονάδα. Με απλά λόγια κάθε χρονική στιγμή το σωματίδιο σίγουρα βρίσκεται κάπου. Η παραπάνω σχέση προκύπτει από την διάσταση που έδωσε ο Born στο $|\Psi|^2$ και ονομάζεται **συνθήκη κανονικοποιήσεως**. Εάν η κυματοσυνάρτηση είναι σωστή πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη κανονικοποιήσεως.

Max Born (1882-1970). Γερμανία. Μεγάλος θεωρητικός φυσικός. Χρησιμοποίησε τις πιθανότητες για να ερμηνεύσει φαινόμενα της κβαντικής μηχανικής. Το 1933 εγκατέλειψε τη Γερμανία αρχικά για το Εδιμβούργο και στη συνέχεια για τις Ηνωμένες Πολιτείες. Νόμπελ 1954.

Εικόνα 7-7.

Πώς βρίσκουμε όμως μία κυματοσυνάρτηση;

Την απάντηση έδωσε ο Erwin Schrödinger διατυπώνοντας την περίφημη εξίσωσή του της οποίας λύση είναι η Ψ.

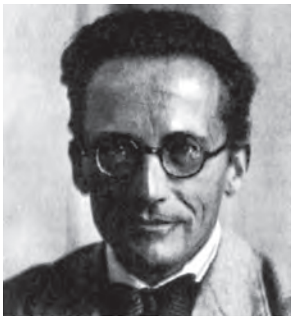
Για ένα σωματίδιο που κινείται πάνω στον άξονα των x σε μία περιοχή όπου υπάρχει ένα συντηρητικό πεδίο, για κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή η εξίσωση Schrödinger έχει τη μορφή :

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + U(x)\cdot\Psi(x) = E\cdot\Psi(x)} \qquad (7.6)$$

$\hbar$	(διαβάζεται h-bar) η συντομογραφία του $h/2\pi$,
m	η μάζα ηρεμίας του σωματιδίου,
$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}$	η δεύτερη παράγωγος της κυματοσυνάρτησης ως προς x,
$U(x)$	η δυναμική ενέργεια του σωματιδίου λόγω της θέσης του
E	η ολική ενέργεια του σωματιδίου.

Η λύση της εξίσωσης αυτής είναι η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου.

Εφόσον το σωματίδιο είναι περιορισμένο να κινείται πάνω στον άξονα των x η κυματοσυνάρτησή του πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη $\sum |\Psi|^2 dx = 1$ δηλαδή το σωμάτιο σίγουρα βρίσκεται κάπου στον άξονα των x.



Erwin Schrödinger (1877-1961). Γεννήθηκε στη Βιέννη από Αυστριακό πατέρα και Αγγλίδα μητέρα. Καλλιεργημένη και καλλιτεχνική φύση είχε το ταλέντο να παρουσιάζει τις απόψεις του με γοητευτικό τρόπο. Δίδαξε στη Ζυρίχη, όπου διατύπωσε και την περίφημη εξίσωσή του, στο Βερολίνο, στην Οξφόρδη και στο Δουβλίνο. Στο τέλος της ζωής του επέστρεψε στη Βιέννη. Μοιράστηκε με τον P.A.M. Dirac το Νόμπελ Φυσικής το 1933.

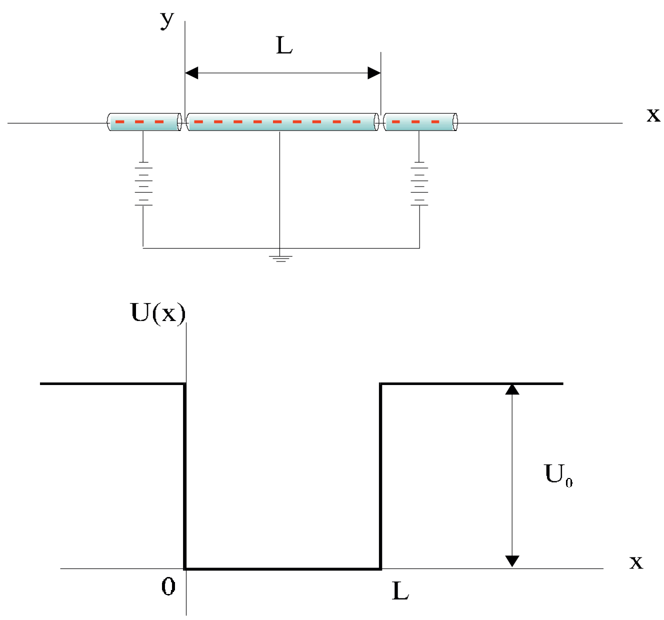
Εικόνα 7-8.

7.8. Σωματίδιο Παγιδευμένο σε Πηγάδι Δυναμικού

Σωματίδιο παγιδευμένο σε πηγάδι δυναμικού είναι ένα σωματίδιο που λόγω εξωτερικών δυνάμεων είναι παγιδευμένο σε μία περιοχή του χώρου. Αν θεωρήσουμε για παράδειγμα σαν σωμάτιο ένα ηλεκτρόνιο, τέτοιου είδους παγίδες είναι τα άτομα. Η διάταξη του σχήματος 7.11 μας δίνει μια πιο χειροπιαστή εικόνα του τι είναι ένα πηγάδι δυναμικού.

(α)

(β)



(α) Η διάταξη αυτή περιορίζει τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του αγωγού σ' ένα μήκος L πάνω στον άξονα των x. (β) Το πηγάδι δυναμικού που δημιουργεί η διάταξή μας. Τα ελεύθερα ηλεκτρόνια που βρίσκονται στα όρια του L έχουν δυναμική ενέργεια, $U=0$ ενώ έξω από τα όρια του L δυναμική ενέργεια $U \neq 0$. Για να βγει ένα ηλεκτρόνιο από το πηγάδι πρέπει να έχει κινητική ενέργεια μεγαλύτερη από το βάθος του πηγαδιού U_0. Στην πράξη το πηγάδι δυναμικού που δημιουργεί η διάταξή μας έχει στρογγυλεμένα χείλη και τοιχώματα που γέρνουν ελαφρά προς τα έξω.

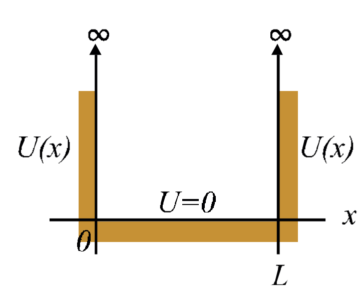
Σχήμα 7-11.

α) Πηγάδι Δυναμικού Απείρου Βάθους

Έστω ότι έχουμε ένα ηλεκτρόνιο που κινείται μόνο κατά τη διεύθυνση των x και είναι παγιδευμένο σ' ένα πηγάδι δυναμικού άπειρου βάθους όπως στο σχήμα 7.12. Αυτό σημαίνει ότι εάν το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στο διάστημα $0 \leq x \leq L$ έχει δυναμική ενέργεια $U = 0$ ενώ αν $x<0$ ή $x>L$ η δυναμική ενέργεια απειρίζεται. Με τους παραπάνω περιορισμούς η λύση της εξίσωσης (7.6) είναι

$$\Psi(x)=0 \quad \text{αν} \quad x<0 \text{ ή } x>L \quad \text{και}$$

$$\Psi(x)=A\eta\mu\frac{n\pi x}{L} \quad \text{για} \quad 0 \leq x \leq L \quad \text{όπου} \quad n=1,2,3,........$$



Σχήμα 7-12.

Η $\Psi(x)$ είναι η κυματοσυνάρτηση που περιγράφει το ηλεκτρόνιό μας για κάποια δεδομένη χρονική στιγμή.

Το μήκος κύματος της ημιτονοειδούς αυτής μορφής μπορεί να πάρει τις τιμές

$$\lambda = \frac{2L}{n}\left(n = 1, 2, 3, ...\right)$$

Αν θέσουμε τις τιμές του λ που βρήκαμε στη σχέση $p = \frac{h}{\lambda}$ προκύπτει

$$\boxed{p = \frac{nh}{2L}} \qquad (7.7)$$

Βλέπουμε ότι η ορμή του ηλεκτρονίου δεν μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή αλλά τιμές που είναι ακέραια πολλαπλάσια της ποσότητας $h/2L$. Δηλαδή η ορμή είναι κβαντισμένη.

Κάτι αντίστοιχο συμβαίνει και με την ενέργεια του ηλεκτρονίου που μπορεί να είναι μόνο κινητική. $E = K = \frac{p^2}{2m_e}$

Αντικαθιστώντας στη σχέση αυτή την ορμή από την (7.7) βρίσκουμε

$$\boxed{E = n^2\frac{h^2}{8m_e L^2}} \qquad (7.8)$$

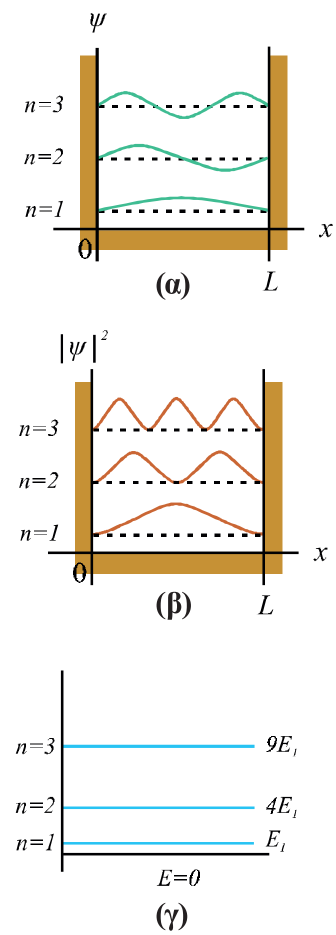
Η ενέργεια του ηλεκτρονίου μας είναι υποχρεωτικά κβαντισμένη.

Ας δούμε τώρα αν μπορούμε να εντοπίσουμε τη θέση του ηλεκτρονίου.

Είδαμε ότι, σύμφωνα με την παραδοχή του Born, το τετράγωνο του μέτρου της κυματοσυνάρτησης είναι η πιθανότητα θέσης ανά μονάδα όγκου. Στο πρόβλημα που μελετάμε το ηλεκτρόνιο κινείται μόνο στη διεύθυνση του άξονα των x. Άρα το $|\Psi(x)|^2$ θα είναι η πιθανότητα θέσης ανά μονάδα μήκους για τη δεδομένη στιγμή που εξετάζουμε.

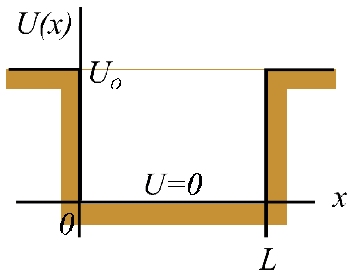
β) Πηγάδι Πεπερασμένου Βάθους

Έστω ότι το ηλεκτρόνιο της προηγούμενης παραγράφου είναι εγκλωβισμένο σ' ένα πηγάδι πεπερασμένου βάθους (σχ. 7.14). Τώρα, αν το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στο διάστημα $[0\text{-}L]$ έχει δυναμική ενέργεια $U = 0$, αν βρίσκεται έξω από το διάστημα $[0\text{-}L]$ έχει δυναμική ενέργεια U_0. Το ηλεκτρόνιο που εξετάζουμε έχει ενέργεια μικρότερη από U_0. Με αυτές τις οριακές συνθήκες, η 7.6, για $0 \le x \le L$, έχει μια ημιτονοειδή λύση ανάλογη με αυτή που βρήκαμε στο πηγάδι άπειρου βάθους. Για $x < 0$ και $x > L$, όμως, δεν προκύπτει $\Psi(x) = 0$, όπως πριν, αλλά μία εκθετικά φθίνουσα συνάρτηση του x. Τελικά η κυματοσυνάρτηση έχει μία μορφή σαν αυτήν του σχήματος 7.15 .

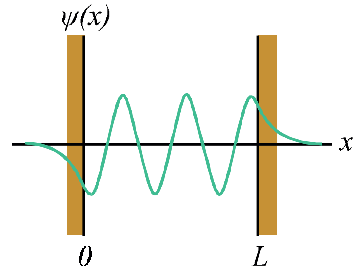


(α) Γραφικές παραστάσεις της $\Psi(x)$ για τους τρεις πρώτους κβαντικούς αριθμούς. (β) Οι αντίστοιχες παραστάσεις για το $|\Psi(x)|^2$. Η τιμή του $|\Psi(x)|^2$ για κάθε σημείο δείχνει την πιθανότητα να βρεθεί το ηλεκτρόνιο σ' ένα στοιχειώδες dx γύρω από το σημείο αυτό. (γ) Οι αντίστοιχες ενεργειακές στάθμες του ηλεκτρονίου. Η απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικές στάθμες δεν είναι σταθερή, μεγαλώνει όσο αυξάνει το n.

Σχήμα 7-13.



Σχήμα 7-14.

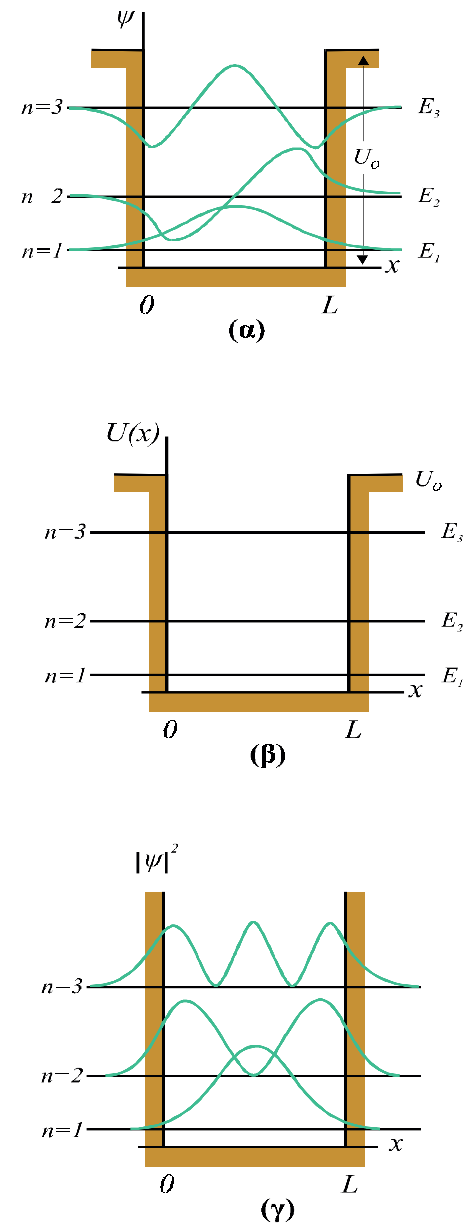


Σχήμα 7-15.

Και στην περίπτωση του πηγαδιού πεπερασμένου βάθους οι καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί το ηλεκτρόνιο είναι διακριτές (κβαντισμένες). Εκεί που μας περιμένει μία κβαντική έκπληξη είναι στη γραφική παράσταση του $\left|\Psi(x)\right|^2$ συναρτήσει του x. Βλέπουμε ότι το $\left|\Psi(x)\right|^2$ δε μηδενίζεται αμέσως για $x<0$ και $x>L$. Δηλαδή ακόμη κι αν το ηλεκτρόνιο δεν έχει την απαιτούμενη κινητική ενέργεια για να βγει από το πηγάδι, σύμφωνα με τις προβλέψεις της κλασικής θεωρίας, υπάρχει κάποια πιθανότητα να βρεθεί έξω απ' αυτό.

Ας συνοψίσουμε όσα έχουμε μάθει μέχρι τώρα :

1. Το ηλεκτρόνιο - αντίθετα με ό,τι προβλέπει η κλασική θεωρία - δε μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή ενέργειας ή ορμής όταν βρίσκεται μέσα στο πηγάδι.
2. **Το ηλεκτρόνιο δεν ηρεμεί μέσα στην παγίδα του.** Η χαμηλότερη στάθμη κινητικής ενέργειας στην οποία μπορεί να βρεθεί αντιστοιχεί σε $n=1$ και είναι διάφορη του μηδενός. Είναι κάτι που έρχεται σε αντίθεση με την κλασική θεωρία.
3. **Το ηλεκτρόνιο είναι πιθανότερο να βρεθεί σε ορισμένα τμήματα της παγίδας απ' ό,τι σε άλλα.** Αν βρίσκεται στη θεμελιώδη κατάσταση ($n=1$) (αναφέρεται και σαν εδαφική κατάσταση) είναι πολύ πιθανότερο να βρεθεί γύρω από το μέσον της παγίδας παρά κοντά στα άκρα της. Μόνο για ψηλές ενεργειακές στάθμες η πιθανότητα να βρίσκεται σε κάποια θέση κατανέμεται πιο ομοιόμορφα και συγκλίνει στην άποψη της κλασικής θεωρίας που θεωρεί όλες τις θέσεις εξίσου πιθανές.
4. **Το ηλεκτρόνιο μπορεί να διαφύγει από την παγίδα του.** Εάν το πηγάδι του δυναμικού δεν έχει άπειρο βάθος το ηλεκτρόνιο έχει κάποια πιθανότητα (μικρή αλλά όχι μηδενική) να βρεθεί έξω από το πηγάδι κι ας μην έχει την θεωρητικά απαιτούμενη ενέργεια για να συμβεί αυτό. Η πιθανότητα αυτή μεγαλώνει όσο το ηλεκτρόνιο βρίσκεται σε ψηλότερη ενεργειακή στάθμη.



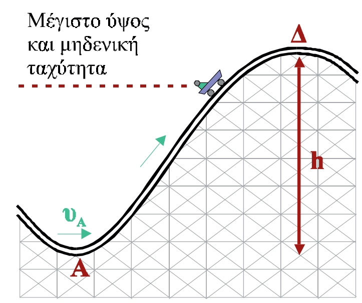
(α) Γραφικές παραστάσεις της $\Psi(x)$ για τους τρεις πρώτους κβαντικούς αριθμούς. (β) Οι αντίστοιχες ενεργειακές στάθμες του ηλεκτρονίου. (γ) Οι αντίστοιχες παραστάσεις για το $\left|\Psi(x)\right|^2$. Η τιμή του $\left|\Psi(x)\right|^2$ για κάθε σημείο δείχνει την πιθανότητα να βρεθεί το ηλεκτρόνιο σ' ένα στοιχειώδες dx γύρω από το σημείο αυτό. Βλέπουμε ότι οι καμπύλες εκτείνονται και έξω από τα όρια του πηγαδιού.

Σχήμα 7-16.

7.9. Το Φαινόμενο Σήραγγας

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε το παράδοξο ότι αν εγκλωβίσουμε ένα ηλεκτρόνιο μέσα σ' ένα πηγάδι δυναμικού υπάρχει η πιθανότητα να βρεθεί έξω από το πηγάδι. Είναι σαν να κλείνουμε ένα μπαλάκι σ' ένα κουτί κι αυτό, μερικές φορές, να βρίσκεται απ' έξω.

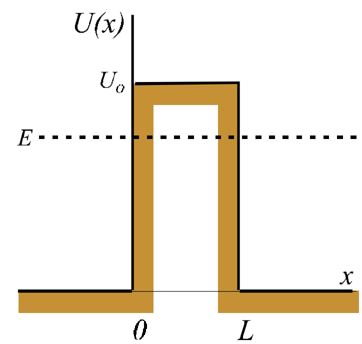
Ένα αντίστοιχο φαινόμενο είναι το φαινόμενο σήραγγας. Εδώ το ηλεκτρόνιο βρίσκεται αντιμέτωπο με ένα φράγμα δυναμικού ψηλότερο από την ενέργειά του. Σύμφωνα με την κλασική θεωρία το ηλεκτρόνιο θα ανακλαστεί και θα επιστρέψει πίσω. Η κβαντική θεωρία, όμως, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι, μερικές φορές, το ηλεκτρόνιο διαπερνάει το φράγμα. Η θεωρητική αυτή πρόβλεψη επιβεβαιώνεται πειραματικά. Είναι σαν να πετάμε ένα μπαλάκι σ' ένα τζάμι και κάποιες φορές το μπαλάκι να βρίσκεται από την άλλη μεριά χωρίς να σπάσει το τζάμι. Τέτοια φαινόμενα βέβαια δε συμβαίνουν ποτέ με σώματα όπως ένα μπαλάκι, συμβαίνουν όμως με σωματίδια όπως ένα ηλεκτρόνιο.



Όταν $E < U_Δ$ το τραινάκι δεν μπορεί να υπερπηδήσει το φράγμα δυναμικού.

Σχήμα 7-17.

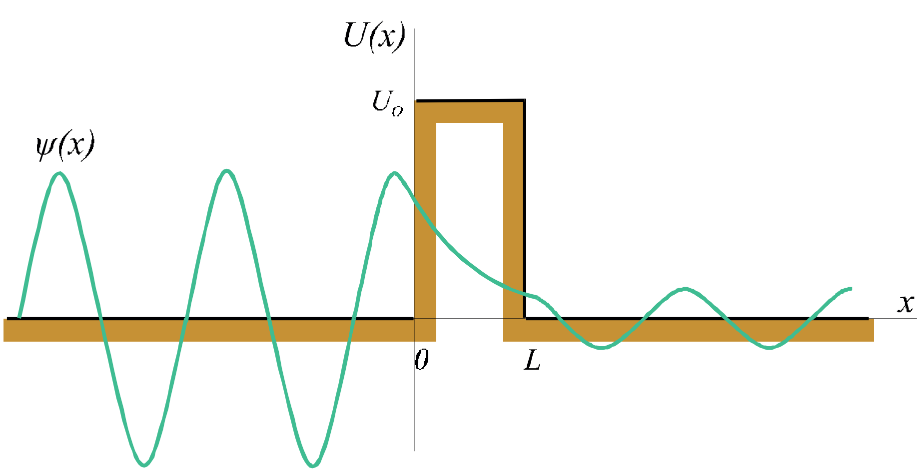
Ας δούμε πρώτα **τι είναι ένα φράγμα δυναμικού**. Ένα τρενάκι του λούνα παρκ (σχ. 7.17) έχει στο χαμηλότερο σημείο A της διαδρομής του ταχύτητα $υ_A$. Αν θεωρήσουμε ότι στο A η δυναμική ενέργεια του τρένου είναι μηδενική τότε η ολική του ενέργεια E θα είναι $E = K_A = \frac{1}{2}mυ_A^2$. Μπροστά στο τρενάκι βρίσκεται ένα ύψωμα ύψους h σε σχέση με το σημείο A. Εάν το τρενάκι καταφέρει να βρεθεί στην κορυφή $Δ$ του υψώματος θα έχει δυναμική ενέργεια $U_Δ = mgh$. Ένα τέτοιο ύψωμα σαν αυτό που βρίσκεται μπροστά στο τρενάκι μπορεί να χαρακτηρισθεί σαν ένα φράγμα δυναμικού ύψους mgh. Εάν δεν υπάρχουν τριβές και $E \geq U_Δ$ τότε το τρενάκι θα υπερπηδήσει το ύψωμα και θα συνεχίσει την πορεία του. Εάν $E < U_Δ$ το τρενάκι θα φτάσει μέχρι ένα ύψος μικρότερο του h, η ταχύτητά του θα μηδενιστεί και θα κυλήσει προς τα πίσω. Αντίστοιχα φράγματα δυναμικού μπορούμε να υλοποιήσουμε και στο ηλεκτρικό πεδίο, όπου το ρόλο του τρένου θα παίζει ένα ηλεκτρόνιο και το φράγμα δυναμικού θα αντιστοιχεί σε δυναμική ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου. (σχ. 7.18).



Φράγμα δυναμικού ύψους U_0. Ένα ηλεκτρόνιο ενέργειας $E<U_0$ σύμφωνα με την κλασική θεωρία δεν μπορεί να περάσει από τη μία πλευρά του φράγματος στην άλλη .

Σχήμα 7-18.

Η λύση της (7.6) αν λάβουμε υπόψη τους περιορισμούς που επιβάλλει το φράγμα δυναμικού δηλαδή $U = 0$ για $x < 0$ και $x > L$ και $U = U_0$ για $0 \leq x \leq L$, είναι της μορφής του σχήματος 7.19.



Αριστερά και δεξιά του φράγματος η κυματοσυνάρτηση είναι ημιτονοειδής ενώ στο εσωτερικό του εκθετική φθίνουσα.

Σχήμα 7-19.

Βλέπουμε ότι η κυματοσυνάρτηση υπάρχει και δεξιά του φράγματος αν και με αισθητά μικρότερο πλάτος. Αυτό σημαίνει μικρότερη πιθανότητα ύπαρξης του ηλεκτρονίου δεξιά του φράγματος απ' ό,τι αριστερά.

Η πιθανότητα εμφάνισης του ηλεκτρονίου δεξιά του φράγματος εξαρτάται από την ενέργειά του E και το εύρος του φράγματος L. Πιο συγκεκριμένα, η πιθανότητα γίνεται μεγαλύτερη αν αυξηθεί η ενέργεια του ηλεκτρονίου (παραμένοντας μικρότερη από το ύψος του φράγματος U_0) και αν ελαττωθεί το εύρος του φράγματος.

Το φαινόμενο σήραγγας έχει πολλές εφαρμογές.

Ο χαλκός οξειδώνεται. Ένα γυμνό σύρμα από χαλκό καλύπτεται από ένα λεπτό στρώμα οξειδίου του χαλκού που είναι μονωτής. Όμως, όλοι γνωρίζουμε ότι η επαφή δυο χάλκινων συρμάτων είναι αγώγιμη. Πώς μπορούν τα ηλεκτρόνια και περνούν από το ένα σύρμα στο άλλο; Με το φαινόμενο σήραγγας.

Κατά τη ραδιενεργό διάσπαση άλφα, ο πυρήνας εκπέμπει ένα σωμάτιο άλφα (πυρήνας του στοιχείου ήλιον). Για να διαφύγει το σωμάτιο άλφα από τον πυρήνα πρέπει να διαπεράσει ένα φράγμα δυναμικού που οφείλεται στις ελκτικές πυρηνικές δυνάμεις και στην απωστική δύναμη Coulomb ανάμεσα σε αυτό και στον υπόλοιπο πυρήνα. Σποραδικά, κάποιο σωμάτιο άλφα κατορθώνει να διαπεράσει αυτό το φράγμα.

Μια πυρηνική αντίδραση σύντηξης πραγματοποιείται όταν δύο πυρήνες έρθουν πολύ κοντά ώστε οι ισχυρές πυρηνικές τους δυνάμεις μπορέσουν να τους κάνουν να συσσωματωθούν και να προκαλέσουν τη σύντηξη. Το πλησίασμα όμως των πυρήνων παρεμποδίζεται από τις απωστικές δυνάμεις Coulomb που τείνουν να τους απομακρύνουν. Για να επιτευχθεί η σύντηξη οι δύο πυρήνες πρέπει να διαπεράσουν το φράγμα που δημιουργείται από τις απωστικές δυνάμεις. Αυτό συμβαίνει στον Ήλιο και σε όλα τα άλλα αστέρια.

Το φαινόμενο σήραγγας βρίσκει επίσης εφαρμογή στις διόδους σήραγγας, στο ηλεκτρονικό μικροσκόπιο σήραγγας και αλλού.

Σύνοψη

Το μέλαν σώμα είναι το ιδεατό εκείνο σώμα το οποίο απορροφά όλη την ακτινοβολία η οποία προσπίπτει πάνω του.

Οι υποθέσεις που έκανε ο Planck στην προσπάθειά του να ερμηνεύσει την ακτινοβολία του μέλανος σώματος είναι:

Η ενέργεια των ταλαντούμενων ατόμων δεν μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Μπορεί να πάρει μόνο διακριτές (κβαντισμένες) τιμές. Οι τιμές της ενέργειας που μπορεί να έχει το ταλαντούμενο άτομο είναι

$$E_n = nhf$$

όπου n ένας θετικός ακέραιος αριθμός που ονομάζεται **κβαντικός αριθμός** f η συχνότητα ταλάντωσης του ατόμου και h η σταθερά του Planck $\left(h = 6,626 \times 10^{-34}\, J \cdot s\right)$.

Το ποσό της ενέργειας, υπό μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, που μπορεί να απορροφήσει ή να εκπέμψει ένα άτομο μπορεί να πάρει μόνο διακριτές τιμές.

Οι υποθέσεις αυτές αποτελούν το θεμέλιο της κβαντικής θεωρίας.

Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο είναι το φαινόμενο κατά το οποίο μία μεταλλική επιφάνεια απελευθερώνει ηλεκτρόνια στο περιβάλλον όταν πάνω της προσπίπτει φως.

Το ελάχιστο ποσό ενέργειας που απαιτείται να προσφερθεί σ' ένα ηλεκτρόνιο ενός υλικού για να δραπετεύσει από το υλικό λέγεται **έργο εξαγωγής** και συμβολίζεται με το φ.

Ο Einstein ερμήνευσε το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο με την παραδοχή ότι **το φως μεταφέρει την ενέργειά του σε μικρά πακέτα, που ονομάζονται κβάντα φωτός ή φωτόνια**.

Η ενέργεια κάθε φωτονίου είναι $E = hf$

Η κινητική ενέργεια ενός φωτοηλεκτρονίου κατά την έξοδό του από την κάθοδο είναι

$$K = hf - \phi \quad \textbf{(φωτοηλεκτρική εξίσωση Einstein)}$$

όπου h η σταθερά του Planck και λ του μήκους κύματος του φωτός.

Η ορμή κάθε φωτονίου είναι $p = \dfrac{h}{\lambda}$

Φαινόμενο Compton είναι το φαινόμενο κατά το οποίο η σκεδαζόμενη ακτινοβολία X από ένα υλικό έχει μεγαλύτερο μήκος κύματος από την προσπίπτουσα. Η διαφορά εξαρτάται από τη γωνία σκέδασης.

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)$$

Οποιοδήποτε σωμάτιο ορμής p είναι συνδεδεμένο με ένα κύμα, με μήκος κύματος λ που δίνεται από τη σχέση

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Η αρχή της αβεβαιότητας λέει ότι **δεν είναι δυνατόν να μετρήσουμε και τη θέση και την ορμή ενός σωματιδίου, ταυτόχρονα, με απεριόριστη ακρίβεια.**

Για ένα σωματίδιο που κινείται πάνω στον άξονα των x

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \frac{h}{2\pi}$$

Η αβεβαιότητα στη μέτρηση της ενέργειας μιας κατάστασης ενός συστήματος είναι αντίστροφα ανάλογη με τον χρόνο που το σύστημα παραμένει σ' αυτή την κατάσταση.

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$$

Κυματοσυνάρτηση Ψ είναι η συνάρτηση της θέσης και του χρόνου που περιγράφει ένα σωματίδιο - κύμα. Η κυματοσυνάρτηση είναι λύση της εξίσωσης Schrödinger.

Το τετράγωνο του μέτρου της κυματοσυνάρτησης $|\Psi|^2$ για συγκεκριμένο σημείο κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή είναι η **πιθανότητα εύρεσης του σωματιδίου ανά μονάδα όγκου** (πυκνότητα πιθανότητας). Η πιθανότητα να βρίσκεται το σωματίδιο κάπου στο χώρο είναι ίση με τη μονάδα

$$\sum |\Psi|^2 dV = 1$$ **(συνθήκη κανονικοποίησης)**

Πηγάδι δυναμικού είναι μια περιοχή του χώρου όπου αν βρεθεί ένα σωμάτιο θα έχει μικρότερη δυναμική ενέργεια απ' ότι σε οποιοδήποτε άλλο σημείο του περιβάλλοντος χώρου. Εάν η διαφορά της δυναμικής ενέργειας μεταξύ σημείων εκτός του πηγαδιού και εντός του πηγαδιού είναι U_0 και το σωμάτιο έχει κινητική ενέργεια μικρότερη του U_0 τότε το σωμάτιο παγιδεύεται στο πηγάδι.

-Το σωμάτιο δεν μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή ενέργειας ή ορμής όταν βρίσκεται μέσα στο πηγάδι.

-Το σωμάτιο δεν μπορεί να ηρεμεί μέσα στην παγίδα του.

-Το σωμάτιο είναι πιθανότερο να βρεθεί σε ορισμένα τμήματα της παγίδας απ' ότι σε άλλα.

-Το σωμάτιο είναι πιθανόν να βρεθεί και εκτός πηγαδιού.

Φαινόμενο σήραγγας είναι το φαινόμενο κατά το οποίο ένα σωμάτιο διαπερνά ένα φράγμα δυναμικού χωρίς να έχει την κλασικά απαιτούμενη ενέργεια γι' αυτό.

Ερωτήσεις

Μέλαν σώμα

7.1 Παρατηρώντας μία νύχτα τον ουρανό με ένα τηλεσκόπιο πώς μπορούμε να ξεχωρίζουμε τα άστρα που έχουν επιφανειακή θερμοκρασία μικρότερη από αυτήν του Ήλιου;

7.2 Υπάρχουν κβαντισμένες ποσότητες στην κλασική φυσική; Αν ναι, δώστε ένα παράδειγμα.

7.3 Τα ηλεκτρόνια και τα φωτόνια είναι σωμάτια. Σε τι διαφέρουν μεταξύ τους;

7.4 Μιλάμε για φωτόνια ερυθρού φωτός ή φωτόνια ιώδους φωτός. Μπορούμε να μιλήσουμε για φωτόνια λευκού φωτός;

Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

7.5 Πώς ερμηνεύεται το γεγονός ότι οι φωτοηλεκτρικές μετρήσεις εξαρτώνται από τη φύση της φωτοηλεκτρικής επιφάνειας;

7.6 Ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι ορθές;

α) Αν αυξήσουμε την ένταση μιας μονοχρωματικής δέσμης που προσπίπτει στην κάθοδο του φωτοκύτταρου αυξάνεται ο αριθμός των ηλεκτρονίων που εκπέμπονται σε ορισμένο χρόνο.

β) Ο αριθμός των εκπεμπόμενων φωτοηλεκτρονίων για ορισμένης έντασης φωτεινή μονοχρωματική δέσμη, εξαρτάται από το μήκος κύματος της δέσμης.

γ) Τα φωτοηλεκτρόνια βγαίνουν με μεγαλύτερη ταχύτητα όταν η συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας μεγαλώνει.

δ) Για να παρατηρηθεί το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο απαιτείται μονοχρωματική ακτινοβολία.

7.7 Οι επόμενες προτάσεις αφορούν στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο. Ποιες από αυτές είναι ορθές;

α) Η τάση αποκοπής εξαρτάται από τη συχνότητα της φωτεινής δέσμης και είναι μεγαλύτερη για την κίτρινη ακτινοβολία παρά για την πράσινη $\left(f_\kappa > f_\pi\right)$.

β) Η αύξηση της έντασης της δέσμης συνεπάγεται αύξηση της συχνότητας κατωφλίου.

γ) Η συχνότητα κατωφλίου εξαρτάται από το έργο εξαγωγής του μετάλλου και είναι μεγαλύτερη για το κάλιο $\left(\phi_K = 2,2\ eV\right)$ από ό,τι για το καίσιο $\left(\phi_{Cs} = 1,4\ eV\right)$.

δ) Η τάση αποκοπής εξαρτάται από το έργο εξαγωγής του μετάλλου και είναι μεγαλύτερη για το κάλιο $\left(\phi_K = 2,2\ eV\right)$ από ό,τι για το καίσιο $\left(\phi_{Cs} = 1,4\ eV\right)$.

ε) Τα φωτοηλεκτρόνια έχουν μεγαλύτερη κινητική ενέργεια όταν η κάθοδος φωτίζεται με κίτρινο φως από ό,τι όταν φωτίζεται με πράσινο φως $\left(f_\kappa > f_\pi\right)$.

στ) Η τάση αποκοπής εξαρτάται από την ενέργεια των φωτονίων της φωτεινής δέσμης και ελαττώνεται όταν φωτίζουμε την κάθοδο με φωτόνια μεγαλύτερης ενέργειας.

Φαινόμενο Compton

7.8 Συμπληρώστε τα κενά:

Το μήκος κύματος της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας X κατά το φαινόμενο Compton είναι ....από αυτό της προσπίπτουσας. Αυτό σημαίνει ότι τα σκεδαζόμενα .... είναι .... ενέργειας από τα προσπίπτοντα. Η διαφορά της ενέργειας των .... ισούται με την ενέργεια του ....

7.9 Δύο δέσμες ακτίνων X με μήκη κύματος λ_1 και λ_2 $\left(\text{με } \lambda_1 > \lambda_2\right)$ σκεδάζονται σε ηλεκτρόνια. Για την ίδια γωνία σκέδασης σε ποια από τις δύο περιπτώσεις αντιστοιχεί

α) μεγαλύτερο κύματος της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας

β) μεγαλύτερη τιμή της ενέργειας του ανακρουόμενου ηλεκτρονίου.

7.10 Η διαφορά μεταξύ των μηκών κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας Χ και της σκεδαζόμενης γίνεται μέγιστη όταν η γωνία μεταξύ της σκεδαζόμενης και της προσπίπτουσας δέσμης είναι

α) 0^o

β) 45^o

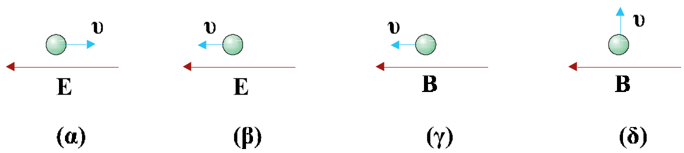
γ) 90^0

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.

Η κυματική φύση της ύλης

7.11 Ένα ηλεκτρόνιο, ένα σωμάτιο άλφα και ένα νετρόνιο κινούνται με ταχύτητες αρκετά μικρότερες από την ταχύτητα του φωτός και έχουν την ίδια κινητική ενέργεια. Σε ποιο από τα σωματίδια αντιστοιχεί το μεγαλύτερο και σε ποιο το μικρότερο μήκος κύματος de Broglie;

7.12 Στο σχήμα φαίνονται τέσσερις περιπτώσεις ηλεκτρονίων που κινούνται μέσα σε ηλεκτρικό ή μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Σε ποια ή σε ποιες περιπτώσεις το μήκος κύματος de Broglie α) μεγαλώνει; β) μικραίνει; γ) μένει ίδιο;



Σχήμα 7-20.

7.13 Η υπόθεση de Broglie ότι σε κάθε κινούμενο σώμα αντιστοιχεί ένα κύμα δεν έχει εφαρμογή στα φαινόμενα της καθημερινής ζωής. Αυτό συμβαίνει γιατί το αντίστοιχο μήκος κύματος

α) είναι πολύ μικρό ή

β) είναι πολύ μεγάλο;

Αρχή της αβεβαιότητας

7.14 Η αρχή της αβεβαιότητας δεν αφορά στην καθημερινότητά μας. Πού οφείλεται αυτό;

Ασκήσεις

Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο - Ορμή φωτονίων

7.15 Τα ηλεκτρόνια που βγαίνουν από την επιφάνεια ενός μετάλλου που φωτίζεται με μονοχρωματική ακτινοβολία μήκους κύματος 400nm έχουν κινητική ενέργεια 0,8eV. Με ποια ενέργεια εκπέμπονται φωτοηλεκτρόνια από την ίδια επιφάνεια με ακτινοβολία μήκους κύματος 500nm; Δίνονται $h = 6,626 \times 10^{-34} J \cdot s$, $c = 3 \times 10^{8}\ m/s$, $1\ eV = 1,6 \times 10^{-19} J$.

[Απ: 0,18 eV]

7.16 Φωτεινή ακτινοβολία μήκους κύματος *400 nm* προσπίπτει σε μεταλλική επιφάνεια. Αυτή εκπέμπει φωτοηλεκτρόνια που έχουν ταχύτητα $8 \times 10^{5} m/s$. Ποιο είναι το έργο εξαγωγής για το μέταλλο της καθόδου; Δίνονται $h = 6,626 \times 10^{-34} J \cdot s$, $c = 3 \times 10^{8}\ m/s$, $m_e = 9,1 \times 10^{-31}\ kg$, $1eV = 1,6 \times 10^{-19} J$.

[Απ: 1,3 eV]

7.17 Το έργο εξαγωγής για ένα μέταλλο είναι 1,8 eV. Ποιο θα είναι το δυναμικό αποκοπής για φως που έχει μήκος κύματος 400 nm; Δίνονται: $h = 6,626 \times 10^{-34} J \cdot s$, $c = 3 \times 10^{8}\ m/s$, $e = 1,6 \times 10^{-19} C$, $1eV = 1,6 \times 10^{-19} J$.

[Απ: 1,3 V]

7.18 Ποια από τα παρακάτω υλικά δίνουν φωτοηλεκτρόνια όταν φωτίζονται με ορατό φως (400-700 nm); Ταντάλιο (4,2 eV), Βολφράμιο (4,5 eV), Βάριο (2,5 eV), Λίθιο (2,3 eV). Στην παρένθεση αναφέρεται το έργο εξαγωγής του αντίστοιχου μετάλλου. Δίνονται: $h = 6,626 \times 10^{-34} J \cdot s$, $c = 3 \times 10^{8}\ m/s$, $1\ eV = 1,6 \times 10^{-19} J$.

[Απ: Βάριο και Λίθιο]

7.19 Το δυναμικό αποκοπής για μια μεταλλική επιφάνεια που φωτίζεται με φως μήκους κύματος 491 nm είναι 0,71 V. Όταν η ίδια επιφάνεια φωτιστεί με φως άλλου μήκους κύματος, το δυναμικό αποκοπής γίνεται 1,43 V. Να υπολογίσετε: α) το έργο εξαγωγής για το μέταλλο αυτό και β) το νέο μήκος κύματος. Δίνονται: $h = 6,626 \times 10^{-34} J \cdot s$, $c = 3 \times 10^{8}\ m/s$, $e = 1,6 \times 10^{-19} C$, $1\ eV = 1,6 \times 10^{-19} J$.

[Απ: 1,82 eV, 382 nm]

7.20 Η συχνότητα κατωφλίου για ένα μέταλλο είναι $5,6 \times 10^{14} Hz$. Να βρεθεί η κινητική ενέργεια με την οποία εγκαταλείπει το μέταλλο ένα φωτοηλεκτρόνιο όταν το μέταλλο φωτίζεται με φως συχνότητας $8,6 \times 10^{14} Hz$. Δίνονται $h = 6,626 \times 10^{-34} J \cdot s$, $1\,eV = 1,6 \times 10^{-19} J$

[Απ: 1,2 eV]

7.21 Μια λάμπα που έχει ισχύ 200 W, εκπέμπει ομοιόμορφα σε όλες τις διευθύνσεις μονοχρωματικό φως μήκους κύματος 600 nm.

Σε απόσταση 10 m από τη λάμπα και ακριβώς πίσω από κυκλικό άνοιγμα ακτίνας 20 mm βρίσκεται αισθητήρας. Πόσα φωτόνια φτάνουν στον αισθητήρα σε χρόνο 0,1 s;
Θα υποθέσετε ότι όλη η ενέργεια της λάμπας γίνεται φωτεινή ενέργεια. Δίνονται $c = 3\times10^{8}$ m/s και $h = 6,63\times10^{-34}$ Js.

[Απ: $6,03\times10^{3}$ φωτόνια]

7.22 Τι μήκος κύματος πρέπει να έχει μια ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία ώστε ένα φωτόνιό της να έχει την ίδια ορμή με ένα ηλεκτρόνιο που κινείται με ταχύτητα 2×10^{5} m/s;
Δίνονται: $c = 3\times10^{8}$ m/s, $h = 6,63\times10^{-34}$ Js, $m_e = 9,1\times10^{-31}$ kg.

[Απ: 3,64 nm]

7.23 Πόσα φωτόνια με μήκος κύματος λ = 663 nm πρέπει να προσκρούουν ανά δευτερόλεπτο κάθετα σε μια απόλυτα ανακλαστική επιφάνεια, ώστε να ασκήσουν σ’ αυτή δύναμη 1N.
Δίνεται $h = 6,63\times10^{-34}$ Js

[Απ: 5×10^{26} φωτόνια/s]

7.24 Επιφάνεια Ni, για το οποίο το έργο εξαγωγής είναι 5 eV, δέχεται υπεριώδη ακτινοβολία μήκους κύματος 200 nm. Ποιο το δυναμικό αποκοπής;
Δίνονται: $c = 3\times10^{8}$ m/s, $h = 6,63\times10^{-34}$ Js, $1\,eV = 1,6\times10^{-19}$ J.

[Απ: 1,2 V]

7.25 Το έργο εξαγωγής για το νάτριο είναι 2,7 eV. Ποιο είναι το μεγαλύτερο μήκος κύματος που μπορεί να προκαλέσει φωτοηλεκτρική εκπομπή από το νάτριο;
Δίνονται: $c = 3\times10^{8}$ m/s, $h = 6,63\times10^{-34}$ Js, $1\,eV = 1,6\times10^{-19}$ J.

[Απ: 460 nm]

7.26 Μια μεταλλική επιφάνεια φωτίζεται με φως μήκους κύματος $\lambda_1 = 550$ nm και εκπέμπει φωτοηλεκτρόνια για τα οποία το δυναμικό αποκοπής είναι $V_1 = 0,19$ V. Να υπολογίσετε:
α) το έργο εξαγωγής του μετάλλου.
β) το δυναμικό αποκοπής στην περίπτωση που η επιφάνεια φωτίζεται με ακτινοβολία μήκους κύματος $\lambda_2 = 190$ nm .
γ) τη συχνότητα κατωφλίου για το μέταλλο αυτό.
Δίνονται: $c = 3\times10^{8}$ m/s, $h = 6,63\times10^{-34}$ Js, $e = 1,6\times10^{-19}$ C, 1eV = $1,6\times10^{-19}$ J.

[Απ: 2,07 eV, 4,47V, 500×10^{12} Hz]

Φαινόμενο Compton

7.27 Φωτόνια μήκους κύματος 2,4 pm προσπίπτουν σε ελεύθερα ηλεκτρόνια. Να βρείτε το μήκος κύματος ενός φωτονίου που σκεδάστηκε α) κατά 30° και β) κατά 60°. Δίνονται: $h = 6,626\times10^{-34}\,J\cdot s$, $c = 3\times10^{8}$ m/s, $m_e = 9,1\times10^{-31}$ kg.

[Απ:2,7 pm, 3,6 pm]

7.28 Φωτόνιο ακτίνων Χ μήκους κύματος 10^{-11} m προσκρούει σε ηλεκτρόνιο μετωπικά και σκεδάζεται κατά 180^o. Υπολογίστε πόσο μεταβλήθηκε η ενέργεια του φωτονίου.

Δίνονται: $h = 6,626 \times 10^{-34} J \cdot s$, $c = 3 \times 10^8$ m/s, $m_e = 9,1 \times 10^{-31} kg$, $1\ eV = 1,6 \times 10^{-19}$ J.

[Απ: Μειώθηκε κατά 41,4 keV]

7.29 Μια δέσμη φωτονίων που έχουν ενέργεια 0,2 MeV σκεδάζεται από τα ηλεκτρόνια ενός στόχου από άνθρακα.

α) Ποιο είναι το μήκος κύματος των φωτονίων της δέσμης πριν τη σκέδαση;

β) Ποιο είναι το μήκος κύματος των φωτονίων που σκεδάζονται κατά γωνία 90^o σε σχέση με την αρχική τους διεύθυνση;

γ) Ποια είναι η ενέργεια ενός φωτονίου το οποίο έχει σκεδαστεί κατά γωνία 60^o σε σχέση με την αρχική του διεύθυνση;

Δίνονται: $c = 3 \times 10^8$ m/s, $h = 6,63 \times 10^{-34}$ Js, $1\ eV = 1,6 \times 10^{-19}$ J, $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg.

[Απ: $6,2 \times 10^{-12} m$, $8,6 \times 10^{-12} m$, $0,168 MeV$]

Κυματική φύση της ύλης

7.30 Να βρείτε το μήκος κύματος de Broglie που αντιστοιχεί

α) σε ηλεκτρόνιο $\left(m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{kg}\right)$ που κινείται με ταχύτητα 2×10^6 m/s.

β) σε πρωτόνιο $\left(m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{kg}\right)$ της ίδιας ταχύτητας.

γ) σε μπαλάκι $\left(m = 0,2 \text{ kg}\right)$ της ίδιας ταχύτητας.

Δίνεται $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J s.

[Απ: $3,6 \times 10^{-10} m$, $2 \times 10^{-13} m$, $1,65 \times 10^{-39} m$]

7.31 Ένα ηλεκτρόνιο επιταχύνεται από την ηρεμία με τάση 150 V. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος de Broglie του ηλεκτρονίου.
Δίνονται: $h = 6,626 \times 10^{-34} J \cdot s$, $e = 1,6 \times 10^{-19} C$, $m_e = 9,1 \times 10^{-31} kg$.

[Απ: $10^{-10} m$]

7.32 α) Ποια είναι η ενέργεια ενός φωτονίου με μήκος κύματος 1 nm;

β) Ποια είναι η κινητική ενέργεια ενός ηλεκτρονίου για το οποίο το μήκος κύματος de Broglie είναι 1 nm;

Δίνονται: $h = 6,626 \times 10^{-34} J \cdot s$, $m_e = 9,1 \times 10^{-31} kg$, $c = 3 \times 10^8\ m/s$, $1 eV = 1,6 \times 10^{-19}$ J.

[Απ: 1242 eV, 1,5 eV]

Αρχή της αβεβαιότητας

7.33 Αν υποθέσουμε ότι η σταθερά του Planck είχε την τιμή 0,6 J s, ποια θα ήταν η αβεβαιότητα θέσης για μια μπάλα μάζας 0,5 kg που κινείται με ταχύτητα 20 m/s αν η αβεβαιότητα της ορμής της είναι 1%;

Θα μπορούσαμε να πιάσουμε εύκολα αυτή τη μπάλα;

[Απ: $\Delta x \geq 0,96\ m$]

7.34 Το ηλεκτρόνιο ενός ατόμου του υδρογόνου παραμένει στην κατάσταση $n = 2$ - πριν μεταπέσει στην κατάσταση $n = 1$ - επί 10^{-8} s. Ποια είναι η αβεβαιότητα στην ενέργεια του εκπεμπόμενου φωτονίου;
Δίνεται: $h = 6,626 \times 10^{-34}\ J \cdot s$, $1eV = 1,6 \times 10^{-19}$ J.

[Απ: $0,66 \times 10^{-7} eV$]

7.35 Ένα σωματίδιο κινείται σε ευθεία, με ταχύτητα πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός. Αν η αβεβαιότητα Δx της θέσης του είναι ίση με το μήκος κύματος που έχει κατά de Broglie, δείξτε ότι η αβεβαιότητα της ταχύτητας του είναι $\Delta \upsilon_x \geq \frac{1}{2\pi} \upsilon_x$.

ΕΝΘΕΤΟ

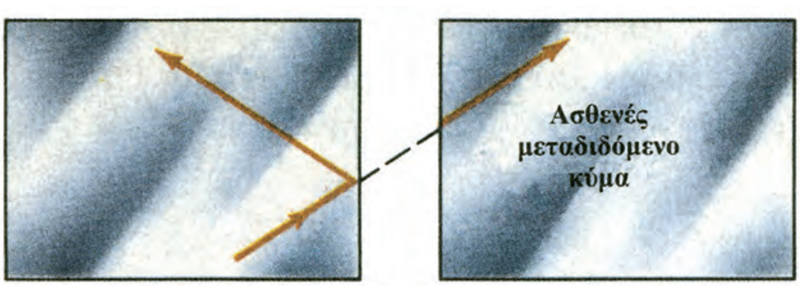
Το Μικροσκόπιο Σάρωσης Σήραγγας (Scanning Tunneling Microscope STM)

Η υπόθεση της ύπαρξης των ατόμων υφίσταται χιλιάδες χρόνια. Ξεκινάει τουλάχιστον από το Δημόκριτο. Μέχρι πρόσφατα τα άτομα παρέμεναν υποθετικά και όχι παρατηρήσιμα.

Το 1982 οι Ελβετοί φυσικοί Gerd Binnig και Heinrich Rohrer ανέπτυξαν το μικροσκόπιο σάρωσης σήραγγας (STM) που μας έδωσε τη δυνατότητα να «δούμε» άτομα. Για την ανακάλυψή τους τιμήθηκαν με το βραβείο Νόμπελ μόλις τέσσερα χρόνια μετά.

Η λειτουργία του STM στηρίζεται στο κβαντομηχανικό φαινόμενο της σήραγγας. Εδώ θα ξεκινήσουμε χρησιμοποιώντας ένα κοντινό ανάλογο, το φαινόμενο της ολικής εσωτερικής ανάκλασης (παράγραφος 2-10) για να καταλάβουμε την αρχή λειτουργίας του STM.

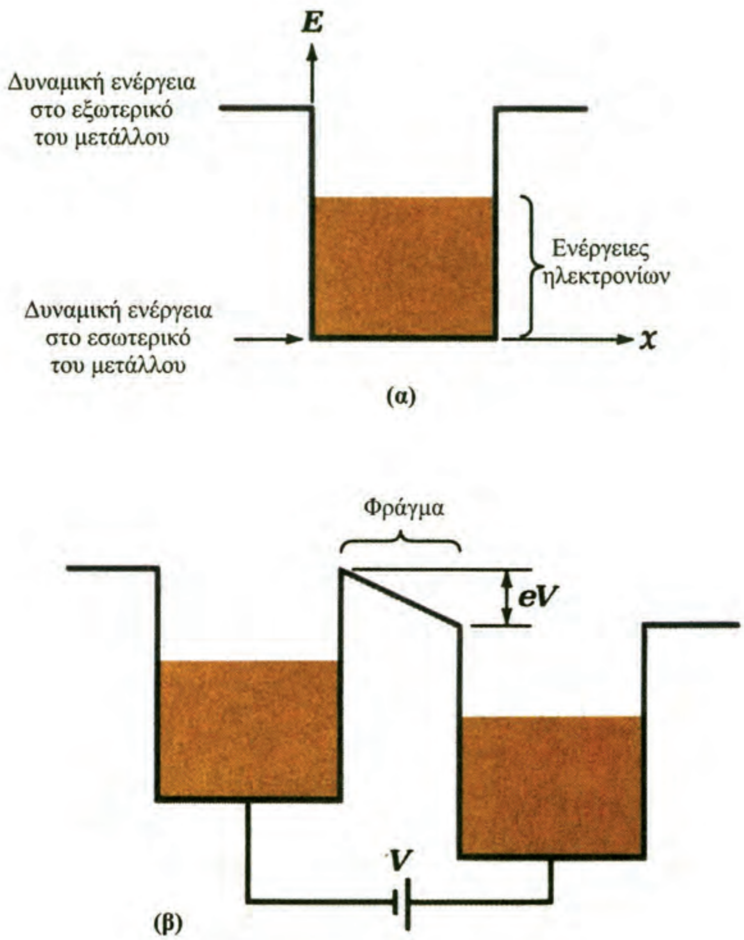
Μία μονοχρωματική δέσμη φωτός που διαδίδεται μέσα σε ένα γυάλινο πλακίδιο και προσπίπτει σε μια έδρα του με γωνία μεγαλύτερη από την κρίσιμη $\left(\theta_{crit}\right)$ ανακλάται κατά εκατό τοις εκατό. Το φαινόμενο λέγεται ολική εσωτερική ανάκλαση. Στην πραγματικότητα το κύμα του φωτός δε σταματάει ακαριαία πάνω στην ανακλαστική επιφάνεια. Για πολύ μικρό διάστημα, ένα τμήμα της δέσμης, συνεχίζει την πορεία του και έξω από το γυάλινο πλακίδιο. Αυτό μπορούμε να το δείξουμε πλησιάζοντας ένα δεύτερο γυάλινο πλακίδιο κοντά στο πρώτο. Το φωτεινό κύμα που πέρασε έξω από το πρώτο γυάλινο πλακίδιο και εξασθενεί ταχύτατα παραλαμβάνεται από το δεύτερο πλακίδιο και διαδίδεται μέσα σ' αυτό. Η ένταση του μεταδιδόμενου κύματος στο δεύτερο πλακίδιο εξαρτάται από το πόσο κοντά φέραμε τα δύο πλακίδια μεταξύ τους (σχ. 7.21).



Γυάλινο πλακίδιο 1 Γυάλινο πλακίδιο 2

Σχήμα 7-21.

Μια από τις σημαντικότερες ανακαλύψεις του εικοστού αιώνα είναι ότι τα σωματίδια συμπεριφέρονται ως κύματα. Όπως το φως μπορεί να διαπεράσει την «απαγορευμένη περιοχή» ανάμεσα στα πλακίδια έτσι και τα σωματίδια μπορούν να διαπεράσουν με το φαινόμενο σήραγγας περιοχές που σύμφωνα με την κλασική θεωρία είναι απαγορευμένες. Ένα απλό παράδειγμα του φαινομένου σήραγγας έχουμε στην περίπτωση δύο μετάλλων που βρίσκονται πολύ κοντά το ένα στο άλλο χωρίς όμως να έρχονται σε επαφή. Μια διαφορά δυναμικού εφαρμόζεται ανάμεσα στα δύο μέταλλα (σχ. 7.22β). Τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του κομματιού στα αριστερά δεν έχουν αρκετή ενέργεια για να περάσουν στο κομμάτι στα δεξιά. Εντούτοις, όπως τα φωτεινά κύματα, τα κύματα που είναι συνδεδεμένα με τα ηλεκτρόνια δε σταματούν ακαριαία στα όρια της επιφάνειας του μετάλλου αλλά εκτείνονται και έξω από αυτό εξασθενώντας πολύ γρήγορα. Εάν το κενό ανάμεσα στα δύο κομμάτια μετάλλου είναι πολύ μικρό, το ηλεκτρόνιο - κύμα μπαίνει στο δεύτερο κομμάτι πριν εξασθενήσει ολοκληρωτικά και διαδίδεται μέσα σ’ αυτό. Ένα ρεύμα ρέει ανάμεσα στα δύο μεταλλικά ηλεκτρόδια. Το ρεύμα αυτό αυξάνεται εκθετικά καθώς τα δύο τμήματα μετάλλου πλησιάζουν μεταξύ τους.



(α) Τα ηλεκτρόνια στο εσωτερικό ενός μετάλλου είναι «φυλακισμένα» μέσα σ’ αυτό γιατί βρίσκονται μέσα σ’ ένα πηγάδι δυναμικού παραγόμενο από την έλξη των θετικών πυρήνων. Οι ενέργειες των ηλεκτρονίων αντιστοιχούν στη σκιασμένη περιοχή. Είναι φανερό ότι τα ηλεκτρόνια δεν έχουν αρκετή ενέργεια για να «δραπετεύσουν από το μέταλλο».

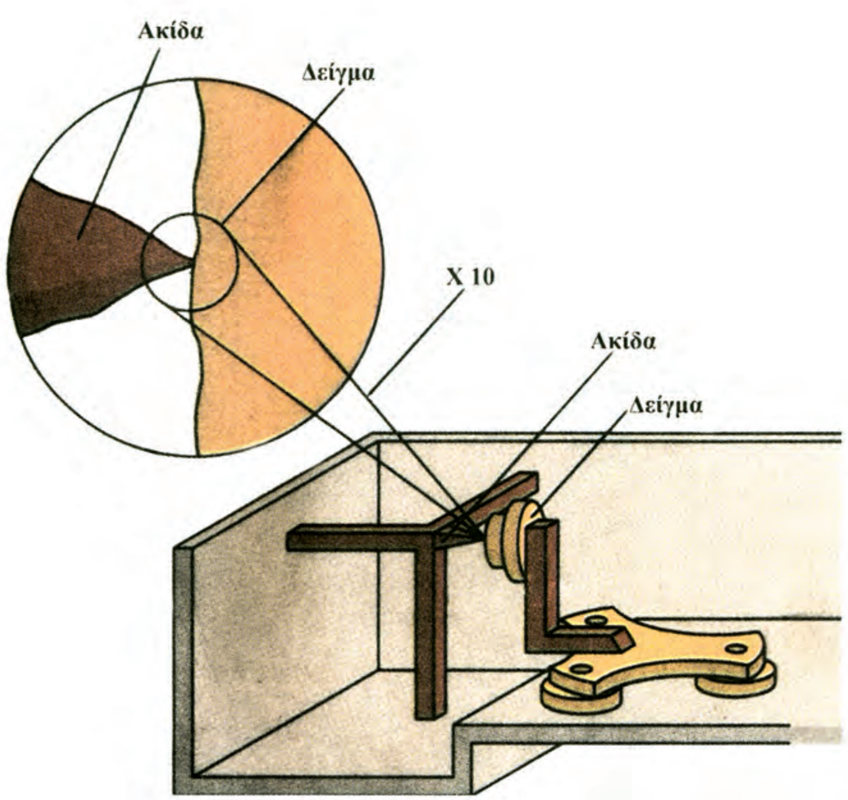
(β) Εφαρμόζοντας μια διαφορά δυναμικού ανάμεσα σε δύο γειτονικά μεταλλικά τμήματα ψηλώνουμε τα τοιχώματα δυναμικής ενέργειας του ενός πηγαδιού σε σχέση με το άλλο κατά eV. Σύμφωνα με την κλασική θεωρία ένα φράγμα δυναμικού εξακολουθεί να εμποδίζει τα ηλεκτρόνια να περάσουν από το ένα τμήμα στο άλλο. Η κβαντομηχανική προβλέπει ότι κάποια ηλεκτρόνια μπορούν να διαπεράσουν το φράγμα.

Σχήμα 7-22.

Οι Binnig και Rohrer πέτυχαν να κατασκευάσουν ένα μικροσκόπιο εκμεταλλευόμενοι το φαινόμενο σήραγγας. Το εγχείρημα παρουσία-σε μεγάλες δυσκολίες. Η τελική επιτυχία αποτελεί απόδειξη της ιδιοφυΐας των ερευνητών.

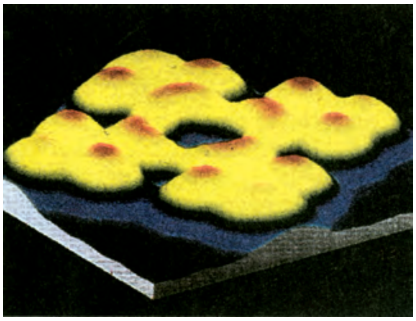
Η κεντρική ιδέα τους ήταν να μιμηθούν κάποιον που προσπαθεί να προσδιορίσει την υφή μιας ανώμαλης επιφάνειας μέσα σε ένα σκοτεινό δωμάτιο σαρώνοντας σχολαστικά την επιφάνεια με τα δάκτυλά του πολλές φορές.

Υποθέστε ότι αντί για ένα δάκτυλο χρησιμοποιούμε μια πολύ αιχμηρή ακίδα την οποία πλησιάζουμε σ' ένα αγώγιμο δείγμα χωρίς να την φέρνουμε ποτέ σε επαφή με αυτό. Εφαρμόζοντας μια διαφορά δυναμικού, από λίγα millivolts έως λίγα volts, ανάμεσα στην ακίδα και το δείγμα προκαλούμε ένα ρεύμα σήραγγας της τάξεως των $10^{-9}\ A(nA)$. Εάν η ακίδα κινείται παράλληλα στην επιφάνεια του δείγματος, το ρεύμα μεγαλώνει ή μικραίνει ανάλογα με το αν το δείγμα παρουσιάζει «λόφους» και «κοιλάδες» στην επιφάνειά του. Για να διατηρηθεί το ρεύμα σταθερό πρέπει η απόσταση ακίδας -δείγματος να διατηρείται σταθερή. Πρέπει δηλαδή η ακίδα να κινείται συνεχώς πλησιάζοντας ή απομακρυνόμενη από το δείγμα. Παρακολουθώντας την κίνηση της ακίδας έχουμε μια εικόνα των ανωμαλιών που παρουσιάζει η επιφάνεια του δείγματος σε κάθε θέση.

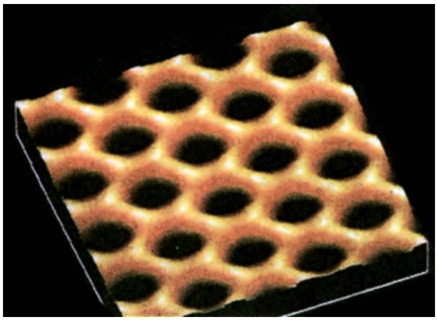


Σχήμα 7-23.

Με πολλαπλές σαρώσεις της επιφάνειας του δείγματος και με εξομοιώσεις που πετυχαίνουμε με τη βοήθεια ηλεκτρονικών υπολογιστών καταλήγουμε σε απεικονίσεις αγώγιμων επιφανειών σε ατομική κλίμακα, όπως στις εικόνες 7.9 και 7.10.

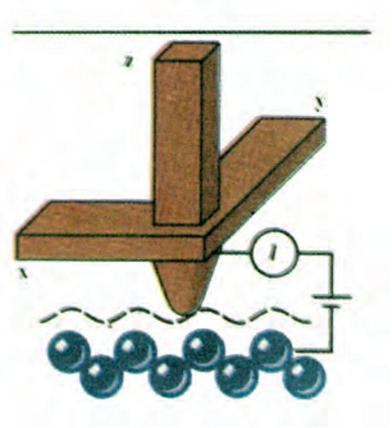


Προσμίξεις ατόμων χρυσού σε επιφάνεια γραφίτη.
Εικόνα 7-9.



Άτομα άνθρακα στην επιφάνεια γραφίτη.
Εικόνα 7-10.

Γεννιέται το ερώτημα πώς είναι δυνατόν η ακίδα να κινείται μπρος - πίσω με την απαιτούμενη ακρίβεια κατά τη σάρωση της επιφάνειας; Σίγουρα αυτό δεν θα μπορούσε να γίνει με μηχανικό τρόπο, με βίδες και γρανάζια. Οι Binnig και Rohrer χρησιμοποίησαν πιεζοηλεκτρικούς κρυστάλλους για να στερεώσουν την ακίδα τους και να ελέγξουν την κίνησή της στο επίπεδο xy (σάρωση) και στον άξονα z (πλησίασμα - απομάκρυνση).



Σχήμα 7-24.

Οι πιεζοηλεκτρικοί κρύσταλλοι αναπτύσσουν στα άκρα τους μια διαφορά δυναμικού όταν συμπιέζονται και, αντίστροφα, συμπιέζονται ή εκτείνονται όταν μια διαφορά δυναμικού εφαρμόζεται σ' αυτούς.

Εάν εφαρμοστεί η κατάλληλη διαφορά δυναμικού στους x και y κρυστάλλους μπορούμε να εξασφαλίσουμε την κίνηση σάρωσης της ακίδας με ταχύτητες της τάξης των $10\ \mathrm{nm/s}$.

Καθώς η σάρωση προχωράει, ένα κύκλωμα «νιώθει» κάθε αλλαγή στο ρεύμα σήραγγας και παράγει την κατάλληλη τάση, που εφαρμόζεται στον κρύσταλλο z μετακινώντας την ακίδα μέχρι να αποκατασταθεί η σταθερότητα του ρεύματος σήραγγας.

Από την αρχή λειτουργίας του το STM, δε μπορεί να απεικονίσει επιφάνειες μη αγώγιμων υλικών. Για τέτοιου είδους απεικονίσεις χρησιμοποιείται το SFM (Scanning Force Microscope), το οποίο στηρίζεται στην ανίχνευση των απωστικών δυνάμεων που αναπτύσσονται ανάμεσα στα άτομα όταν αυτά πλησιάσουν πολύ μεταξύ τους.

Πίνακες Σταθερών - Χρήσιμα Μεγέθη

Θεμελιώδεις Φυσικές Σταθερές

Όνομα	Σύμβολο	Τιμή
Ταχύτητα του φωτός	c	$3\times10^{8}\ m/s$
Φορτίο ηλεκτρονίου (απόλυτη τιμή)	e	$1,6\times10^{-19}\ C$
Βαρυτική σταθερά (σταθερά της παγκόσμιας έλξης)	G	$6,67\times10^{-11}\ N\cdot m^2/kg^2$
Σταθερά Planck	h	$6,626\times10^{-34}\ J\cdot s$
Σταθερά Boltzmann	k	$1,38\times10^{-23}\ J/K$
Σταθερά Avogadro	N_A	$6,023\times10^{23}$ μόρια$/mol$
Σταθερά των αερίων	R	$8,314\ J/mol\cdot K$
Μάζα ηλεκτρονίου	m_e	$9,1\times10^{-31}\ kg$
Μάζα νετρονίου	m_n	$1,675\times10^{-27}\ kg$
Μάζα πρωτονίου	m_p	$1,673\times10^{-27}\ kg$
Διηλεκτρική σταθερά του κενού	ε_0	$8,85\times10^{-12}\ C^2/N\cdot m^2$
Σταθερά Coulomb	K_C	$9\times10^{9}\ Nm^2/C^2$
Μαγνητική διαπερατότητα του κενού	μ_0	$4\pi\times10^{-7}\ Wb/A\cdot m$

Άλλες Χρήσιμες Σταθερές

Μηχανικό ισοδύναμο της θερμότητας		$4,186\ J/cal$
Κανονική ατμοσφαιρική πίεση	$1\ atm$	$1,013\times10^{5}\ Pa\ \left(N/m^2\right)$
Απόλυτο μηδέν	$0\ K$	$-273\ ^{\circ}C$
Ηλεκτρονιοβόλτ	$1\ eV$	$1,6\times10^{-19}\ J$
Ενέργεια ηρεμίας ηλεκτρονίου	mc^2	$0,511\ MeV$
Γραμμομοριακός όγκος ιδανικού αερίου $\left(0\ ^{\circ}C, 1\,atm\right)$	V_{mol}	$22,4\ L/mol$

Λεξιλόγιο Όρων

Α

αδρανειακό σύστημα : σύστημα αναφοράς στο οποίο ισχύει η αρχή της αδράνειας του Newton.

αεροδύναμη: η δύναμη που δέχεται από τον αέρα η πτέρυγα του αεροπλάνου κατά τη διάρκεια της πτήσης του.

αιθέρας: υποθετικό αβαρές ελαστικό μέσο, η παρουσία του οποίου θεωρήθηκε απαραίτητη για τη διάδοση του φωτός.

ακτίνες Röntgen: ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με μήκη κύματος μεταξύ 10^{-8} και 10^{-13} m. Είναι αποτέλεσμα της επιβράδυνσης των ηλεκτρονίων που προσπίπτουν σε μεταλλικές επιφάνειες με μεγάλη ταχύτητα ή της αποδιέγερσης των ατόμων του μετάλλου.

ακτίνες γ: ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με μήκη κύματος μεταξύ 10^{-10} και 10^{-14} m. Εκπέμπονται από πυρήνες ραδιενεργών στοιχείων.

ακτίνες Χ: οι ακτίνες Roentgen.

ακτινοβολία: ενέργεια που εκπέμπεται με μορφή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

αμορτισέρ: μηχανισμός που χρησιμοποιείται για την απόσβεση των ταλαντώσεων των αυτοκινήτων.

ανάκλαση κύματος: το φαινόμενο κατά το οποίο όταν το κύμα συναντήσει τη διαχωριστική επιφάνεια δυο μέσων επιστρέφει στο πρώτο μέσο ακολουθώντας ορισμένο δρόμο.

άξονας περιστροφής (στερεού σώματος): η ευθεία που ενώνει τα σημεία τα οποία παραμένουν ακίνητα κατά την περιστροφή του σώματος.

απεριοδική ταλάντωση: η κίνηση ενός ταλαντωτή ο οποίος δεν υπερβαίνει τη θέση ισορροπίας, λόγω ισχυρών αποσβέσεων.

απομάκρυνση: η απόσταση σώματος που ταλαντώνεται, από τη θέση ισορροπίας.

αρμονική ταλάντωση: η ταλάντωση στην οποία η απομάκρυνση του ταλαντωτή είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου.

αρχική φάση : η τιμή που έχει τη χρονική στιγμή μηδέν η φάση ενός μεγέθους που μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο.

Γ

γενική θεωρία της σχετικότητας: η θεωρία της σχετικότητας που συμπεριλαμβάνει και μη αδρανειακά συστήματα - θεωρία για τη βαρύτητα.

γωνία εκτροπής: η γωνία που σχηματίζει με την αρχική της διεύθυνση η μονοχρωματική δέσμη που βγαίνει από μια οπτική διάταξη.

γωνιακή συχνότητα: μέγεθος που χαρακτηρίζει τα περιοδικά φαινόμενα, ανάλογο προς τη συχνότητα. Στην ομαλή κυκλική κίνηση συμπίπτει με το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας.

Δ

δείκτης διάθλασης (υλικού): ο λόγος της ταχύτητας του φωτός στο κενό προς την ταχύτητά του στο υλικό αυτό.

δεσμός στάσιμου κύματος: ένα σημείο που παραμένει ακίνητο όταν στο ελαστικό μέσο στο οποίο ανήκει δημιουργείται στάσιμο κύμα.

δευτέριο: ισότοπο του υδρογόνου με μαζικό αριθμό δύο.

διάθλαση κύματος: η αλλαγή πορείας ενός κύματος κατά τη μετάβασή του από ένα μέσο σε ένα άλλο στο οποίο διαδίδεται με διαφορετική ταχύτητα.

διακρότημα: η αυξομείωση του πλάτους της ταλάντωσης που εκτελεί ένα σώμα όταν μετέχει σε δυο ταλαντώσεις της ίδιας διεύθυνσης, που έχουν το ίδιο πλάτος και συχνότητες που παρουσιάζουν μικρή διαφορά.

διάμηκες κύμα: το κύμα στο οποίο τα μόρια του ελαστικού μέσου ταλαντώνονται στη διεύθυνση της διάδοσής του.

διαμόρφωση πλάτους (AM): η τροποποίηση του πλάτους του ηλεκτρομαγνητικού κύματος που εκπέμπει ο σταθμός, από το μικροφωνικό ρεύμα.

διαμόρφωση συχνότητας (FM): η τροποποίηση της συχνότητας του ηλεκτρομαγνητικού κύματος που εκπέμπει ο σταθμός, από το μικροφωνικό ρεύμα.

διασκεδασμός (του φωτός): η εξάρτηση του δείκτη διάθλασης ενός υλικού από το μήκος κύματος.

διαστολή του χρόνου: Η φαινομενική επιβράδυνση του χρόνου (αύξηση του χρονικού διαστήματος) σε σώμα που κινείται με σχετικιστική ταχύτητα.

δίδυμη γένεση: η μετατροπή ενός φωτονίου σε ζεύγος ηλεκτρονίου- ποζιτρονίου.

διέγερση (ατόμου): η μετάβαση ενός ηλεκτρονίου του ατόμου σε στιβάδα με ενέργεια μεγαλύτερη από την αρχική.

διεγέρτης: το σώμα που προκαλεί εξαναγκασμένη ταλάντωση ενός ταλαντωτή- που προσφέρει περιοδικά ενέργεια σε ένα σώμα που ταλαντώνεται.

δύναμη επαναφοράς: η δύναμη που αναγκάζει ένα σώμα να ταλαντώνεται- που τείνει να επαναφέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας.

δυναμική άνωση: η συνιστώσα της αεροδύναμης η κάθετη στην ταχύτητα.

Ε

εγκάρσιο κύμα: το κύμα στο οποίο τα μόρια του ελαστικού μέσου ταλαντώνονται κάθετα στη διεύθυνση της διάδοσής του.

ειδική θεωρία της σχετικότητας: θεωρία που διατύπωσε ο Einstein για αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Βασικές της παραδοχές είναι: α) η ταχύτητα του φωτός είναι ανεξάρτητη από τη ταχύτητα του παρατηρητή, β) οι νόμοι της φυσικής είναι ίδιοι σε όλα τα αδρανειακά συστήματα.

έκκεντρη κρούση: η κρούση σωμάτων που οι ταχύτητές τους βρίσκονται σε παράλληλες ευθείες.

ελαστική κρούση: η κρούση κατά την οποία διατηρείται η μηχανική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων.

ελεύθερη ταλάντωση: η ταλάντωση ενός σώματος το οποίο εκτρέπεται από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο.

έλλειμμα μάζας: η διαφορά της μάζας ενός πυρήνα από τη μάζα των συστατικών του.

ενέργεια σύνδεσης (πυρήνα): το ποσό της ενέργειας που πρέπει να προσφερθεί στον πυρήνα για να διασπαστεί στα συστατικά του.

ενέργεια ηρεμίας: το ποσό της ενέργειας (mc^2) που έχει ένα σώμα όταν ηρεμεί.

ένταση ακτινοβολίας: η ενέργεια που περνάει από τη μονάδα επιφάνειας στη μονάδα του χρόνου.

εξαναγκασμένη ταλάντωση: η ταλάντωση που γίνεται με την περιοδική προσφορά ενέργειας στο ταλαντούμενο σύστημα.

εξίσωση κύματος: η σχέση που δίνει την απομάκρυνση των σημείων του μέσου στο οποίο διαδίδεται το κύμα κάθε χρονική στιγμή.

εξίσωση συνέχειας: η σχέση μεταξύ της ταχύτητας ενός ασυμπίεστου ρευστού και της διατομής του σωλήνα στον οποίο κινείται.

εσωτερική τριβή ρευστού: η τριβή που αναπτύσσεται μεταξύ των μορίων του ρευστού λόγω της κίνησής του.

έργο εξαγωγής: η ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να πάρει ένα ηλεκτρόνιο για να εγκαταλείψει την επιφάνεια ενός μετάλλου.

Η

ηλεκτρική ταλάντωση: εναλλασσόμενο ρεύμα μεγάλης συχνότητας που παίρνουμε από κύκλωμα LC όταν φορτίσουμε τον πυκνωτή.

ηλεκτρομαγνητικό κύμα: η ταυτόχρονη διάδοση ενός ηλεκτρικού και ενός μαγνητικού πεδίου στο χώρο.

Ι

ιδιομήκος (αντικειμένου): βλ. «**μήκος ηρεμίας**».

ιδιόχρονος (αδρανειακού συστήματος): ο χρόνος που μετράει ένα ρολόι ακίνητο σε ένα αδρανειακό σύστημα.

ιξώδες: η εσωτερική τριβή μεταξύ των μορίων ενός ρευστού- συντελεστής που δείχνει πόσο παχύρρευστο είναι ένα υγρό.

Κ

κβαντισμένο μέγεθος: κάθε μέγεθος που παίρνει διακριτές τιμές που είναι πολλαπλάσια μιας ελάχιστης.

κέντρο μάζας (σώματος): το σημείο στο οποίο μπορεί να θεωρηθεί συγκεντρωμένη όλη η μάζα ενός σώματος.

κοιλία στάσιμου κύματος: ένα σημείο που ταλαντώνεται με το μέγιστο πλάτος, όταν στο ελαστικό μέσο στο οποίο ανήκει σχηματίζεται στάσιμο κύμα.

κρίσιμη γωνία: η μέγιστη τιμή της γωνίας πρόσπτωσης στη διαχωριστική επιφάνεια δύο διαφανών υλικών για την οποία το φως περνάει από το πρώτο υλικό στο δεύτερο στο οποίο το φως διαδίδεται με μεγαλύτερη ταχύτητα.

κρούση κεντρική: η κρούση σωμάτων που οι ταχύτητές τους βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

κύμα μηχανικό: μια διαταραχή που μεταδίδεται σε ένα ελαστικό μέσο.

κυματοπακέτο: κύμα περιορισμένο στο χώρο.

Μ

μάζα ηρεμίας: η μάζα που έχει ένα σώμα όταν ηρεμεί.

μέλαν σώμα: σώμα που απορροφά όλες τις ακτινοβολίες που πέφτουν πάνω του.

μετασχηματισμοί Lorentz: οι σχέσεις που συνδέουν τις συντεταγμένες της θέσης και χρόνου ενός σώματος σε δυο αδρανειακά συστήματα αναφοράς που βρίσκονται σε σχετική κίνηση.

μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου: οι σχέσεις που συνδέουν τις συντεταγμένες της θέσης ενός σώματος σε δυο αδρανειακά συστήματα αναφοράς που κινούνται με ταχύτητα πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός.

μεταφορική κίνηση (στερεού σώματος): η κίνηση στην οποία όλα τα σημεία του σώματος έχουν την ίδια ταχύτητα.

μήκος ηρεμίας (αντικειμένου): το μήκος ενός αντικειμένου, όπως μετριέται στο σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο ηρεμεί.

μήκος κύματος De Broglie: το μήκος του κύματος που αντιστοιχεί σε ένα σωματίδιο.

μήκος κύματος: η απόσταση στην οποία φτάνει το κύμα σε χρόνο μιας περιόδου- η μικρότερη απόσταση δύο σημείων, στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος, που βρίσκονται σε φάση.

μικροκύματα: ηλεκτρομαγνητικά κύματα με μήκη κύματος μεταξύ $1\,mm$ και $30\,cm$. Χρησιμοποιούνται στα ραντάρ.

μικροσκόπιο σάρωσης σήραγγας: όργανο που επιτρέπει να απεικονίσουμε αγώγιμες επιφάνειες σε ατομική κλίμακα. Η λειτουργία του βασίζεται στο φαινόμενο σήραγγας.

Ν

νευτώνεια ρευστά : τα ρευστά στα οποία η εσωτερική τριβή είναι γραμμική συνάρτηση της ταχύτητας ροής.

Ο

ολική εσωτερική ανάκλαση: η ανάκλαση μιας φωτεινής δέσμης που δε συνοδεύεται από διάθλαση. Γίνεται στην επιφάνεια που διαχωρίζει ένα διαφανές μέσον από ένα άλλο με μικρότερο δείκτη διάθλασης, όταν η γωνία πρόσπτωσης είναι μεγαλύτερη από την κρίσιμη γωνία.

ορμή (υλικού σημείου): το διάνυσμα που έχει την κατεύθυνση της ταχύτητας και μέτρο ίσο με το γινόμενο της μάζας του υλικού σημείου επί το μέτρο της ταχύτητάς του.

ουράνιο τόξο: το φωτεινό τόξο που εμφανίζεται στον ουρανό, ως αποτέλεσμα της ανάκλασης και του διασκεδασμού του ηλιακού φωτός στα σταγονίδια της βροχής.

Π

poise (πουάζ): μονάδα μέτρησης του ιξώδους ενός ρευστού, ισοδύναμη με $10^{-1}Nsm^{-2}$.

παροχή (σωλήνα ή ρευματικής φλέβας): το πηλίκο του όγκου dV του ρευστού που περνάει από μια διατομή του σωλήνα (ή της φλέβας) σε χρόνο dt προς το χρόνο αυτό.

περίοδος (φαινομένου): το πηλίκο του χρόνου μέσα στον οποίο ολοκληρώνονται N εναλλαγές του φαινομένου με τον αριθμό N- ο χρόνος ανάμεσα σε δυο διαδοχικές όμοιες φάσεις του φαινομένου.

πλάγια κρούση: η κρούση σωμάτων που οι ταχύτητές τους βρίσκονται σε τυχαία διεύθυνση.

πλαστική κρούση: η κρούση που οδηγεί στη συγκόλληση των σωμάτων.

ποζιτρόνιο: το αντισωματίδιο του ηλεκτρονίου - σωματίδιο με μάζα ίση με τη μάζα του ηλεκτρονίου και φορτίο $+e$.

πυρηνική σύντηξη: πυρηνική αντίδραση στη διάρκεια της οποίας πυρήνες μικρού ατομικού αριθμού συντήκονται και δίνουν βαρύτερους πυρήνες, με ταυτόχρονη έκλυση ενέργειας.

πυρηνική σχάση: πυρηνική αντίδραση στη διάρκεια της οποίας ένας πυρήνας μεγάλου ατομικού αριθμού χωρίζεται σε δυο πυρήνες μικρότερου ατομικού αριθμού με ταυτόχρονη έκλυση ενέργειας.

πυρηνικός αντιδραστήρας: η διάταξη στην οποία πραγματοποιούνται ελεγχόμενες πυρηνικές αντιδράσεις.

Ρ

ραδιοκύματα: ηλεκτρομαγνητικά κύματα που προκύπτουν από ταλαντούμενα ηλεκτρικά δίπολα και χρησιμοποιούνται στις τηλεπικοινωνίες.

ρευματική γραμμή: η γραμμή που συνδέει τις διαδοχικές θέσεις ενός μορίου του ρευστού.

ρευστά: σώματα που δεν έχουν δικό τους σχήμα- τα υγρά και τα αέρια.

ροπή αδράνειας (ως προς άξονα): το μέτρο της αδράνειας των σωμάτων στη στροφική κίνηση- ορίζεται ως το άθροισμα $\sum m_i \cdot r_i^2$, όπου m_i μια στοιχειώδης μάζα του σώματος και r_i η απόστασή της από τον άξονα.

ροπή δύναμης (ως προς άξονα): διάνυσμα που έχει τη διεύθυνση του άξονα και μέτρο το γινόμενο του μέτρου της συνιστώσας της δύναμης που βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα επί την απόστασή της από τον άξονα.

ροπή δύναμης (ως προς σημείο): διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζει το σημείο και ο φορέας της δύναμης και μέτρο το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί την απόσταση του σημείου από τον φορέα της δύναμης.

Σ

σταθερά απόσβεσης: η σταθερά αναλογίας στη σχέση που συνδέει τη δύναμη η οποία προκαλεί την απόσβεση μιας ταλάντωσης με την ταχύτητα του ταλαντωτή.

στάσιμο κύμα: η κίνηση που κάνει ένα μέσο στο οποίο διαδίδονται ταυτόχρονα, με αντίθετη φορά, δυο κύματα της ίδιας συχνότητας και του ίδιου πλάτους.

στιγμιότυπο κύματος: η εικόνα που παρουσιάζει μια χρονική στιγμή το ελαστικού μέσο στο οποίο διαδίδεται ένα κύμα - η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=f(x,t)$ για ορισμένη τιμή του t.

στρόβιλοι: περιοχές στις οποίες το ρευστό κάνει περιστροφική κίνηση.

στροφική κίνηση: η κίνηση ενός στερεού γύρω από άξονα- η κίνηση στην οποία όλα τα σημεία του στερεού έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα.

στροφορμή στερεού σώματος: το άθροισμα των στροφορμών των στοιχειωδών τμημάτων που απαρτίζουν το στερεό.

στροφορμή συστήματος σωμάτων: το άθροισμα των στροφορμών των σωμάτων που απαρτίζουν το σύστημα.

στροφορμή υλικού σημείου (που κάνει κυκλική κίνηση): διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο της τροχιάς με μέτρο το γινόμενο του μέτρου της ορμής του υλικού σημείου επί την ακτίνα της τροχιάς του.

στρωτή ροή: η κίνηση ενός ρευστού, όταν δε σχηματίζονται στρόβιλοι.

συμβολή κυμάτων: η ταυτόχρονη διάδοση δυο ή περισσοτέρων κυμάτων στην ίδια περιοχή του χώρου.

συμβολόμετρο: όργανο που μας επιτρέπει να προσδιορίζουμε με μεγάλη ακρίβεια τη θέση των κροσσών συμβολής του φωτός.

σύνθεση ταλαντώσεων: η μελέτη της κίνησης ενός σώματος που μετέχει σε περισσότερες από μια ταλαντώσεις.

συντονισμός: το φαινόμενο κατά το οποίο ένα σώμα κάνει εξαναγκασμένη ταλάντωση με το μέγιστο πλάτος.

συστολή του μήκους: Η φαινομενική σμίκρυνση ενός σώματος που κινείται με σχετικιστική ταχύτητα.

συχνότητα κατωφλίου: η ελάχιστη συχνότητα που πρέπει να έχει μια φωτεινή δέσμη για να προκαλέσει εκπομπή φωτοηλεκτρονίων από ένα μέταλλο.

συχνότητα (φαινομένου): ο αριθμός των επαναλήψεων του φαινομένου στη μονάδα του χρόνου.

Τ

ταλάντωση (μηχανική): Παλινδρομική κίνηση γύρω από μια θέση ισορροπίας.

πλάτος ταλάντωσης: η μεγαλύτερη τιμή της απομάκρυνσης του ταλαντωτή.

τάση αποκοπής: η τιμή της τάσης μεταξύ των ηλεκτροδίων ενός φωτοκύτταρου για την οποία διακόπτεται το ρεύμα.

τυρβώδης ροή: η ροή ενός ρευστού όταν σχηματίζονται στρόβιλοι.

Υ

υδροστατική πίεση: η πίεση των υγρών που οφείλεται στο βάρος τους.

υπεριώδης ακτινοβολία: αόρατη ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με μήκη κύματος από 60 nm μέχρι 380 nm.

Φ

φαινόμενο Compton: ο σκεδασμός της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας από τα σωματίδια της ύλης. Συνοδεύεται από αύξηση του μήκους κύματος της ακτινοβολίας.

φαινόμενο Doppler: η εμφάνιση διαφοράς ανάμεσα στη συχνότητα του εκπεμπόμενου κύματος και της συχνότητας που αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής όταν μεταβάλλεται η απόστασή του από την πηγή του κύματος.

φαινόμενο σήραγγας: η διέλευση σωματιδίων μέσα από ένα φράγμα δυναμικού χωρίς να έχουν την απαραίτητη ενέργεια, όπως απαιτεί η κλασική θεωρία.

φωτοηλεκτρικό φαινόμενο: η απόσπαση ηλεκτρονίων από ένα μέταλλο όταν στην επιφάνειά του προσπίπτει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία κατάλληλης συχνότητας.

φλέβα: το σχήμα που ορίζεται από τις ρευματικές γραμμές που αντιστοιχούν στα σημεία του περιγράμματος μιας επιφάνειας που βρίσκεται στη ροή του ρευστού.

φώραση: η διαδικασία με την οποία διαχωρίζεται το μικροφωνικό ρεύμα από το φέρον κύμα.

φωτοκύτταρο: διάταξη με την οποία οι αυξομειώσεις στην ένταση μιας φωτεινής δέσμης, κατάλληλης συχνότητας, μετατρέπονται σε αυξομειώσεις ηλεκτρικού ρεύματος.

φωτόνιο: το κβάντο της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Σωμάτιο μηδενικής μάζας ηρεμίας.

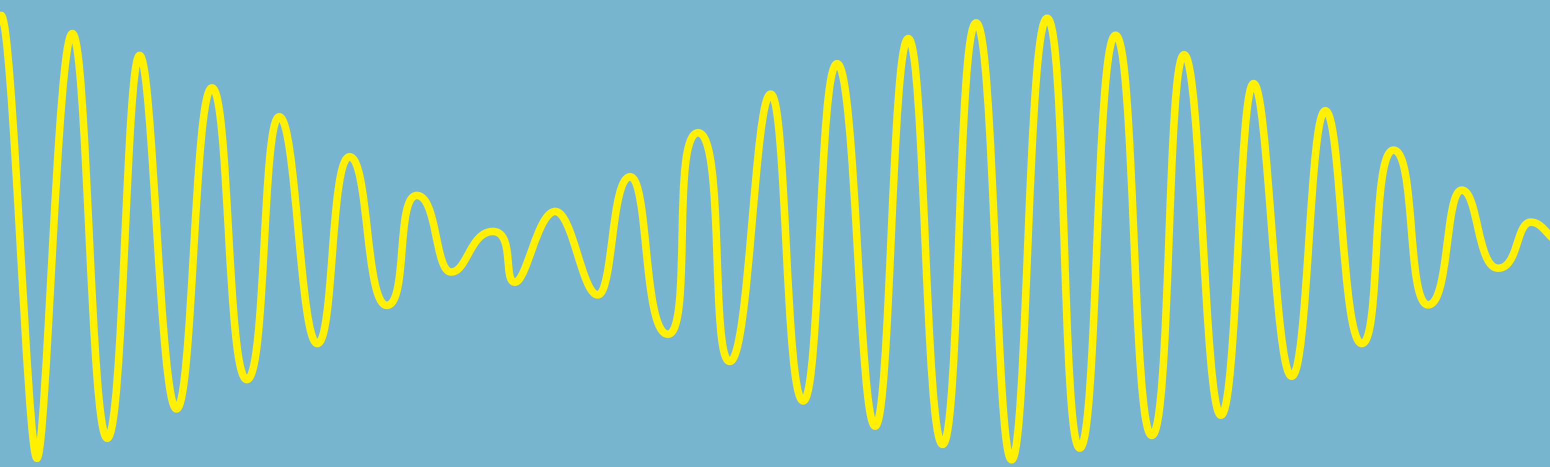
Αλφαβητικό Ευρετήριο

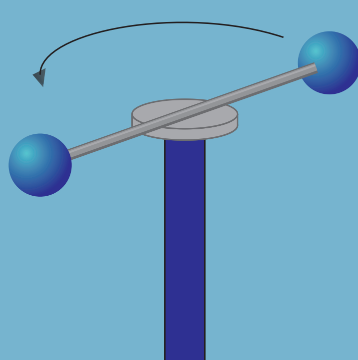
Βιβλιογραφία

1. Πανεπιστημιακή Φυσική Hugh D. Young Εκδόσεις Παπαζήση.
2. Physics for scientists & engineers Serway.
3. Φυσική Halliday Resnick Εκδόσεις Πνευματικός.
4. Halliday - Resnick - Walker Fundamentals of Physics Extended (fifth edition).
5. F.J.Keller - W.E.Gettys - M.J.Skove Physics (second edition).
6. Κεφάλαια σύγχρονης Φυσικής Halliday Resnick Εκδόσεις Πνευματικός.
7. Οι έννοιες της Φυσικής Paul G. Hewitt Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
8. Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική David J. Griffiths Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
9. Μαθήματα Φυσικής (Ηλεκτρισμός-Μαγνητισμός) πανεπιστήμιο Berkley Edward Purcell μετάφραση και έκδοση ομάδα καθηγητών ΕΜΠ.
10. Κλασσική και σύγχρονη Φυσική Kenneth W. Ford Εκδόσεις Πνευματικός.
11. Κβαντομηχανική Ι. Στέφανος Τραχανάς Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
12. Η Φυσική σήμερα Ε.Ν. Οικονόμου Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
13. Η εξέλιξη των ιδεών στη Φυσική Einstein - Infeld Εκδόσεις Δωδώνη.
14. Η ελαφρότητα της Βαρύτητας Jayant Narlikar Εκδόσεις Τροχαλία.
15. Ιστορία της Φυσικής Emilio Segre Εκδόσεις Δίαυλος.
16. Φυσική Β΄ Ενιαίου Λυκείου (ειδίκευση) Υπουργείο Παιδείας Κύπρος.
17. Κ.Δ. Αλεξόπουλος - Δ.Ι. Μαρίνος Γενική Φυσική. Εκδόσεις ΟΛΥΜΠΙΑ.
18. Κβαντικό σύμπαν Tony Hey & Patrick Walters, εκδόσεις Κάτοπτρο.
19. 3000 solved problems in physics Alvin Halpern, Ph.D Schaum’s Mc Graw Hill.
20. Echocardiography Harvey Feigenbaum fourth edition Lea & Febigep.
21. String and sticky tape experiments by R.D.Edge.
22. Turning the World Inside Out by Robert Ehrliich.

Περιεχόμενα

Πρόλογος





Κωδικός Βιβλίου: 0-22-0183
ISBN 978-960-06-2432-8

ΙΤΥΕ
"ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ"
ινστιτουτο
τεχνολογιας
υπολογιστων & εκδοσεων

(01) 000000 0 22 0183 2