ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Ασκηση 1. Έστω (a_n), (b_n) ακολουθίες πραγματικών αριθμών τέτοιες ώστε: $a_n \to +\infty$ και η (b_n) είναι φραγμένη. Αποδείξτε πλήρως (με χρήση μόνο του ορισμού) ότι $a_n + b_n \to +\infty$.

Υπόδειξη: Η (b_n) είναι φραγμένη, άρα υπάρχει $A > 0$ τέτοιος ώστε

$$|b_n| \leq A \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Έστω $M > 0$. Αφού $a_n \to +\infty$, εφαρμόζοντας τον ορισμό για τον $M + A > 0$, βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιον ώστε

$$a_n > M + A \text{ για κάθε } n \geq n_0.$$

Χρησιμοποιώντας και την $b_n \geq -|b_n|$ έχουμε ότι: για κάθε $n \geq n_0$,

$$a_n + b_n \geq a_n - |b_n| > (M + A) - A = M.$$

Με βάση τον ορισμό, $a_n + b_n \to +\infty$.

Ασκηση 2. Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της:

$$\alpha_n = \frac{n^3}{4^n}, \qquad \beta_n = \frac{n^6}{6^n}, \qquad \gamma_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}$$

$$\delta_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n \quad , \quad \epsilon_n = \sqrt[n]{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}, \qquad \zeta_n = \frac{\sin(n^3)}{\sqrt{n}}.$$

Υπόδειξη: (α) Χρησιμοποιούμε το κριτήριο λόγου. Έχουμε

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{(n+1)^3}{4^{n+1}} \frac{4^n}{n^3} = \frac{1}{4}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \to \frac{1}{4} \cdot 1^3 = \frac{1}{4} < 1,$$

άρα $\alpha_n \to 0$.
(β) Χρησιμοποιούμε το κριτήριο λόγου. Έχουμε

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{(n+1)^6}{6^{n+1}} \frac{6^n}{n^6} = \frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)^6 \to \frac{1}{6} \cdot 1^6 = \frac{1}{6} < 1,$$

άρα $\beta_n \to 0$.
(γ) Παρατηρούμε ότι ο μεγαλύτερος από τους όρους του αθροίσματος που ορίζει τον γ_n είναι ο $\frac{1}{(n+1)^2}$. Το άθροισμα έχει n όρους, άρα

$$0 < \gamma_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2} \leq n \cdot \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Εφόσον $\frac{1}{n} \to 0$, από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι $\gamma_n \to 0$.
(δ) Χρησιμοποιούμε το κριτήριο της ρίζας. Έχουμε $\sqrt[n]{\delta_n} = \sqrt[n]{n} - 1 \to 1 - 1 = 0 < 1$, άρα $\delta_n \to 0$.
(ε) Παρατηρούμε ότι $n^2 \leq 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 \leq n^2 + n^2 + \cdots + n^2 = n \cdot n^2 = n^3$, άρα

$$\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 = \sqrt[n]{n^2} \leq \epsilon_n = \sqrt[n]{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2} \leq \sqrt[n]{n^3} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^3.$$

Εφόσον $\sqrt[n]{n} \to 1$, έχουμε ότι $\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \to 1^2 = 1$ και $\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 \to 1^3 = 1$. Από το κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι $\epsilon_n \to 1$.
(ζ) Έχουμε ότι $|\sin(n^3)| \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$0 \leq |\zeta_n| = \frac{|\sin(n^3)|}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.$$

Από το κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι $|\zeta_n| \to 0$, άρα και $\zeta_n \to 0$. □

Ασκηση 3. Έστω $k \geq 2$ και $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n}\,.$$

Υπόδειξη: Έχουμε ότι $a_k^n < a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n < a_k^n + a_k^n + \cdots + a_k^n = k \cdot a_k^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$a_k = \sqrt[n]{a_k^n} < \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} \leq \sqrt[n]{k \cdot a_k^n} = a_k \sqrt[n]{k}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $\sqrt[n]{k} \to 1$, από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = a_k.$$

□

Ασκηση 4. Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Αν είναι αληθής αποδείξτε την και αν είναι ψευδής δώστε αντιπαράδειγμα.

(α) Αν $\alpha_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\alpha_n \to \alpha \in \mathbb{R}$ τότε $\sqrt[n]{\alpha_n} \to 1$.

(β) Αν $\beta_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\beta_n \to \beta > 0$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε $\beta_n > \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(γ) Αν $\gamma_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\gamma_n \to \gamma > 0$ τότε $\sqrt[n]{\gamma_n} \to 1$.

Υπόδειξη: (α) *Ψευδής.* Αν $\alpha_n = \frac{1}{n^n}$ τότε $\alpha_n \to 0$ αλλά

$$\sqrt[n]{\alpha_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \frac{1}{n} \to 0.$$

(β) *Αληθής.* Παίρνοντας $\varepsilon = \frac{\beta}{2}$ βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιον ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει ότι $|\beta_n - \beta| < \frac{\beta}{2}$. Έπεται ότι, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$-\frac{\beta}{2} < \beta_n - \beta < \frac{\beta}{2} \implies \beta_n > \frac{\beta}{2}.$$

Επιλέγουμε $\delta > 0$ ο οποίος είναι μικρότερος από όλους τους $\frac{\beta}{2}, \beta_1, \ldots, \beta_{n_0}$. Για παράδειγμα,

$$\delta = \frac{1}{2}\min\left\{\frac{\beta}{2}, \beta_1, \ldots, \beta_{n_0}\right\}.$$

Τότε, $\beta_n > \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (ελέγξτε το, διακρίνοντας τις περιπτώσεις $n \leq n_0$ και $n > n_0$).
(γ) *Αληθής.* Όπως στο (β), επιλέγοντας $\varepsilon = \frac{\gamma}{2} > 0$ βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιον ώστε

$$-\frac{\gamma}{2} < \gamma_n - \gamma < \frac{\gamma}{2} \implies \frac{\gamma}{2} < \gamma_n < \frac{3\gamma}{2}$$

για κάθε $n \geq n_0$. Τότε,

$$\sqrt[n]{\gamma/2} < \sqrt[n]{\gamma_n} < \sqrt[n]{3\gamma/2}$$

για κάθε $n \geq n_0$, και αφού $\sqrt[n]{\gamma/2} \to 1$ και $\sqrt[n]{3\gamma/2} \to 1$, από το κριτήριο παρεμβολής παίρνουμε $\sqrt[n]{\gamma_n} \to 1$. □

Ασκηση 5. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία ρητών αριθμών που συγκλίνει στον x και ακολουθία αρρήτων που συγκλίνει στον x. [*Υπόδειξη:* να χρησιμοποιήσετε την πυκνότητα των ρητών και των αρρήτων στο $\mathbb{R}$.]

Υπόδειξη: Έστω $x \in \mathbb{R}$. Από την πυκνότητα των ρητών στο $\mathbb{R}$ μπορούμε να βρούμε ρητό $q_1 \in (x, x+1)$, ρητό $q_2 \in \left(x, x+\frac{1}{2}\right)$, και γενικά, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $q_n \in \mathbb{Q}$ ώστε $q_n \in \left(x, x+\frac{1}{n}\right)$. Ορίζεται έτσι μια ακολουθία (q_n) ρητών αριθμών, τέτοια ώστε

$$x < q_n < x + \frac{1}{n} \ \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Εφόσον $x + \frac{1}{n} \to x$, από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι $q_n \to x$.

Όμοια, από την πυκνότητα των αρρήτων στο $\mathbb{R}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $\xi_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ώστε $\xi_n \in \left(x, x+\frac{1}{n}\right)$. Ορίζεται έτσι μια ακολουθία (ξ_n) αρρήτων αριθμών, τέτοια ώστε

$$x < \xi_n < x + \frac{1}{n} \ \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Εφόσον $x + \frac{1}{n} \to x$, από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι $\xi_n \to x$. □

Ασκηση 6. Έστω y θετικός πραγματικός αριθμός. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) θέτοντας

$$a_n = \frac{[y] + [2y] + \cdots + [ny]}{n^2}$$

όπου $[x]$ είναι το ακέραιο μέρος του x. Αποδείξτε ότι $a_n \to \dfrac{y}{2}$.

Υπόδειξη: Από τον ορισμό του ακεραίου μέρους έχουμε

$$[y] \leq y < [y] + 1, \quad [2y] \leq 2y < [2y] + 1, \quad [ny] \leq ny < [ny] + 1.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$[y] + [2y] + \cdots + [ny] \leq y + 2y + \cdots + ny < [y] + [2y] + \cdots + [ny] + n,$$

ή ισοδύναμα

$$y + 2y + \cdots + ny - n < [y] + [2y] + \cdots + [ny] \leq y + 2y + \cdots + ny.$$

Έχουμε επίσης

$$y + 2y + \cdots + ny = (1 + 2 + \cdots + n)y = \frac{n(n+1)y}{2},$$

άρα

$$\frac{n(n+1)y}{2} - n < [y] + [2y] + \cdots + [ny] \leq \frac{n(n+1)y}{2}.$$

Διαιρώντας με n^2 παίρνουμε

$$\frac{n+1}{2n}y - \frac{1}{n} < a_n = \frac{[y] + [2y] + \cdots + [ny]}{n^2} \leq \frac{n+1}{2n}y.$$

Όμως, $\frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2}$ και $\frac{1}{n} \to 0$, άρα

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n}y - \frac{1}{n}\right) = \frac{y}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}y.$$

Από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι $a_n \to \dfrac{y}{2}$. □

Ασκηση 7. Αποδείξτε ότι η ακολουθία

$$y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. [*Υπόδειξη*: Εξετάστε πρώτα αν η (y_n) είναι μονότονη.]

Υπόδειξη: Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} y_{n+1}-y_n &= \left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\right) \\ &\quad -\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}>0, \end{aligned}$$

άρα η (y_n) είναι γνησίως αύξουσα. Επίσης,

$$y_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\leq\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}<1,$$

αφού το άθροισμα που ορίζει τον y_n έχει n προσθετέους το πολύ ίσους με $\frac{1}{n+1}$. Συνεπώς, η (y_n) είναι άνω φραγμένη. Από το θεώρημα σύγκλισης μονότονων ακολουθιών, η (y_n) συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. $\square$