

Εξέταση στη Θεωρία Συνόλων

Σεπτέμβριος 2022

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Εφαρμοσμένων
Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών



Διάρκεια εξέτασης:
1 ώρα και 30 λεπτά

Διδάσκων:
B. Γρηγοριάδης

Σημειώσεις. Υπάρχουν συνολικά **12 μονάδες**. Η βαθμολογία του γραπτού σας είναι το $\min\{x, 10\}$, όπου x ο βαθμός που γράψατε. Μπορείτε να απαντήσετε σε **όσα ερωτήματα επιθυμείτε** χωρίς κανέναν περιορισμό. Διευκρινίζεται ότι μέσα στα Αξιώματα του μαθήματος περιλαμβάνεται και το Αξίωμα Επιλογής.

Θέμα 1 (1 + 1, 5 + 1 μονάδες).

(i) Δίνονται δύο αντικείμενα x, y . Εξηγήστε με βάση τα Αξιώματα γιατί υπάρχει το σύνολο

$$\{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

(ii) Διατυπώστε το Αξίωμα του Απειρού.

(iii) Ποια από τα σύνολα

$$\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \quad \mathbb{R}, \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

είναι ισοπληθικά με το $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (=το δυναμοσύνολο του \mathbb{N}); Δεν χρειάζεται απόδειξη.

Θέμα 2 (1, 5 + 1 + 1 + 1 μονάδες). Θεωρούμε το σύνολο $P = (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R})$ όλων των συναρτήσεων $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ και τη συνήθη διάταξη $\leq_{\mathbb{R}}$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} . Ορίζουμε τη διμελή σχέση \leq στο P ως εξής,

$$f \leq g \iff \forall n \in \mathbb{N} f(n) \leq_{\mathbb{R}} g(n), \quad \text{όπου } f, g \in P.$$

(i) Δείξτε ότι το ζεύγος (P, \leq) είναι μερικά διατεταγμένος χώρος.

(ii) Δείξτε ότι ο (P, \leq) δεν έχει μεγιστικό στοιχείο.

(iii) Έχει κάθε αλυσίδα στον (P, \leq) άνω φράγμα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(iv) Είναι ο χώρος (P, \leq) ολικά διατεταγμένος; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Θέμα 3 (1, 5 + 1, 5 + 1 μονάδες). Δίνεται ένας καλά διατεταγμένος χώρος (U, \leq) . Με S εννοούμε τη μερική συνάρτηση του επομένου στον U .

(i) Δείξτε ότι κάθε $y \in U$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου $\{S(x) \mid x < y\}$.

(ii) Δίνεται μια συνάρτηση $\pi : U \rightarrow U$ που ικανοποιεί

$$\pi(y) = \sup\{S(\pi(x)) \mid x < y\} \quad \text{για κάθε } y \in U.$$

Δείξτε με υπερπεπερασμένη επαγωγή ότι $\pi(y) = y$ για κάθε $y \in U$.

(iii) Δώστε το παράδειγμα (χωρίς απόδειξη) ενός καλά διατεταγμένου χώρου V με $U <_o V$.