Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

6ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1. Δείξτε ότι

$$Sn = n + 1 = 1 + n \quad \text{και} \quad n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ χωρίς να επικαλεστείτε την αντιμεταθετική ιδιότητα των πράξεων. Στις ισότητες που αφορούν τον πολλαπλασιασμό μπορείτε να πάρετε δεδομένο ότι $0 + n = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Λύση.

Αρχικά έχουμε

$$n + 1 = n + S0 = S(n + 0) = Sn$$

όπου στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό του 1 και στις άλλες δύο τον ορισμό της πρόσθεσης. Στη συνέχεια δείχνουμε ότι $1 + n = Sn$ με επαγωγή στο n.

Για $n = 0$ έχουμε $1 + 0 = 1 = S0$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο n ισχύει $1 + n = Sn$ και δείχνουμε ότι $1 + Sn = S(Sn)$. Πράγματι

$$\begin{aligned} 1 + Sn &= S(1 + n) \qquad \text{(ορισμός πρόσθεσης)} \\ &= S(n + 1) \qquad \text{(Επαγωγική Υπόθεση)} \\ &= S(Sn) \qquad \text{(γιατί } Sn = n + 1\text{)} \\ &= Sn + 1 \qquad \text{(εφαρμόζουμε } Sm = m + 1 \text{ για } m = Sn\text{).} \end{aligned}$$

Σχετικά με το δεύτερο ζητούμενο παρατηρούμε πρώτα ότι $n \cdot 1 = n \cdot S0 = n \cdot 0 + n = 0 + n = n$ από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού και τις ιδιότητες της πρόσθεσης.

Τέλος αποδεικνύουμε την ισότητα $1 \cdot n = n$ με επαγωγή στο n. Για $n = 0$ έχουμε από τον ορισμό,

$$1 \cdot 0 = 0 = n.$$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $1 \cdot n = n$. Τότε

$$\begin{aligned} 1 \cdot Sn &= 1 \cdot n + 1 \quad \text{(εξ ορισμού)} \\ &= n + 1 \quad \text{(Επαγωγική Υπόθεση)} \\ &= Sn \quad \text{(από την πρώτη ισότητα).} \end{aligned}$$

Άσκηση 2 (Πρόβλημα x5.1). Δείξτε ότι ο πολλαπλασιασμός στους φυσικούς αριθμούς είναι προσεταιριστική πράξη, δηλαδή για κάθε n, m, k έχουμε

$$(n \cdot m) \cdot k = n \cdot (m \cdot k).$$

Λύση.

Με επαγωγή στο k. Για $k = 0$ έχουμε

$$(n \cdot m) \cdot 0 = 0 \quad \text{και} \quad n \cdot (m \cdot 0) = n \cdot 0 = 0,$$

για κάθε n, m. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $(n \cdot m) \cdot k = n \cdot (m \cdot k)$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Δείχνουμε ότι

$$(n \cdot m) \cdot Sk = n \cdot (m \cdot Sk)$$

για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Έστω $n, m \in \mathbb{N}$, τότε

$$\begin{aligned} (n \cdot m) \cdot Sk &= (n \cdot m) \cdot k + (n \cdot m) \quad \text{(εξ ορισμού)} \\ &= n \cdot (m \cdot k) + (n \cdot m) \quad \text{(Επαγωγική Υπόθεση).} \end{aligned}$$

Από την άλλη

$$\begin{aligned} n \cdot (m \cdot Sk) &= n \cdot ((m \cdot k) + m) \quad \text{(εξ ορισμού)} \\ &= n \cdot (m \cdot k) + (n \cdot m) \quad \text{(επιμεριστική ιδιότητα).} \end{aligned}$$

Άρα

$$(n \cdot m) \cdot Sk = n \cdot (m \cdot k) + (n \cdot m) = n \cdot (m \cdot Sk)$$

και έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 3 (Πρόβλημα x5.2 - Απαιτητική). Δείξτε ότι ο πολλαπλασιασμός στους φυσικούς αριθμούς έχει την αντιμεταθετική ιδιότητα, δηλαδή για κάθε n, m έχουμε

$$n \cdot m = m \cdot n.$$

Λύση.
Όπως και με την πρόσθεση χρειαζόμαστε πρώτα δύο βοηθητικά λήμματα.

Λήμμα 1. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $n \cdot 0 = 0 \cdot n = 0$.

Απόδειξη. Είναι άμεσο από τον ορισμό ότι $n \cdot 0 = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείχνουμε την ισότητα $0 \cdot n = 0$ για κάθε n με επαγωγή n. Για $n = 0$ έχουμε $0 \cdot n = 0 \cdot 0 = 0$. Υποθέτουμε ότι ισχύει $0 \cdot n = 0$ για κάποιο n και έχουμε

$$0 \cdot Sn = 0 \cdot n + 0 = 0 + 0 = 0,$$

όπου στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό του πολλαπλασιασμού και στη δεύτερη την Επαγωγική Υπόθεση.

Σχόλιο: Όπως και στην πρόσθεση χρειαζόμαστε να ξέρουμε τι γίνεται όταν το πρώτο όρισμα (δηλαδή η πρώτη μεταβλητή) της πράξης είναι ο επόμενος κάποιου αριθμού. Στην πρόσθεση αποδείξαμε ότι το $Sn + m$ είναι ίσο με $n + Sm$. Εδώ χρειαζόμαστε την αντίστοιχη ισότητα για το $Sn \cdot m$.

Λήμμα 2. Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ έχουμε $Sn \cdot m = (n \cdot m) + m$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στο m. Για $m = 0$ έχουμε

$$Sn \cdot 0 = 0 \quad \text{και} \quad (n \cdot 0) + 0 = 0 + 0 = 0.$$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο m έχουμε $Sn \cdot m = (n \cdot m) + m$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και δείχνουμε ότι

$$Sn \cdot Sm = (n \cdot Sm) + Sm$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$\begin{aligned} Sn \cdot Sm &= (Sn \cdot m) + Sn \quad \text{(εξ ορισμού)} \\ &= [(n \cdot m) + m] + Sn \quad \text{(Επαγωγική Υπόθεση)} \\ &= (n \cdot m) + (m + Sn) \quad \text{(προσεταιρισμός πρόσθεσης)} \\ &= (n \cdot m) + (Sm + n) \quad \text{(γνωστό Λήμμα).} \end{aligned}$$

[Στην τελευταία ισότητα, αντί του Λήμματος θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τις γνωστές ιδιότητες της πρόσθεσης και την Άσκηση 1: $m + Sn = m + (n + 1) = (m + 1) + n = Sm + n$.]

Από την άλλη

$$\begin{aligned} (n \cdot Sm) + Sm &= [(n \cdot m) + n] + Sm \quad \text{(εξ ορισμού)} \\ &= (n \cdot m) + (n + Sm) \quad \text{(προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης)} \\ &= (n \cdot m) + (Sm + n) \quad \text{(αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης).} \end{aligned}$$

Άρα

$$Sn \cdot Sm = (n \cdot m) + (Sm + n) = (n \cdot Sm) + Sm$$

και έχουμε το ζητούμενο του λήμματος.

Τέλος δείχνουμε με επαγωγή στο m ότι $n \cdot m = m \cdot n$ για όλα τα n, m. Για $m = 0$ έχουμε

$$n \cdot 0 = 0 \cdot n = 0 \quad \text{(από το Λήμμα 1 πιο πάνω)}$$

για κάθε n. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $m \in \mathbb{N}$ έχουμε $n \cdot m = m \cdot n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και δείχνουμε ότι

$$n \cdot Sm = Sm \cdot n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$\begin{aligned} n \cdot Sm &= (n \cdot m) + n \quad \text{(εξ ορισμού)} \\ &= (m \cdot n) + n \quad \text{(Επαγωγική Υπόθεση).} \end{aligned}$$

Από την άλλη

$$Sm \cdot n = (m \cdot n) + n \quad \text{(εφαρμόζουμε το Λήμμα 2 με το } m \text{ στη θέση του } n \text{ και αντιστρόφως).}$$

Άρα

$$n \cdot Sm = (m \cdot n) + n = Sm \cdot n$$

και έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 4 (Πρόβλημα x5.3). Η πράξη της ύψωσης σε δύναμη ορίζεται με αναδρομή στο m,

$$\begin{aligned} n^0 &= 1, \\ n^{Sm} &= n^m \cdot n, \end{aligned}$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ με $n \neq 0$.

Δείξτε ότι για κάθε n, m, k έχουμε

$$\begin{aligned} n^{m+k} &= n^m \cdot n^k, \\ n^{m \cdot k} &= \left(n^m\right)^k. \end{aligned}$$

Λύση.

Δείχνουμε και τις δύο ισότητες με επαγωγή στο k. Στην πρώτη έχουμε για $k = 0$,

$$n^{m+k} = n^{m+0} = n^m = n^m \cdot 1 = n^m \cdot n^0 = n^m \cdot n^k$$

για κάθε m, n με $n \neq 0$, όπου στην ισότητα $n^m = n^m \cdot 1$ χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό του πολλαπλασιασμού.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο k ισχύει $n^{m+k} = n^m \cdot n^k$, για κάθε m, n με $n \neq 0$. Δείχνουμε ότι

$$n^{m+Sk} = n^m \cdot n^{Sk}$$

για κάθε m, n με $n \neq 0$. Έστω $m, n \in \mathbb{N}$ με $n \neq 0$. Τότε

$$\begin{aligned} n^{m+Sk} &= n^{S(m+k)} \quad \text{(ορισμός πρόσθεσης)} \\ &= n^{m+k} \cdot n \quad \text{(ορισμός ύψωσης σε δύναμη)} \\ &= (n^m \cdot n^k) \cdot n \quad \text{(Επαγωγική Υπόθεση)} \\ &= n^m \cdot (n^k \cdot n) \quad \text{(προσεταιρισμός πολλαπλασιασμού)} \\ &= n^m \cdot n^{Sk} \quad \text{(ορισμός ύψωσης σε δύναμη)} \end{aligned}$$

και έχουμε το ζητούμενο.

Σχετικά με τη δεύτερη ισότητα κάνουμε πρώτα το εξής σχόλιο. Εφόσον έχουμε ορίσει την ύψωση σε δύναμη n^m για $n \neq 0$, για να έχει νόημα η έκφραση $(n^m)^k$ θα πρέπει να γνωρίζουμε ότι $n^m \neq 0$ για κάθε m, n με $n \neq 0$. Αυτό αποδεικνύεται σχετικά εύκολα και το παίρνουμε δεδομένο σε αυτή την άσκηση.

Για $k = 0$ έχουμε,

$$n^{m \cdot k} = n^{m \cdot 0} = n^0 = 1 = (n^m)^0 = (n^m)^k,$$

για κάθε m, n με $n \neq 0$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο k ισχύει $n^{m \cdot k} = (n^m)^k$, για κάθε m, n με $n \neq 0$. Δείχνουμε ότι

$$n^{m \cdot Sk} = (n^m)^{Sk}.$$

Έστω $m, n \in \mathbb{N}$ με $n \neq 0$. Τότε

$$\begin{aligned} n^{m \cdot Sk} &= n^{m \cdot k + m} \quad \text{(ορισμός πολλαπλασιασμού)} \\ &= n^{m \cdot k} \cdot n^m \quad \text{(από την πρώτο ζητούμενο της άσκησης)} \\ &= (n^m)^k \cdot n^m \quad \text{(Επαγωγική Υπόθεση)} \\ &= (n^m)^{Sk} \quad \text{(ορισμός ύψωσης σε δύναμη)} \end{aligned}$$

και έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 5 (Πρόβλημα x5.4). Θεωρούμε δύο συστήματα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ και $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$, και τη μοναδική συνάρτηση $\pi : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_2$ με

$$\begin{aligned} \pi(0_1) &= 0_2 \\ \pi(S_1 n) &= S_2 \pi(n), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Σε κάθε σύστημα φυσικών αριθμών ορίζονται οι αντίστοιχες πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού: $+_1$, $\cdot_1$ και $+_2$, $\cdot_2$.

Δείξτε ότι η π είναι ομοιομορφισμός ως προς αυτές τις πράξεις, δηλαδή για κάθε $n, m \in \mathbb{N}_1$ έχουμε

$$\begin{aligned} \pi(n +_1 m) &= \pi(n) +_2 \pi(m) \\ \pi(n \cdot_1 m) &= \pi(n) \cdot_2 \pi(m). \end{aligned}$$

Λύση.

Δείχνουμε και τις δύο ισότητες με επαγωγή στο $m \in \mathbb{N}_1$. Στην πρώτη για $m = 0_1$ έχουμε

$$\pi(n +_1 m) = \pi(n +_1 0_1) = \pi(n) = \pi(n) +_2 0_2 = \pi(n) +_2 \pi(0_1) = \pi(n) +_2 \pi(m),$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}_1$.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $m \in \mathbb{N}_1$ ισχύει $\pi(n +_1 m) = \pi(n) +_2 \pi(m)$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}_1$. Δείχνουμε ότι

$$\pi(n +_1 S_1 m) = \pi(n) +_2 \pi(S_1 m)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}_1$. Έστω $n \in \mathbb{N}_1$, τότε

$$\begin{aligned} \pi(n +_1 S_1 m) &= \pi(S_1(n +_1 m)) \quad \text{(ορισμός πρόσθεσης } +_1\text{)} \\ &= S_2 \pi(n +_1 m) \quad \text{(ιδιότητες } \pi\text{)} \\ &= S_2(\pi(n) +_2 \pi(m)) \quad \text{(Επαγωγική Υπόθεση)} \\ &= \pi(n) +_2 S_2 \pi(m) \quad \text{(ορισμός πρόσθεσης } +_2\text{)} \\ &= \pi(n) +_2 \pi(S_1 m) \quad \text{(ιδιότητες } \pi\text{)} \end{aligned}$$

και έχουμε το ζητούμενο.

Στη δεύτερη ισότητα έχουμε για $m = 0_1$,

$$\pi(n \cdot_1 m) = \pi(n \cdot_1 0_1) = \pi(0_1) = 0_2 = \pi(n) \cdot_2 0_2 = \pi(n) \cdot_2 \pi(0_1) = \pi(n) \cdot_2 \pi(m)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}_1$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $m \in \mathbb{N}_1$ ισχύει $\pi(n \cdot_1 m) = \pi(n) \cdot_2 \pi(m)$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}_1$. Δείχνουμε ότι

$$\pi(n \cdot_1 S_1 m) = \pi(n) \cdot_2 \pi(S_1 m)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}_1$. Έστω $n \in \mathbb{N}_1$, τότε

$$\begin{aligned}
\pi(n \cdot_1 S_1 m) &= \pi(n \cdot_1 m +_1 n) \quad \text{(ορισμός πολλαπλασιασμού } \cdot_1\text{)} \\
&= \pi(n \cdot_1 m) +_2 \pi(n) \quad \text{(από το πρώτο ζητούμενο)} \\
&= \pi(n) \cdot_2 \pi(m) +_2 \pi(n) \quad \text{(Επαγωγική Υπόθεση)} \\
&= \pi(n) \cdot_2 S_2\pi(m) \quad \text{(ορισμός πολλαπλασιασμού } \cdot_2\text{)} \\
&= \pi(n) \cdot_2 \pi(S_1 m) \qquad \text{(ιδιότητες } \pi\text{)}
\end{aligned}$$

και έχουμε το ζητούμενο.

Υπενθύμιση: Σταθεροποιούμε ένα σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}, 0, S)$ και ορίζουμε τις σχέσεις $\leq$, και $<$ ως εξής:

$$\begin{aligned}
n \leq m &\iff (\exists k \in \mathbb{N})[n + k = m] \\
n < m &\iff n \leq m \;\&\; n \neq m,
\end{aligned}$$

όπου $n, m \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 6.

(i) Δείξτε ότι $n < Sn$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Δείξτε ότι για κάθε $k, n \in \mathbb{N}$, αν $k < n$ τότε $Sk \leq n$.

Λύση.

(i) Όπως έχουμε δει $n + S0 = S(n + 0) = Sn$ άρα $n \leq S_n$. Από γνωστό Λήμμα $Sn \neq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως $n < Sn$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Αφού $k < n$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ με $k + m = n$. Επιπλέον $m \neq 0$ γιατί $k \neq n$. Άρα $m = St$ για κάποιο $t \in \mathbb{N}$. Τότε

$$n = k + m = k + St = Sk + t.$$

Αφού $Sk + t = n$ έχουμε $Sk \leq t$.

Άσκηση 7. Αποδείξτε το Θεώρημα Αναδρομής (χωρίς παραμέτρους) με τη βοήθεια του Θεωρήματος Αναδρομής με παραμέτρους.

Λύση.

Θεωρούμε ένα σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}, 0, S)$, ένα σύνολο E, ένα στοιχείο $a \in E$ και $h : E \to E$. Δείχνουμε ότι υπάρχει μοναδική συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to E$ με $f(0) = a$ και $f(Sn) = h(f(n))$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Θεωρούμε το σύνολο $Y = \{\emptyset\}$ και τις συναρτήσεις $g : Y \to E : g(\emptyset) = a$,

$$H : E \times \mathbb{N} \times Y \to E : H(x, n, y) = h(x).$$

Από το Θεώρημα Αναδρομής με παραμέτρους υπάρχει μοναδική συνάρτηση $F : \mathbb{N} \times Y \to E$ με

$$\begin{aligned}
F(0, y) &= g(y) \\
F(Sn, y) &= H(F(n, y), n, y), \quad n \in \mathbb{N},\; y \in Y.
\end{aligned}$$

Ορίζουμε $f : \mathbb{N} \to E : f(n) = F(n, \emptyset)$. Τότε

$$f(0) = F(n, \emptyset) = g(\emptyset) = a$$

και

$$f(Sn) = F(Sn, \emptyset) = H(F(n, \emptyset), n, \emptyset) = h(F(n, \emptyset)) = h(f(n))$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Η μοναδικότητα της f μπορεί φυσικά να αποδειχθεί με επαγωγή αλλά μπορούμε επίσης να τη δείξουμε χρησιμοποιώντας τη μοναδικότητα της F: αν $f' : \mathbb{N} \to E$ ικανοποιεί $f'(0) = a$ και

$f'(Sn) = h(f'(n))$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η συνάρτηση $F' : \mathbb{N} \times Y \to E$ με $F'(n,y) = f'(n)$ ικανοποιεί τις ιδιότητες

$$F'(0,y) = f'(0) = a = g(\emptyset) = g(y)$$
$$F'(Sn,y) = f'(Sn) = h(f'(n)) = H(f'(n),n,y),$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ και $y \in Y = \{\emptyset\}$. Από τη μοναδικότητα της F έχουμε $F(n,y) = F'(n,y)$ και επομένως $f(n) = f'(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 8 (Ιδιαίτερα απαιτητική). Αποδείξτε το Θεώρημα Αναδρομής με παραμέτρους:

Θεωρούμε ένα σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}, 0, S)$ και μη κενά σύνολα E, Y. Τότε για κάθε συναρτήσεις $g : Y \to E$ και $h : E \times \mathbb{N} \times Y \to E$ υπάρχει μοναδική συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times Y \to E$ έτσι ώστε

$$f(0,y) = g(y)$$
$$\text{και} \quad f(Sn,y) = h(f(n,y),n,y)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $y \in Y$.

Υπόδειξη. Να εφαρμόσετε για κάθε $y \in Y$ το Θεώρημα Αναδρομής χωρίς παραμέτρους στα

$$E' = \mathbb{N} \times E,\ a_y = (0, g(y)) \text{ και } h_y : E' \to E' : h_y(m,b) = (Sm, h(b,m,y)).$$

Αν $\varphi_y : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times E$ είναι η συνάρτηση που προκύπτει από την εφαρμογή του Θεωρήματος Αναδρομής στα προηγούμενα, εξηγήστε γιατί ορίζεται η

$$\varphi : \mathbb{N} \times Y \to \mathbb{N} \times E : \varphi(n,y) = \varphi_y(n)$$

και θεωρήστε την $f : \mathbb{N} \times Y \to E : f(n,y)$ = η δεύτερη συντεταγμένη του $\varphi(n,y)$.

Λύση.

Θεωρούμε συναρτήσεις g και h όπως στην υπόθεση. Η μοναδικότητα αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή στο n. Αν έχουμε f και f' που ικανοποιούν τις ζητούμενες ισότητες και πάρουμε ένα $y \in Y$, τότε

$$f(0,y) = g(y) = f'(0,y)$$

και υποθέτοντας ότι για κάποιο n ισχύει $f(n,y) = f'(n,y)$ τότε

$$f(Sn,y) = h(f(n,y),n,y) = h(f'(n,y),n,y) = f'(Sn,y).$$

Άρα $f(n,y) = f'(n,y)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και αφού το y είναι αυθαίρετο προκύπτει ότι $f = f'$.

Συνεχίζουμε με την ύπαρξη μια τέτοιας f. Σταθεροποιούμε αρχικά $y \in Y$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα Αναδρομής χωρίς παραμέτρους στα $E' = \mathbb{N} \times E$, $a_y = (0, g(y)) \in \mathbb{N} \times E$ και στη συνάρτηση

$$h_y : \mathbb{N} \times E \to \mathbb{N} \times E : h_y(m,b) = (Sm, h(b,m,y)). \tag{1}$$

Υπάρχει τότε μοναδική συνάρτηση $\varphi_y : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times E$ έτσι ώστε

$$\begin{cases} \varphi_y(0) = a_y = (0, g(y)), \\ \varphi_y(Sn) = h_y(\varphi_y(n)) \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.. \end{cases} \tag{2}$$

Ας υποθέσουμε προς το παρόν ότι ορίζεται η συνάρτηση

$$\varphi : \mathbb{N} \times Y \to \mathbb{N} \times E : \varphi(n,y) = \varphi_y(n) \tag{3}$$

όπου η φ_y είναι όπως πιο πάνω για κάθε $y \in Y$.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις των προβολών,

$$\mathrm{pr}_1 : \mathbb{N} \times E : \mathrm{pr}_1(m,b) = m, \quad \mathrm{pr}_2 : \mathbb{N} \times E : \mathrm{pr}_2(m,b) = b.$$

Τότε ορίζεται η

$$f : \mathbb{N} \times Y \to E : f(n,y) = \mathrm{pr}_2(\varphi(n,y)) \tag{4}$$

με άλλα λόγια η f είναι η σύνθεση $\mathrm{pr}_2 \circ \varphi$. Δείχνουμε ότι αυτή η f ικανοποιεί τις ζητούμενες ισότητες.

Αρχικά αν γράψουμε $\varphi(n,y) = (m,b)$ προκύπτει από τον ορισμό της h_y στο (1) πιο πάνω ότι

$$h_y(\varphi(y,n)) = h_y(m,b) = (Sm, h(b,m,y)).$$

Επειδή $m = \mathrm{pr}_1(\varphi(n,y))$ και $b = \mathrm{pr}_2(\varphi(n,y))$ προκύπτει ότι

(5) $\quad \mathrm{pr}_1(h_y(\varphi(n,y))) = S(\mathrm{pr}_1(\varphi(n,y))) \quad$ και $\quad \mathrm{pr}_2(h_y(\varphi(n,y))) = h(\mathrm{pr}_2(\varphi(n,y)), \mathrm{pr}_1(\varphi(n,y)), y)$

για όλα τα $(n,y) \in \mathbb{N} \times E$.

Έπειτα ισχυριζόμαστε ότι

(6) $$\mathrm{pr}_1(\varphi(n,y)) = n \text{ για κάθε } (n,y) \in \mathbb{N} \times Y.$$

Αυτό το δείχνουμε με επαγωγή στο n. Σταθεροποιούμε ένα $y \in Y$. Για $n = 0$ έχουμε από τον ορισμό της φ στη (3) και από τη (2) ότι

$$\mathrm{pr}_1(\varphi(0,y)) = \mathrm{pr}_1(\varphi_y(0)) = \mathrm{pr}_1(0, g(y)) = 0.$$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\mathrm{pr}_1(\varphi(n,y)) = n$. Τότε

$$\begin{aligned}
\mathrm{pr}_1(\varphi(Sn,y)) &= \mathrm{pr}_1(\varphi_y(Sn)) && \text{(ορισμός } \varphi) \\
&= \mathrm{pr}_1(h_y(\varphi_y(n))) && \text{(από τη (2))} \\
&= \mathrm{pr}_1(h_y(\varphi(n,y))) && \text{(ορισμός } \varphi) \\
&= S(\mathrm{pr}_1(\varphi(n,y))) && \text{(από τη (5))} \\
&= S(n) && \text{(Επαγωγική Υπόθεση).}
\end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την επαγωγή.

Στη συνέχεια για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $y \in Y$ έχουμε με τη βοήθεια των (4), (3) και (2) ότι

$$f(0,y) = \mathrm{pr}_2(\varphi(0,y)) = \mathrm{pr}_2(\varphi_y(0)) = \mathrm{pr}_2(0, g(y)) = g(y),$$

καθώς και

$$\begin{aligned}
f(Sn,y) &= \mathrm{pr}_2(\varphi(Sn,y)) \\
&= \mathrm{pr}_2(\varphi_y(Sn)) \\
&= \mathrm{pr}_2(h_y(\varphi_y(n))) \\
&= \mathrm{pr}_2(h_y(\varphi(n,y))) \\
&= h(\mathrm{pr}_2(\varphi(n,y)), \mathrm{pr}_1(\varphi(n,y)), y) && \text{(από τη (5))} \\
&= h(f(n,y), n, y)
\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της f στην (4) πιο πάνω καθώς και την (6). Επομένως η f ικανοποιεί τις ζητούμενες ισότητες.

Όλα τα πιο πάνω έγιναν με την υπόθεση ότι ορίζεται η φ σύμφωνα με την (3). Εκ πρώτης όψεως αυτό φαίνεται προφανές καθώς έχουμε ορίσει τη φ_y για κάθε $y \in Y$. Επειδή όμως η συνάρτηση αποτελεί <u>σύνολο</u> ζευγών χρειαζόμαστε στην προκειμένη περίπτωση να εξασφαλίσουμε ότι ορίζεται <u>*το σύνολο όλων των ζευγών*</u> της μορφής $((n,y), \varphi_y(n))$ όπου $(n,y) \in \mathbb{N} \times E$. Επομένως δεν μας αρκεί να γνωρίζουμε μόνο ότι ορίζεται η τιμή $\varphi_y(n)$ για κάθε n, y.

Για να ορίσουμε τη φ χρειαζόμαστε την ουσία να έχουμε τη συνάρτηση που παίρνει το y και το απεικονίζει στη φ_y. Για να γίνει αυτό πρέπει να εξασφαλίσουμε το αντίστοιχο αποτέλεσμα για τις συναρτήσεις h_y. Ορίζουμε λοιπόν

$$H = \{(y,\tau) \in Y \times (\mathbb{N} \times E \to \mathbb{N} \times E) \mid \forall (m,b) \in \mathbb{N} \times E \; (\tau(m,b) = h(Sm, h(b,m,y)))\}$$

όπου $(\mathbb{N} \times E \to \mathbb{N} \times E)$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το $\mathbb{N} \times E$ στο $\mathbb{N} \times E$. Η συνθήκη

$$\forall (m,b) \in \mathbb{N} \times E \; (\tau(m,b) = h(Sm, h(b,m,y)))$$

είναι οριστική, επομένως το H είναι σύνολο από το Αξίωμα Διαχωρισμού. Επιπλέον για κάθε $y \in Y$ από τον ορισμό του H υπάρχει μοναδική τ με $(y,\tau) \in H$ γιατί όλες οι τιμές της τ καθορίζονται από την πιο πάνω οριστική συνθήκη. Επομένως το H είναι συνάρτηση, ως συνήθως συμβολίζουμε $H(y) =$ το μοναδικό τ με $(y,\tau) \in H$. Παρατηρούμε ότι το $H(y)$ είναι συνάρτηση από το $\mathbb{N}\times E$ στο $\mathbb{N}\times E$, η οποία μάλιστα ικανοποιεί τον ορισμό της h_y στη (1). Επομένως ισχύει ότι

$$\text{η } H(y) \text{ είναι η πιο πάνω } h_y \text{ για κάθε } y \in Y.$$

Έπειτα ορίζουμε

$$\Phi = \{(y,\rho) \in Y \times (\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times E) \mid \rho(0) = (0, g(y)) \text{ και } \forall n\ (\rho(Sn) = H(y)(\rho(n)))\}.$$

Οι συνθήκες

$$\rho(0) = (0, g(y)) \text{ και } \forall n\ (\rho(Sn) = H(y)(\rho(n)))$$

είναι οριστικές -γι' αυτό καθοριστικός είναι ο ρόλος της H. Συνεπώς το πιο πάνω Φ είναι σύνολο από το Αξίωμα Διαχωρισμού. Επιπλέον για κάθε $y \in Y$ υπάρχει μοναδικό ρ που ικανοποιεί ότι $(y,\rho) \in \Phi$. Η ύπαρξη και μοναδικότητα του ρ προκύπτει από το Θεώρημα Αναδρομής χωρίς παραμέτρους: επειδή $H(y) = h_y$ η προηγούμενη συνάρτηση ρ δεν είναι άλλη από τη φ_y. Επομένως το σύνολο Φ είναι συνάρτηση. Είναι σαφές από τον ορισμό ότι για κάθε $y \in Y$ η συνάρτηση $\Phi(y)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις (2). Δηλαδή

$$\text{η } \Phi(y) \text{ είναι η πιο πάνω } \varphi_y \text{ για κάθε } y \in Y.$$

Τέλος ορίζουμε

$$\varphi = \{((n,y),(m,b)) \in (\mathbb{N} \times Y) \times (\mathbb{N} \times E) \mid \Phi(y)(n) = (m,b)\}.$$

Τότε για κάθε $(n,y) \in \mathbb{N}\times Y$ υπάρχει μοναδικό $(m,b) \in \mathbb{N}\times E$ με $((n,y),(m,b))$, συγκεκριμένα το $(m,b) = \Phi(y)(n)$. Έχουμε λοιπόν

$$\varphi(n,y) = \Phi(y)(n) \text{ για κάθε } (n,y) \in \mathbb{N} \times Y.$$

Εφόσον για κάθε $y \in Y$ ισχύει $\Phi(y) = \varphi_y$ προκύπτει ότι η φ ικανοποιεί την (3). Αυτό ολοκληρώνει την επίλυση της άσκησης.