Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

5ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Άσκηση 4.4 plus σελ. 39)**.**

(i) Αν $(x, y, z) = (x', y', z')$ δείξτε ότι $x = x'$, $y = y'$ και $z = z'$.

(ii) Δίνονται σύνολα A, B και C. Εξηγήστε γιατί το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B \times C$ είναι σύνολο.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε αυτά που ξέρετε για τα ζεύγη αντικειμένων και το καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων.

Άσκηση 2 (Κατασκευή συστήματος φυσικών αριθμών από δοσμένο σύστημα)**.** Θεωρούμε ένα σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$, ένα σύνολο $\mathbb{N}_2$ και μια $1-1$ και επί συνάρτηση $\pi : \mathbb{N}_1 \rightarrowtail\!\!\!\rightarrow \mathbb{N}_2$. Δείξτε ότι υπάρχουν $0_2 \in \mathbb{N}_2$ και $S_2 : \mathbb{N}_2 \to \mathbb{N}_2$ έτσι ώστε η τριάδα $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$ να είναι σύστημα φυσικών αριθμών.

Άσκηση 3. Θεωρούμε ένα σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}, 0, S)$, ένα σύνολο X, ένα στοιχείο $x_0 \in X$ και μια συνάρτηση $g : X \to X$. Δείξτε τα εξής:

(i) Υπάρχει μια ακολουθία συνόλων $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με τις ιδιότητες $A_0 = \{x_0\}$ και $A_{Sn} = g[A_n]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Υπάρχει ένα **αριθμήσιμο** σύνολο B με την ιδιότητες $x_0 \in B$ και αν $x \in B$ τότε $g(x) \in B$.

Άσκηση 4. Δείξτε ότι

$$Sn = n + 1 = 1 + n \quad \text{και} \quad n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ χωρίς να επικαλεστείτε την αντιμεταθετική ιδιότητα των πράξεων. Στις ισότητες που αφορούν τον πολλαπλασιασμό μπορείτε να πάρετε δεδομένο ότι $0 + n = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 5 (Πρόβλημα x5.1)**.** Δείξτε ότι ο πολλαπλασιασμός στους φυσικούς αριθμούς είναι προσεταιριστική πράξη, δηλαδή για κάθε n, m, k έχουμε

$$(n \cdot m) \cdot k = n \cdot (m \cdot k).$$

Άσκηση 6 (Πρόβλημα x5.3)**.** Η πράξη της ύψωσης σε δύναμη ορίζεται με αναδρομή στο m,

$$n^0 = 1,$$
$$n^{Sm} = n^m \cdot n,$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ με $n \neq 0$.

Δείξτε ότι για κάθε n, m, k έχουμε

$$n^{m+k} = n^m \cdot n^k,$$
$$n^{m\cdot k} = (n^m)^k.$$

Άσκηση 7 (Πρόβλημα x5.4)**.** Θεωρούμε δύο συστήματα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ και $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$, και τη μοναδική συνάρτηση $\pi : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_2$ με

$$\pi(0_1) = 0_2$$
$$\pi(S_1 n) = S_2 \pi(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Σε κάθε σύστημα φυσικών αριθμών ορίζονται οι αντίστοιχες πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού: $+_1$, $\cdot_1$ και $+_2$, $\cdot_2$.

Δείξτε ότι η π είναι ομοιομορφισμός ως προς αυτές τις πράξεις, δηλαδή για κάθε $n, m \in \mathbb{N}_1$ έχουμε

$$\pi(n +_1 m) = \pi(n) +_2 \pi(m)$$
$$\pi(n \cdot_1 m) = \pi(n) \cdot_2 \pi(m).$$