Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

4ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Ασκήσεις 3.13 και 3.16)**.**

(i) Δείξτε ότι $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ και $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

(ii) Δείξτε ότι $\bigcup \emptyset = \bigcup\{\emptyset\} = \emptyset$.

Λύση.

(i) Για την πρώτη ισότητα έχουμε

$$x \in \mathcal{P}(\emptyset) \iff x \subseteq \emptyset \iff x = \emptyset \iff x \in \{\emptyset\}$$

για κάθε x, επομένως από το Αξίωμα της Έκτασης προκύπτει $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Για τη δεύτερη ισότητα έχουμε

$$x \in \mathcal{P}(\{\emptyset\}) \iff x \subseteq \{\emptyset\} \iff x = \emptyset \lor x = \{\emptyset\} \iff x \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

για κάθε x. Πάλι από το Αξίωμα της Έκτασης προκύπτει η ζητούμενη ισότητα.

(ii) Αν υπήρχε $x \in \bigcup \emptyset$ τότε θα υπήρχε ένα σύνολο A με τις ιδιότητες $A \in \emptyset$ και $x \in A$. Αυτό είναι άτοπο γιατί το κενό σύνολο $\emptyset$ δεν περιέχει στοιχεία. Άρα $\bigcup \emptyset = \emptyset$.

Αν υπήρχε $x \in \bigcup\{\emptyset\}$ τότε θα υπήρχε ένα σύνολο A με τις ιδιότητες $A \in \{\emptyset\}$ και $x \in A$. Εφόσον $A \in \{\emptyset\}$ θα ίσχυε $A = \emptyset$ το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το $x \in A$. Άρα $\bigcup\{\emptyset\} = \emptyset$.

Άσκηση 2. Διατυπώστε αυστηρά τα αξιώματα του Δυναμοσυνόλου και της Ένωσης.

Λύση.

Αξίωμα του Δυναμοσυνόλου:

$$(\forall z)(\exists w)\big[\,\mathrm{set}(z) \longrightarrow \big\{\,\mathrm{set}(w)\ \&\ (\forall y)[\,y \in w \longleftrightarrow (\forall t)[t \in y \ \rightarrow\ t \in z]\,]\,\big\}\big].$$

Εξήγηση: Αν έχουμε ένα σύνολο z τότε υπάρχει ένα σύνολο w (το δυναμοσύνολο του z) με την ιδιότητα τα στοιχεία του w να είναι ακριβώς όλα τα y που ικανοποιούν $y \subseteq z$. Με άλλα λόγια το w είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του z.

Αξίωμα της Ένωσης:

$$(\forall z)(\exists w)\big[\,\mathrm{set}(z) \longrightarrow \big\{\,\mathrm{set}(w)\ \&(\forall x)[\,x \in w \longleftrightarrow (\exists y)[y \in z\ \&\ x \in y]\,]\big\}\big].$$

Εξήγηση: Αν έχουμε ένα σύνολο z τότε υπάρχει ένα σύνολο w (η ένωση του z) με την ιδιότητα τα στοιχεία του w να είναι ακριβώς όλα τα x που ικανοποιούν $x \in y$ για κάποιο $y \in z$.

Άσκηση 3. Δίνονται αντικείμενα x, y, a, b. Αποδείξτε με βάση τα αξιώματα ότι υπάρχει μοναδικό σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι ακριβώς τα x, y, a, b.

Λύση.

Από το Αξίωμα του Ζεύγους υπάρχουν τα σύνολα $\{x, y\}$ και $\{a, b\}$. Με μία ακόμα εφαρμογή του Αξιώματος του Ζεύγους υπάρχει το σύνολο $\mathcal{E} = \{\{x, y\}, \{a, b\}\}$ και από το Αξίωμα της Ένωσης υπάρχει το σύνολο $\bigcup \mathcal{E}$.

Τότε για κάθε t,

$$\begin{aligned} t \in \bigcup \mathcal{E} &\iff (\exists z)[\,z \in \mathcal{E}\ \&\ t \in z\,] \\ &\iff t \in \{x, y\} \ \lor\ t \in \{a, b\} \\ &\iff t = x \ \lor t = y \ \lor t = a \ \lor\ t = b. \end{aligned}$$

Δηλαδή τα στοιχεία του $\bigcup\mathcal{E}$ είναι ακριβώς τα αντικείμενα x, y, a, b. Από το Αξίωμα της Έκτασης το $\bigcup\mathcal{E}$ είναι το μοναδικό σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι ακριβώς αυτά τα αντικείμενα.

Άσκηση 4 (Πρόβλημα x3.2)**.** Δίνονται σύνολα A και B. Εξετάστε με βάση τα αξιώματα αν υπάρχουν σύνολα X_1, X_2, X_3 και X_4 με τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\begin{aligned} z \in X_1 &\iff (\exists x \in A)[z = \{\emptyset, x\}] \\ z \in X_2 &\iff \text{set}(z) \ \&\ z \neq \emptyset \\ z \in X_3 &\iff (\exists x \in A)(\exists y \in B)[z = \{x, y\}] \\ z \in X_4 &\iff (\exists X)[X \subseteq A \ \&\ z = \mathcal{P}(X)] \end{aligned}$$

όπου το z είναι αντικείμενο του κόσμου $\mathcal{W}$.

Υπόδειξη: Όπου δείχνετε ότι ορίζεται σύνολο εφαρμόστε το Αξίωμα Διαχωρισμού σε κατάλληλο σύνολο Y και κατάλληλη οριστική συνθήκη P.

Λύση.

Υπάρχει τέτοιο σύνολο X_1. Παρατηρούμε πως αν $x \in A$ τότε $\{\emptyset, x\} \subseteq A \cup \{\emptyset\}$ και άρα $\{\emptyset, x\} \in \mathcal{P}(A \cup \{\emptyset\})$. Άρα πρέπει να πάρουμε το σύνολο όλων των $z \in \mathcal{P}(A \cup \{\emptyset\})$ με την ιδιότητα $z = \{\emptyset, x\}$ για κάποιο $x \in A$, δηλαδή

$$X_1 = \{z \in \mathcal{P}(A \cup \{\emptyset\}) \mid \exists x \in A(z = \{\emptyset, x\})\}.$$

(Σχόλιο: Η συνθήκη $P(z) \iff \exists x \in A(z = \{\emptyset, x\})$ είναι οριστική, καθώς

$$P(z) \iff \exists x \, \forall t \, (\, t \in z \longleftrightarrow t = \emptyset \ \vee \ t = x \,).$$

Θα αποφεύγουμε όμως να αναλύουμε σε τόσο βάθος ότι μια συνθήκη είναι οριστική.)

Αφού τα $A, \{\emptyset\}$ είναι σύνολα, τότε από τα Αξιώματα της Ένωσης και του Δυναμοσυνόλου το $\mathcal{P}(A \cup \{\emptyset\})$ είναι επίσης σύνολο. Από το Αξίωμα Διαχωρισμού το X_1 είναι σύνολο. Σύμφωνα με τα πιο πάνω το X_1 ικανοποιεί τη ζητούμενη ισοδυναμία.

Δεν υπάρχει τέτοιο σύνολο X_2. Αν υπήρχε, τότε από το Αξίωμα του Ζεύγους θα είχαμε το σύνολο $\mathcal{E} = \{X_2, \{\emptyset\}\}$ και από το Αξίωμα της Ένωσης θα είχαμε το σύνολο $X_2 \cup \{\emptyset\}$. Τότε θα ίσχυε

$$\text{set}(z) \iff [\text{set}(z) \ \&\ z \neq \emptyset] \ \vee \ z = \emptyset \iff z \in X_2 \ \vee \ z = \emptyset \iff z \in X_2 \cup \{\emptyset\}$$

για κάθε z. Επομένως το $X_2 \cup \{\emptyset\}$ θα ήταν το σύνολο όλων των συνόλων, που όπως ξέρουμε από το μάθημα αυτό είναι άτοπο.

Υπάρχει τέτοιο σύνολο X_3. Όπως και στο X_1 η παρατήρηση είναι πως αν $x \in A$ και $y \in B$ τότε $\{x, y\} \subseteq A \cup B$, δηλαδή $\{x, y\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Άρα από το Αξίωμα Διαχωρισμού ορίζεται το σύνολο

$$X_3 = \{z \in \mathcal{P}(A \cup B) \mid \exists x \, \exists y \, (\, x \in A \ \&\ y \in B \& \ z = \{x, y\} \,)\}.$$

Σύμφωνα με την πιο πάνω παρατήρηση το X_3 ικανοποιεί τη ζητούμενη ισοδυναμία.

Τέλος υπάρχει τέτοιο σύνολο X_4. Παρατηρούμε πως αν $z = \mathcal{P}(X)$ για κάποιο $X \subseteq A$, τότε $z = \mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(A)$ και άρα $z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$. Εφαρμόζοντας δύο φορές το Αξίωμα του Δυναμοσυνόλου το $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ είναι σύνολο. Επομένως από το Αξίωμα Διαχωρισμού ορίζεται το σύνολο

$$X_4 = \{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \mid \exists x \, (\, x \subseteq A \ \&\ z = \mathcal{P}(x) \,)\}.$$

Σύμφωνα με όσα είπαμε το σύνολο X_4 ικανοποιεί τη ζητούμενη ισοδυναμία.

Άσκηση 5 (Πρόβλημα x3.1 - Παραλλαγή)**.** Δείξτε από τα αξιώματα ότι για κάθε σύνολο $\mathcal{E} \neq \emptyset$ υπάρχει ένα σύνολο I έτσι ώστε για κάθε x,

$$x \in I \iff (\forall A \in \mathcal{E})[x \in A].$$

Δηλαδή τα στοιχεία του I είναι τα αντικείμενα που είναι στοιχεία κάθε μέλους του $\mathcal{E}$. Εξηγείστε γιατί το I είναι μοναδικό.

Σχόλιο: Αυτό το μοναδικό σύνολο I ονομάζεται *τομή του* $\mathcal{E}$ και συμβολίζεται με $\bigcap\mathcal{E}$. Στην περίπτωση όπου $\mathcal{E} = \{A, B\}$ για κάποια σύνολα A, B συμβολίζουμε την τομή $\bigcap\mathcal{E}$ με $A \cap B$.

Σε απόμενη άσκηση δείχνουμε ότι είναι ουσιαστικό να θεωρήσουμε πως $\mathcal{E} \neq \emptyset$ για να ορίσουμε την τομή $\bigcap\mathcal{E}$.

Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι κάθε στοιχείο της τομής του $\mathcal{E}$ πρέπει να ανήκει και στην ένωση του $\mathcal{E}$ που γνωρίζουμε ότι είναι σύνολο από το Αξίωμα της Ένωσης.

Λύση.
Πρώτα παρατηρούμε ότι το $\bigcup \mathcal{E}$ είναι σύνολο από το Αξίωμα της Ένωσης. Επομένως από το Αξίωμα Διαχωρισμού το

$$I = \{x \in \bigcup \mathcal{E} \mid (\forall A \in \mathcal{E})[x \in A]\}$$

είναι επίσης σύνολο.

Δείχνουμε ότι το I ικανοποιεί τη ζητούμενη ισοδυναμία. Έστω $x \in I$, από τον ορισμό του I έχουμε ειδικότερα ότι $(\forall A \in \mathcal{E})[x \in A]$.

Αντίστροφα θεωρούμε ένα x που ικανοποιεί $(\forall A \in \mathcal{E})[x \in A]$. Από τον ορισμό του I αρκεί να δείξουμε ότι $x \in \bigcup \mathcal{E}$. Εφόσον $\mathcal{E} \neq \emptyset$ υπάρχει $A \in \mathcal{E}$, και επειδή $x \in I$ θα έχουμε ειδικότερα $x \in A$. Είναι προφανές ότι $A \subseteq \bigcup \mathcal{E}$ επομένως $x \in \bigcup \mathcal{E}$.

Τέλος εξηγούμε γιατί ένα τέτοιο σύνολο I είναι μοναδικό. Αν έχουμε ένα άλλο σύνολο I' που ικανοποιεί την ιδιότητα $x \in I' \iff (\forall A \in \mathcal{E})[x \in A]$ για κάθε x, τότε προφανώς $x \in I \iff x \in I'$ για κάθε x, δηλαδή τα I και I' έχουν τα ίδια στοιχεία. Από το Αξίωμα της Έκτασης προκύπτει $I = I'$.

Άσκηση 6.

(i) Δείξτε ότι ο κόσμος $\mathcal{W}$ δεν είναι σύνολο.

(ii) Υπάρχει σύνολο I με την ιδιότητα $x \in I$ για κάθε x;

(iii) Υπάρχει ένα σύνολο I με την ιδιότητα

$$x \in I \iff (\forall A \in \emptyset)[\, x \in A\,];$$

Λύση.
(i) Αν ο κόσμος $\mathcal{W}$ ήταν σύνολο τότε από το Αξίωμα Διαχωρισμού θα υπήρχε το σύνολο

$$V = \{x \in \mathcal{W} \mid \text{set}(x)\}$$

δηλαδή θα υπήρχε το σύνολο όλων των συνόλων, άτοπο.

Αλλιώς μπορεί κανείς να δείξει το ζητούμενο κατευθείαν ως εξής. Αν ο κόσμος $\mathcal{W}$ ήταν σύνολο τότε από το Αξίωμα Διαχωρισμού θα υπήρχε το σύνολο

$$r(\mathcal{W}) = \{x \in \mathcal{W} \mid x \notin x\}.$$

Αλλά γνωρίζουμε ότι $r(A) \notin A$ για κάθε σύνολο A, επομένως θα είχαμε $r(\mathcal{W}) \notin \mathcal{W}$ που είναι άτοπο γιατί το $r(\mathcal{W})$ -ως σύνολο- θα ήταν αντικείμενο του κόσμου $\mathcal{W}$.

(ii) Υποθέτουμε προς άτοπο ότι υπάρχει σύνολο I με την ιδιότητα $x \in I$ για κάθε x. (*Προσοχή:* Δεν μπορούμε να συμπεράνουμε από το Αξίωμα της Έκτασης ότι $\mathcal{W} = I$ γιατί αυτό το αξίωμα αναφέρεται σε σύνολα και ο κόσμος $\mathcal{W}$ δεν είναι σύνολο.)

Θεωρούμε το σύνολο $r(I) = \{y \in I \mid y \notin y\}$. Τότε το $x = r(I)$ ανήκει στον κόσμο $\mathcal{W}$ αλλά όπως έχουμε αποδείξει δεν ανήκει στο I, κάτι που αντιβαίνει στην υπόθεσή μας για το I.

(iii) Αν $\mathcal{E} = \emptyset$ ισχυριζόμαστε ότι *για κάθε* x ισχύει

$$(\forall A \in \mathcal{E})[x \in A].$$

Για να το δούμε αυτό θεωρούμε την άρνηση της προηγούμενης πρότασης,

$$(\exists A \in \mathcal{E})[x \notin A],$$

η οποία δεν ισχύει για κανένα x αφού το $\mathcal{E} = \emptyset$ δεν περιέχει στοιχεία. Εφόσον η άρνηση της πρότασης δεν ισχύει για κάνενα x, η πρόταση θα ισχύει για όλα τα x.

Τώρα αν υπήρχε σύνολο I με την ιδιότητα

$$x \in I \iff (\forall A \in \emptyset)[x \in A]$$

για κάθε x, τότε αφού το δεύτερο μέρος της ισοδυναμίας ισχύει πάντα, θα είχαμε $x \in I$ για κάθε x, που αντιβαίνει στο (ii).