Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων
Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών

5ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Υπενθύμιση για αυτό το Φυλλάδιο:

Θεώρημα Αναδρομής. Έστω $(\mathbb{N}, 0, S)$ ένα σύστημα φυσικών αριθμών, E ένα σύνολο, $a \in E$ και μια συνάρτηση $h : E \to E$.

Τότε υπάρχει μια μοναδική συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to E$ με τις ιδιότητες

$$f(0) = a$$
$$f(Sn) = h(f(n)) \quad n \in \mathbb{N}.$$

Άσκηση 1 (Άσκηση 4.4 plus σελ. 39)**.**

(i) Αν $(x, y, z) = (x', y', z')$ δείξτε ότι $x = x'$, $y = y'$ και $z = z'$.

(ii) Δίνονται σύνολα A, B και C. Εξηγήστε γιατί το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B \times C$ είναι σύνολο.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε αυτά που ξέρετε για τα ζεύγη αντικειμένων και το καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων.

Άσκηση 2 (Άσκηση 4.18 σελ. 45)**.** Δείξτε ότι αν $A =_c A'$ και $B = B'$ τότε

(i) $A \uplus B =_c A' \uplus B'$

(ii) $A \times B =_c A' \times B'$

(iii) $(A \to B) =_c (A' \to B')$.

Σχόλιο. Στα (i) και (ii) να ορίσετε μόνο τις ζητούμενες συναρτήσεις χωρίς να δείξετε ότι είναι $1-1$ και επί. Το (iii) το έχουμε δείξει σε προηγούμενη άσκηση. Εδώ εξηγήστε γιατί η αντιστοιχία
$H : (A \to B) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow (A' \to B')$ που ορίσαμε είναι σύνολο.

Άσκηση 3. Θεωρούμε ένα σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}, 0, S)$. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $Sn \neq n$.

Άσκηση 4. Αποδείξτε τη μοναδικότητα της συνάρτησης f στο Θεώρημα Αναδρομής: για κάθε συνόλο E, κάθε $a \in E$ και κάθε συνάρτηση $h : E \to E$ υπάρχει το πολύ μία συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to E$ με τις ιδιότητες $f(0) = a$ και $f(Sn) = h(f(n))$ για κάθε n, όπου $(\mathbb{N}, 0, S)$ είναι ένα σύστημα φυσικών αριθμών.

Άσκηση 5 (Μοναδικότητα φυσικών αριθμών - μέρος α΄)**.** Θεωρούμε δύο συστήματα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ και $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$ και μια συνάρτηση $\pi : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_2$ με τις ιδιότητες:

$$\pi(0_1) = 0_2$$
$$\pi(S_1 n) = S_2 \pi(n) \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

(i) Δείξτε ότι η π είναι επί.

Υπόδειξη: Θεωρήστε το σύνολο $X = \{m \in \mathbb{N}_2 \mid (\exists n \in \mathbb{N}_1)[m = \pi(n)]\}$.

(ii) Δείξτε ότι η π είναι $1-1$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε το σύνολο $Y = \{n \in \mathbb{N}_1 \mid (\forall m \in \mathbb{N}_1)[\pi(n) = \pi(m)] \implies n = m\}$.

Άσκηση 6 (Μοναδικότητα φυσικών αριθμών - μέρος β΄)**.** Θεωρούμε δύο συστήματα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ και $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική συνάρτηση $\pi : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_2$ που ικανοποιεί

$$\begin{aligned} \pi(0_1) &= 0_2 \\ \pi(S_1 n) &= S_2 \pi(n), \quad n \in \mathbb{N}_1. \end{aligned}$$

Σχόλιο: Με βάση την προηγούμενη άσκηση αυτή η μοναδική συνάρτηση π είναι αντιστοιχία. Από αυτές τις δύο ασκήσεις προκύπτει ότι στην ουσία έχουμε μόνο ένα σύστημα φυσικών αριθμών, δηλαδή για κάθε δύο συστήματα η δομή του ενός μεταφέρεται στο άλλο μέσω μιας αντιστοιχίας.

Στην επόμενη άσκηση δείχνουμε ότι από ένα σύστημα φυσικών αριθμών μπορεί κανείς να κατασκευάσει σχετικά πολλά συστήματα, το οποία όμως όπως αναφέραμε προηγουμένως θα είναι «ισομορφικά» με το αρχικό σύστημα.

Άσκηση 7 (Κατασκευή συστήματος φυσικών αριθμών από δοσμένο σύστημα)**.** Θεωρούμε ένα σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$, ένα σύνολο $\mathbb{N}_2$ και μια $1-1$ και επί συνάρτηση $\pi : \mathbb{N}_1 \rightarrowtail\!\!\!\to \mathbb{N}_2$. Δείξτε ότι υπάρχουν $0_2 \in \mathbb{N}_2$ και $S_2 : \mathbb{N}_2 \to \mathbb{N}_2$ έτσι ώστε η τριάδα $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$ να είναι σύστημα φυσικών αριθμών.