Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων
Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών

1ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Πρόβλημα x1.2 - Οι νόμοι του De Morgan)**.**
Δείξτε ότι για όλα τα σύνολα A, B, C ισχύει

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$
$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B).$$

Λύση.
Για κάθε στοιχείο x έχουμε:

$$\begin{aligned} x \in C \setminus (A \cup B) &\iff x \in C \text{ και } x \notin A \cup B \\ &\iff x \in C \text{ και}(x \notin A \text{ και } x \notin B) \\ &\iff x \in C \setminus A \text{ και } x \in C \setminus B \\ &\iff x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B). \end{aligned}$$

Άρα $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.
Επιπλέον:

$$\begin{aligned} x \in C \setminus (A \cap B) &\iff x \in C \text{ και } x \notin A \cap B \\ &\iff x \in C \text{ και } (x \notin A \textbf{ ή } x \notin B) \\ &\iff x \in C \setminus A \text{ ή } x \in C \setminus B \\ &\iff x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B). \end{aligned}$$

Άρα $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.

Άσκηση 2 (Πρόβλημα x1.3)**.** Δείξτε ότι για κάθε συνάρτηση $f : X \to Y$ και κάθε $A, B \subseteq X$ ισχύουν

$$f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$$
$$f[A \setminus B] \supseteq f[A] \setminus f[B].$$

Αν η f είναι 1-1 δείξτε ότι οι πιο πάνω εγκλεισμοί είναι ισότητες. Βρείτε επίσης παραδείγματα όπου οι ισότητες δεν ισχύουν αν η f δεν είναι 1-1.

Λύση.
Θεωρούμε $y \in f[A \cap B]$. Τότε υπάρχει $x \in A \cap B$ με $y = f(x)$. Αφού $x \in A$ έχουμε $y = f(x) \in f[A]$ και αφού $x \in B$ έχουμε $y = f(x) \in f[B]$. Άρα $y \in f[A] \cap f[B]$.

Για τον άλλο εγκλεισμό θεωρούμε $y \in f[A] \setminus f[B]$ και $x \in A$ με $y = f(x)$. Αν ήταν $x \in B$ τότε θα είχαμε $y = f(x) \in f[B]$, άτοπο. Άρα $x \notin B$ και επομένως $x \in A \setminus B$. Καταλήγουμε ότι $y = f(x) \in f[A \setminus B]$.

Υποθέτουμε ότι η f είναι 1-1. Δείχνουμε αρχικά ότι $f[A] \cap f[B] \subseteq f[A \setminus B]$. Έστω $y \in f[A] \cap f[B]$, και $x_1 \in A$, $x_2 \in B$ με $y = f(x_1) = f(x_2)$. Αφού η f είναι 1-1 θα έχουμε $x_1 = x_2 \in A \cap B$. Άρα $y = f(x_1) \in f[A \cap B]$.

Τώρα δείχνουμε ότι $f[A \setminus B] \subseteq f[A] \setminus f[B]$. Έστω $y \in f[A \setminus B]$ και $x \in A \setminus B$ με $y = f(x)$. Αφού $x \in A$ έχουμε $y = f(x) \in f[A]$. Αν ήταν $y \in f[B]$ τότε θα υπήρχε $x' \in B$ με $y = f(x')$. Επειδή η f είναι 1-1 θα είχαμε $x = x' \in A \cap B$ που είναι άτοπο γιατί $x \notin B$. Επομένως $y \notin f[B]$ και άρα $y \in f[A] \setminus f[B]$.

Δίνουμε τώρα τα παραδείγματα. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$. Παίρνουμε $A = \{-2\}$ και $B = \{2\}$. Τότε $A \cap B = \emptyset$ και άρα $f[A \cap B] = f[\emptyset] = \emptyset$. Από την άλλη $f[A] = f[B] = \{4\}$ και άρα $f[A] \cap f[B] = \{4\}$.

Για τον δεύτερο εγκλεισμό θεωρούμε πάλι την $f(x) = x^2$. Παίρνουμε $A = \{-2, 2\}$ και $B = \{2\}$. Τότε $A \setminus B = \{-2\}$ και $f[A \setminus B] = \{4\}$. Από την άλλη $f[A] \setminus f[B] = \{4\} \setminus \{4\} = \emptyset$.

Άσκηση 3 (Πρόβλημα x1.4 plus)**.** Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : X \to Y$ και $A, B \subseteq Y$. Δείξτε ότι

$$\begin{aligned} f^{-1}[A \cup B] &= f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B] \\ f^{-1}[A \cap B] &= f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B] \\ f^{-1}[A \setminus B] &= f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]. \end{aligned}$$

Αν $C, D \subseteq X$ δείξτε ότι

$$f[C \cup D] = f[C] \cup f[D].$$

Λύση.

Για την πρώτη ισότητα έχουμε για κάθε $x \in X$,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}[A \cup B] &\iff f(x) \in A \cup B \\ &\iff f(x) \in A \ \vee \ f(x) \in B \\ &\iff x \in f^{-1}[A] \ \vee \ x \in f^{-1}[B] \\ &\iff x \in f^{-1}[A] \ \cup f^{-1}[B]. \end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε ότι το “$\vee$” είναι ο λογικός τελεστής της *διάζευξης* προτάσεων και παίζει τον ρόλο του διαζευτικού “ή”. Όμοια προκύπτουν και οι επόμενες δύο ισότητες. Για την τελευταία ισότητα έχουμε για κάθε $y \in Y$,

$$\begin{aligned} y \in f[C \cup D] &\iff (\exists x)[x \in C \cup D \ \& \ y = f(x)] \\ &\iff (\exists x)[x \in C \ \& \ y = f(x)] \ \vee \ (\exists x)[x \in D \ \& \ y = f(x)] \\ &\iff y \in f[C] \ \vee y \in f[D] \\ &\iff y \in f[C] \cup f[D]. \end{aligned}$$

Άσκηση 4. Δίνεται ένα άπειρο σύνολο A, $a_0, \ldots, a_n \in A$, και ένας επιμορφισμός $\pi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A$. Δείξτε ότι υπάρχει $m > n$ με $\pi(m) \notin \{a_0, \ldots, a_n\}$.

Λύση.

Θεωρούμε το σύνολο $B = \{a_0, \ldots, a_n\} \cup \{\pi(0), \ldots, \pi(n)\}$. Προφανώς το B είναι πεπερασμένο σύνολο. Επειδή $a_0, \ldots, a_n \in A$ και η π παίρνει τιμές στο A έχουμε $B \subseteq A$. Επειδή το A είναι άπειρο υπάρχει $x \in A \setminus B$. Επιπλέον η π είναι επί, άρα υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ με $x = \pi(m)$.

Αφού $\pi(m) \notin B$ θα έχουμε ειδικότερα ότι $\pi(m) \notin \{\pi(0), \ldots, \pi(n)\}$ και άρα $m > n$. Πάλι από το $\pi(m) \notin B$ έχουμε ότι $\pi(m) \notin \{a_0, \ldots, a_n\}$.