Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

2ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Υπενθύμιση συμβολισμών:

- Με $\mathcal{P}(A)$ εννοούμε το δυναμοσύνολο του A, δηλαδή $\mathcal{P}(A) = \{ X \mid X \subseteq A \}$.
- Με Δ εννοούμε το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το $\mathbb{N}$ στο $\{0, 1\}$.
- Με $\mathcal{C}$ εννούμε το σύνολο του Cantor, που είναι υποσύνολο του $[0, 1]$.
- Με $(A \to B)$ ή B^A εννοούμε το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το A στο B.
- Αν $A \subseteq X$ η χαρακτηριστική συνάρτηση του A είναι η συνάρτηση $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ όπου $\chi_A(n) = 1$ αν $n \in A$ και $\chi_A(n) = 0$ αν $n \notin A$.

Κάποιες βασικές σχέσεις ισοπληθικότητας:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{N} =_c \mathbb{Z} =_c \mathbb{Q} \\
&\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \\
&\mathbb{N} <_c \Delta = \{0,1\}^{\mathbb{N}} =_c \mathcal{C} =_c \mathbb{R} =_c \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\
&\mathbb{N} <_c \mathcal{P}(\mathbb{N}) <_c \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) <_c< \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))) <_c \dots
\end{aligned}$$

Σχόλια:

- Το $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ προκύπτει από προηγούμενη άσκηση επειδή $\mathbb{N} =_c \mathbb{Q}$.
- Το $\Delta =_c \mathcal{C} \leq_c \mathbb{R}$ αποδείχθηκε στο μάθημα.
- Το $\Delta =_c \mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \mathbb{R}$ προκύπτει απο τις ασκήσεις αυτού του φυλλαδίου.
- Τα $\mathbb{N} <_c \Delta$ και $\mathbb{N} <_c \mathcal{P}(\mathbb{N}) <_c \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) <_c \dots$ αποδείχθηκαν στο μάθημα.

Άσκηση 1. Δείξτε ότι για κάθε σύνολα A, B τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $A \leq_c B$ και $A \neq_c B$

(ii) $A \leq_c B$ και $B \not\leq_c A$.

Σημείωση: Γράφουμε $A <_c B$ ακριβώς όταν συμβαίνει ένα από τα παραπάνω.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Schröder-Bernstein.

Άσκηση 2. Αν έχουμε μια 1-1 συνάρτηση $\tau : A \rightarrowtail B$ δείξτε ότι υπάρχει επιμορφισμός $\pi : B \twoheadrightarrow A$ με την ιδιότητα $\pi(\tau(x)) = x$ για κάθε $x \in A$.

Άσκηση 3 (Προβλήματα x2.1 και x2.2)**.** Δίνονται πραγματικοί αριθμοί $a < b$.

(i) Να ορίσετε μία 1-1 και επί συνάρτηση $f : (0, 1) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow (a, b)$.

(ii) Να ορίσετε μια 1-1 και επί συνάρτηση $(0, 1) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{R}$.

(iii) Δείξτε ότι $(a, b) =_c (a, b] =_c \mathbb{R}$.

Άσκηση 4 (Σελ. 16 και Λήμμα 2.24)**.** Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \Delta : f(A) = \chi_A$$

είναι 1-1 και επί. Συμπεράνετε ότι $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \Delta$ και $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq_c \mathbb{R}$.

Άσκηση 5 (Λήμμα 2.25)**.** Δείξτε ότι $\mathbb{R} \leq_c \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Συμπεράνετε ότι $\mathbb{R} =_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Υπόδειξη: Κάθε πραγματικός αριθμός καθορίζεται από το σύνολο των ρητών αριθμών που είναι μικρότεροί του.

Άσκηση 6 (Άσκηση 2.23 plus)**.** Αν $A_1 \leq_c A_2$ και αν $B_1 \leq_c B_2$ δείξτε ότι

$$(A_1 \to B_1) \leq_c (A_2 \to B_2)$$

Με χρήση του άλλου συμβολισμού το παραπάνω γράφεται ως εξής:

$$B_1^{A_1} \leq_c B_2^{A_2}.$$

Συμπεράνετε το ζητούμενο της Άσκησης 2.23 του βιβλίου:

Αν $A_1 =_c A_2$ και αν $B_1 =_c B_2$ δείξτε ότι $(A_1 \to B_1) =_c (A_2 \to B_2)$ ή αλλιώς $B_1^{A_1} =_c B_2^{A_2}$.

Υπόδειξη: Για το πρώτο ζητούμενο θεωρήστε μια 1-1 συνάρτηση $\tau : A_1 \rightarrowtail A_2$ και με εφαρμογή της Άσκησης 2 μια συνάρτηση $\pi : A_2 \twoheadrightarrow A_1$ με $\pi(\tau(a_1)) = a_1$ για κάθε $a_1 \in A_1$.

Άσκηση 7 (Πρόβλημα x2.7)**.** Δείξτε ότι

$$(A \times B \to C) =_c (A \to (B \to C)).$$

Με τον άλλο συμβολισμό:

$$C^{A\times B} =_c (C^B)^A.$$

Άσκηση 8 (Προβλήματα x2.5 και x2.6)**.** Δείξτε ότι

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq_c \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \leq_c \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \leq_c \mathbb{R}.$$

Συμπεράνετε ότι όλα τα πιο πάνω είναι ισότητες κατά Cantor.

Υπόδειξη: Οι δύο πρώτες ανισότητες κατά Cantor προκύπτουν εύκολα με χρήση των γνωστών και της Άσκησης 6. Για την τελευταία εφαρμόστε την Άσκηση 7.