

Μάθημα 06/11/2025 - ΣΥΝΑΡΤ. ΑΝΑΛΥΣΗ
Ασθενής τοπολογία (συνέχεια...)

X γραμμ. x , $\Phi \subseteq X^\#$ που χωρίζει σημεία

$\tau_\Phi =$ η ασθενής τοπολογία που επαγεται από τη Φ

Υπόθεση: $\bar{f}^{-1}((f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)), f \in \Phi, x \in X, \varepsilon > 0$

• (X, τ_Φ) είναι τ.χ. X

• $x_\lambda \xrightarrow{\tau_\Phi} x$ αν $\forall f \in \Phi, f(x_\lambda) \rightarrow f(x)$

• G ανοικτό $\ni x \Rightarrow \exists f_j \in \Phi, x_j \in X, \varepsilon_j > 0, 1 \leq j \leq N (N \geq 1)$

$$\bigcap_{j=1}^N \bar{f}_j^{-1}((f_j(x_j)-\varepsilon_j, f_j(x_j)+\varepsilon_j)) \subseteq G$$

- Μια βάση περιοχών του O είναι το σύνολο των πεπερασμένων τομών συνόλων της μορφής

$$\bar{f}^{-1}((-ε, ε)).$$

Πόρισμα 1: (i) Εάν $V \in \mathcal{U}_\Phi$ με $0 \in V$, $\exists f_j \in \Phi, 1 \leq j \leq N$
 $\kappa' \varepsilon > 0$ ώστε

$$0 \in \bigcap_{j=1}^N \bar{f}_j^{-1}((-ε, ε)) \subseteq V \quad \left. \vphantom{\bigcap_{j=1}^N} \right\}$$

(ii) Εάν $G \in \mathcal{U}_\Phi$ με $x \in G$, $\exists f_j \in \Phi, 1 \leq j \leq N$ $\kappa' \varepsilon > 0$ |

$$x + \bigcap_{j=1}^N \bar{f}_j^{-1}((-ε, ε)) \subseteq G.$$

(iii) Εάν $\forall \alpha > 0$, τότε $\exists f_j \in \Phi, 1 \leq j \leq N$
 κ' ≥ 0 ώστε

$$\text{οτ} \quad \bigcap_{j=1}^N \ker f_j \subseteq \bigcap_{j=1}^N f_j^{-1}((- \varepsilon, \varepsilon)) \subseteq V$$

↘ γραμμικός υπόχωρος!

Λήμμα: Εάν $\dim X = \infty$ κ' $f_j \in X^\#$, $1 \leq j \leq N$
 ($N \geq 1$), τότε

$$\bigcap_{j=1}^N \ker f_j \neq \{0\}.$$

Απόδειξη: $F: X \rightarrow \mathbb{R}^N$ με $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_N(x))$
 F γραμμική κ'
 $\ker F = \bigcap_{j=1}^N \ker f_j$

Εάν ήταν $\bigcap_{j=1}^N \ker f_j = \{0\}$, τότε $\ker F = \{0\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim X \leq N$ (Ατοπιο). $\square$

Πρόταση 2: Εάν $\dim X = \infty$ ή $\forall f \in \mathcal{T}_\Phi$ με $0 \in V$, τότε
 $\exists Y < X : \{0\} \neq Y \subseteq V$.

Πρόταση 1: Εάν $\dim X = \infty$, τότε η $\mathcal{T}_\Phi$ δεν
προέρχεται από κάποια νόρμα.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $\exists$ νόρμα $\|\cdot\|$ στον $X : \mathcal{T}_\Phi = \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$

Τότε, $B(0,1) = \{x \in X : \|x\| < 1\} \in \mathcal{T}_\Phi$ ή περιέχει το 0
(Πρόταση 2) $\Rightarrow \exists Y < X : \{0\} \neq Y \subseteq B(0,1)$. Έστω $y \in Y, y \neq 0$

$$\forall n \geq 1, \quad ny \in Y \subseteq B(0,1) \Rightarrow \|ny\| < 1 \Rightarrow \|y\| < \frac{1}{n}, \\ \Rightarrow y = 0 \text{ (ΑΤΟΤΟ)} \quad \square$$

Πρόταση 2: τ_Φ είναι η μικρότερη τοπολογία των X
ως προς την οποία όλα τα $f \in \Phi$ είναι συνεχή.

Απόδειξη: $\forall f \in \Phi$, η $f: (X, \tau_\Phi) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

Πράγματι: εάν $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq X$ με $x_\lambda \xrightarrow{\tau_\Phi} x$. Τότε, $f(x_\lambda) \rightarrow f(x)$.

Εστω τ τοπολογία ώστε $f: (X, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, $\forall f \in \Phi$.

$$\forall f \in \Phi, \forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \quad \bar{f}^{-1}((f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)) \in \tau \\ \Rightarrow \tau_\Phi = \text{υποβάση της } \tau_\Phi \subseteq \tau \Rightarrow \tau_\Phi \subseteq \tau \quad \square$$

1 in lemma 2: 'Esau $f, g \in X^\#$ mit $\ker f \subseteq \ker g$. Töce,
 $\exists c \in \mathbb{R} \mid g = c \cdot f$.

Ansd: • 'Esau $f \equiv 0$, wce $X = \ker f \subseteq \ker g \Rightarrow g \equiv 0$.

• 'Esau $f \not\equiv 0$. $\exists x_0 \in X \mid f(x_0) \neq 0$. Töce, $\forall x \in X$,

$$f(f(x_0)x - f(x)x_0) = f(x_0)f(x) - f(x)f(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow g(f(x_0)x - f(x)x_0) = 0$$

$$\Rightarrow f(x_0)g(x) - f(x)g(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow g(x) = \left(\frac{g(x_0)}{f(x_0)} \right) f(x), \quad \forall x \in X, \quad \boxed{\frac{g(x_0)}{f(x_0)} \rightarrow c \in \mathbb{R}}$$

Πρόταση 3: Έστω $f_j \in X^\#$ $1 \leq j \leq n$, $g \in X^\#$ ώστε
 $\bigcap_{j=1}^n \ker f_j \subseteq \ker g$. Τότε, $g \in \langle f_j : 1 \leq j \leq n \rangle$ dual.

$\exists c_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$, ώστε $g = \sum_{j=1}^n c_j f_j$.

Απόδειξη: Επαγωγή στο n .

• Για $n=1$, ισχύει λόγω του λήματος 2.

• Υποθέτουμε ότι η πρόταση για κάποιο $n \geq 1$.
 Θα δ.ο. ισχύει για $n+1$.

Έστω $f_j \in X^\#$, $1 \leq j \leq n+1$, $g \in X^\# \mid \bigcap_{j=1}^{n+1} \ker f_j \subseteq \ker g$.
 $\bigcap_{j=1}^n \ker (f_j \mid \ker f_{n+1}) = \bigcap_{j=1}^{n+1} \ker f_{n+1} \subseteq \ker (g \mid_{\ker f_{n+1}})$

$\gamma_{\pi} \circ g \in G_n$
 $\Rightarrow$
 Energie

$$\exists c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R} \mid$$

$$g = \sum_{j=1}^n c_j f_j, \text{ dann } g \in \ker f_{n+1}$$

$$\Rightarrow g - \sum_{j=1}^n c_j f_j = 0, \text{ " " "}$$

$$\Rightarrow \ker f_{n+1} \subseteq \ker \left(g - \sum_{j=1}^n c_j f_j \right)$$

$$\stackrel{\text{lin. Hk. 2}}{\Rightarrow} \exists c_{n+1} \in \mathbb{R} \mid g - \sum_{j=1}^n c_j f_j = c_{n+1} f_{n+1}$$

$$\Rightarrow g \in \langle f_j \mid 1 \leq j \leq n+1 \rangle. \quad \square$$

Πρόταση 4: Έστω $g: (X, \tau_\Phi) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, γραμμική,

Τότε, $g \in \langle \Phi \rangle = \{ \text{π.π.ρ. γραμμ. συνδυασμοί μελών της } \Phi \}$.

Απόδειξη: $0 \in g^{-1}((-1, 1)) \in \tau_\Phi$

$\Rightarrow \exists f_j \in \Phi, 1 \leq j \leq N \text{ κ' } \varepsilon > 0 \mid$

$$Y = \bigcap_{j=1}^N \ker f_j \subseteq \bigcap_{j=1}^N f_j^{-1}((- \varepsilon, \varepsilon)) \subseteq g^{-1}((-1, 1))$$

$\Rightarrow g(Y) = \text{γραμμ. υπόκ. του } \mathbb{R} \subseteq (-1, 1)$

$\Rightarrow g(Y) = \{0\} \Rightarrow Y \subseteq \ker g \quad (\text{Πρότ. 3})$

$g \in \langle f_j : 1 \leq j \leq N \rangle \subseteq \langle \Phi \rangle. \quad \square$

Μετρικοποιησιμότητα της τ_ϕ

I. Πρόταση I.1

Πρόταση I.1: Έστω $X \neq \emptyset$ κ' τ, τ' τοπολογίες σε X .
ΤΠΕ I:

(i) $\tau \subseteq \tau'$

(ii) $\forall$ σειρά $(x_n) \subseteq X$ με $x_n \xrightarrow{\tau'} x$, ισχύει $x_n \xrightarrow{\tau} x$.
(Άσκηση).

Πόρισμα I.1: Έστω $X \neq \emptyset, \tau, \tau'$ τοπολογίες σε X .
ΤΠΕ I:

(i) $\tau = \tau'$

(ii) $\forall (x_n) \subseteq X, x_n \xrightarrow{\tau'} x$ ανν $x_n \xrightarrow{\tau} x$.

Ορισμός I.1: Έστω $X \neq \emptyset$. Ψευδομετρική στο X είναι μια απεικόνιση $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ |

(i) $d(x, x) = 0, \forall x \in X$

(ii) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$

(iii) $\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$

Σημείωση: $\exists \forall x \in X$ και $d(x, y) = 0$ και $x \neq y$.

Παράδειγμα: Έστω $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ όχι 1-1

$$d(x, y) = |f(x) - f(y)| \quad d \text{ ψευδομετρική σ' } X \text{ όχι μετρική}$$