ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ "ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ" -ΣΕΜΦΕ (ΕΜΠ)
12-07-2021
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 90′

ΘΕΜΑ 1: Έστω X απειροδιάστατος γραμμικός χώρος και $X^\sharp$ η κλάση των γραμμικών συναρτησιακών πάνω στον X.

(i) (1 μ.) Εάν $f_j \in X^\sharp,\ 1 \leq j \leq n(\ n \geq 1)$, να δείξετε ότι $\bigcap\limits_{j=1}^{n} \mathrm{Ker} f_j \neq \{0\}$.

(ii) (1,5 μ.) Έστω $\Phi \subseteq X^\sharp$ που διαχωρίζει σημεία στον X και $\mathcal{T}_\Phi$ η ασθενής τοπολογία που επάγεται από την Φ στον X. Να δείξετε ότι η $\mathcal{T}_\Phi$ *δεν* επάγεται από κάποια νόρμα στον X.

ΘΕΜΑ 2: Έστω $(X, ||\cdot||)$ χώρος Banach και $(f_n) \subseteq X^*$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in X$, η ακολουθία $(f_n(x))$ συγκλίνει.

(i) (1,5 μ.) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

(ii) (1 μ.) Έστω $(x_n) \subseteq X,\ x \in X$ με $||x_n - x|| \to 0$. Να δείξετε ότι $f_n(x_n) \to f(x)$, όπου f το συναρτησιακό του ερωτ. (i).

ΘΕΜΑ 3: Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής επί.
Να δείξετε ότι:
(i) (1,5 μ.) Υπάρχει $M > 0$ ώστε: $\forall\, y \in Y,\ \exists\, x \in X$ με

$$y = Tx, \quad ||x|| \ \leq \ M||y||.$$

(ii) (1 μ.) Εάν X ανακλαστικός, τότε και ο Y είναι ανακλαστικός.

ΘΕΜΑ 4: Θεωρούμε $p, q \in (1, \infty)$ με $1/p + 1/q = 1$.
(i) (1 μ.) Έστω $v \in L^p(0,1)$. Θέτουμε

$$u(t) = \begin{cases} |v(t)|^{p-2} v(t), & \text{αν} \quad v(t) \neq 0 \\ \\ 0, & \text{αν} \quad v(t) = 0. \end{cases}$$

Να δείξετε ότι $u \in L^q(0,1)$ με $||u||_q^q = ||v||_p^p$.

(ii) (1,5 μ.) Ορίζουμε την απεικόνιση $T : L^q(0,1) \to (L^p(0,1))^*$ ως εξής:

$$Tu(v) = \int_0^1 u(t)v(t)dt, \quad \forall\, u \in L^q(0,1), \quad \forall\, v \in L^p(0,1).$$

Θεωρήστε γνωστό ότι η T είναι καλώς ορισμένη γραμμική ισομετρία (και άρα έχει $||\cdot||-$ κλειστή εικόνα). Να δείξετε ότι η T είναι επί.
[*Υπόδειξη:* Θ. Hahn-Banach, ανακλαστικότητα του $L^p(0,1)$ και ερώτ. (i).]

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!