ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ "ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ" -ΣΕΜΦΕ (ΕΜΠ)
09-07-2020
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 90′

ΘΕΜΑ 1: Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος.

(i) (1 μ.) Εάν $f : X \to \mathbb{R}$ μη μηδενικό γραμμικό συναρτησιακό, να δείξετε ότι $\forall\, G \subseteq X$ ανοικτό, το $f(G)$ είναι ανοικτό στον $\mathbb{R}$. [*Υπόδειξη*: $f(X) = \mathbb{R}$.]

(ii) (1,5 μ.) Υποθέτουμε ότι ο X είναι τοπικά κυρτός και $F \subseteq X$ μη κενό, κλειστό κυρτό και $x_0 \in X \setminus F$. Να δείξετε ότι υπάρχει $f \in X^* \setminus \{0\}$, ώστε

$$f(x_0) \ < \ \inf f(F).$$

[*Υπόδειξη*: Να χρησιμοποιήσετε την 1η μορφή του Γεωμετρικού Θ.Hahn-Banach.]

(iii) (1,5 μ.) Έστω $(X, ||\cdot||)$ χώρος με νόρμα και $A \subseteq X$ κυρτό. Να δείξετε ότι $\overline{A}^{||\cdot||} = \overline{A}^{\,w}$, όπου w η ασθενής τοπολογία στον X.

ΘΕΜΑ 2 (1,5 μ.): Έστω $(X, ||\cdot||)$ χώρος με νόρμα. Να δείξετε ότι κάθε $w-$ συγκλίνουσα ακολουθία στον X είναι $||\cdot||-$ φραγμένη. [*Υπόδειξη*: Θ. Ομοιομόρφου Φράγματος.]

ΘΕΜΑ 3: (i) (1,5 μ.) Έστω X γραμμικός χώρος, Φ κλάση γραμμικών συναρτησιακών που διαχωρίζει σημεία στον X και $\mathcal{T}_\Phi$ η ασθενής τοπολογία που επάγεται από την Φ στον X.
Εάν $f : (X, \mathcal{T}_\Phi) \to \mathbb{R}$ γραμμική συνεχής, να δείξετε ότι $f \in \langle \Phi \rangle$.

[**Θεωρήστε γνωστό το παρακάτω:**
Αν $f,\ f_j : X \to \mathbb{R},\ 1 \leq j \leq n(\ n \geq 1)$ γραμμικά και $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{Ker} f_j \subseteq \mathrm{Ker} f$, τότε $f \in \langle f_j : 1 \leq j \leq n \rangle$.]

(ii) (1 μ.) Έστω X χώρος με νόρμα. Να δείξετε ότι X ανακλαστικός ανν κάθε $||\cdot||-$ κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X^* είναι w^*- κλειστός.

ΘΕΜΑ 4: (i) (1 μ.) Έστω $(X, ||\cdot||_X)$, $(Y, ||\cdot||_Y)$ χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Υποθέτουμε ότι το γράφημα

$$G(T) = \{\ (x, Tx) : x \in X\ \}$$

είναι κλειστό στον $X \times Y$ ως προς τη νόρμα

$$||(x, y)|| = ||x||_X + ||y||_Y, \quad (x, y) \in X \times Y.$$

Να δείξετε ότι ο T είναι φραγμένος. (Θεωρήστε γνωστό το Θ. Ανοικτής Απεικόνισης.)

(ii) (1 μ.) Έστω $u : (0, 1) \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη και $p \in (1, +\infty)$. Υποθέτουμε ότι

$$u \cdot w \in L^1(0, 1), \quad \forall\ w \in L^p(0, 1).$$

Να δείξετε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$||u \cdot w||_1 \ \leq \ M||w||_p\,, \quad \forall\ w \in L^p(0, 1).$$