ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ "ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ" -ΣΕΜΦΕ (ΕΜΠ)
04-02-2022
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 Ω

ΘΕΜΑ 1: (i) (2 μ.) Έστω E γραμμικός χώρος, Φ κλάση γραμμικών συναρτησιακών που διαχωρίζει σημεία στον E και $\mathcal{T}_\Phi$ η ασθενής τοπολογία που επάγεται από την Φ στον E.
Εάν $f : (E, \mathcal{T}_\Phi) \to \mathbb{R}$ γραμμική συνεχής, να δείξετε ότι $f \in \langle \Phi \rangle$.

[**Θεωρήστε γνωστό το παρακάτω:**
Αν $f,\ f_j : E \to \mathbb{R},\ 1 \leq j \leq n(\ n \geq 1)$ γραμμικά και $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{Ker} f_j \subseteq \mathrm{Ker} f$, τότε $f \in \langle f_j : 1 \leq j \leq n \rangle$.]

(ii) Έστω $(X, ||\cdot||)$ χώρος με νόρμα και Y γραμμικός υπόχωρος του X^* που διαχωρίζει σημεία στον X.
(a) (1 μ.) Εάν $x \in X$ ώστε το σύνολο $\{f(x) : f \in Y\}$ να είναι άνω φραγμένο, να δείξετε ότι $x = 0$.
(b) (1 μ.) Να δείξετε ότι $\overline{Y}^{w^*} = X^*$. [*Υπόδειξη:* Γεωμετρικό Θ. Hahn -Banach.]

ΘΕΜΑ 2: (i) (1 μ.) Έστω $(X, ||\cdot||)$ χώρος με νόρμα και $A \subseteq X$ μη κενό w- συμπαγές.
Να δείξετε ότι κάθε ακολουθία του A έχει w - συγκλίνουσα υπακολουθία μέσα στο A.
[Δίνεται ότι κάθε μη κενό w - συμπαγές υποσύνολο ενός διαχωρίσιμου χώρου με νόρμα είναι w - μετρικοποιήσιμο.]
(ii) (1 μ.) Έστω $(X, ||\cdot||)$ χώρος με νόρμα και $B_X = \{x \in X : ||x|| \leq 1\}$.
Να δείξετε ότι $(X, ||\cdot||)$ ανακλαστικός ανν το B_X είναι w- συμπαγές.

ΘΕΜΑ 3: (i) (1 μ.) Έστω $(X, ||\cdot||_X),\ (Y, ||\cdot||_Y)$ χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμικός φραγμένος τελεστής *επί*. Να δείξετε ότι υπάρχει $M > 0$ με την παρακάτω ιδιότητα:

$$\forall\, y \in Y,\ \ \exists\, x \in X \ \text{ ώστε } \ y = T(x) \ \text{ και } \ ||x||_X \ \leq \ M||y||_Y.$$

(ii) (1 μ.) Έστω X γραμμικός χώρος που είναι Banach ως προς τις νόρμες $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $K > 0$ τέτοιο ώστε

$$||x||_2 \ \leq \ K||x||_1\ , \quad \forall\, x \in X.$$

Να δείξετε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$||x||_1 \ \leq \ M||x||_2\ , \quad \forall\, x \in X.$$

(iii) (1 μ.) Στο γραμμικό χώρο l^1 θεωρούμε τις νόρμες $||\cdot||_\infty$, $||\cdot||_1$, όπου

$$||x||_\infty = \sup_n |x(n)|, \quad ||x||_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|.$$

Είναι γνωστό ότι ο $(l^1, ||\cdot||_1)$ είναι χώρος Banach και $||x||_\infty \ \leq \ ||x||_1\ , \forall\, x \in l^1$.
Να δείξετε ότι *δεν* υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$||x||_1 \ \leq \ M||x||_\infty\ , \quad \forall\, x \in X.$$

Αντιφάσκει αυτό με το ερώτημα (ii) ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 4 (1 μ.): Έστω $p,\ q \in (1, +\infty)$ με $1/p + 1/q = 1$. Εάν $u \in L^p(0,1),\ v \in L^q(0,1)$, να δείξετε ότι

$$||u \cdot v||_{L^1} \ \leq \ ||u||_p \cdot ||v||_q\ .$$

[Δίνεται ότι $|a \cdot b| \ \leq \ |a|^p/p \ + \ |b|^q/q,\ \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$.]

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!