ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ "ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ"
Μ.Π.Σ. Ε.Μ.Ε. - ΜΑΘ. ΠΡΟΤΥΠ. - ΣΕΜΦΕ (ΕΜΠ)
16-05-2024
ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ: 12 - ΒΑΣΗ: 5 - ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 3 Ω

Συμβολισμοί:
–Εάν $(X, ||\cdot||)$ χώρος με νόρμα, $S_X = \{ x \in X : ||x|| = 1 \}$, $B_X = \{ x \in X : ||x|| \le 1 \}$.
– w είναι η ασθενής τοπολογία σε ένα χώρο με νόρμα.
– w^* είναι η ασθενής* τοπολογία στο δυϊκό ενός χώρου με νόρμα.

ΘΕΜΑ 1: (i) (1 μ.) [Θ. Mazur.] Έστω $(X, ||\cdot||)$ χώρος με νόρμα και $A \subseteq X$ κυρτό. Να δείξετε ότι $\overline{A}^w = \overline{A}^{||\cdot||}$.

(ii) (1,5 μ.) Θεωρούμε το χώρο $(c_0 , ||\cdot||_\infty)$. Θέτουμε

$$e_n^* : c_0 \to \mathbb{R}, \quad e_n^*(x) = x(n), \quad x \in c_0 \, , \, n \ge 1$$

και $A = co(e_n^* : n \ge 1)$. Να δείξετε ότι $A \subseteq S_{c_0^*}$, $\overline{A}^{w^*} \neq \overline{A}^{||\cdot||}$.

ΘΕΜΑ 2: Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα.

(i) (1 μ.) Εάν $f_j \in X^*$, $1 \le j \le n(n \ge 1)$, να δείξετε ότι $\bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{Ker} f_j \neq \{0\}$.

(ii) (0,5 μ.) Εάν V $w-$ ανοικτή περιοχή του 0, να δείξετε ότι υπάρχει Y μη τετριμμένος γραμμικός υπόχωρος του X τέτοιος ώστε $Y \subseteq V$.

(iii) (0,5 μ.) Εάν $x, z \in X$ με $||x|| < 1$, $||z|| = 1$, να δείξετε ότι $\exists\, t > 0$ τέτοιο ώστε $||x + tz|| = 1$.

(iv) (1 μ.) Να δείξετε ότι $\overline{S_X}^w = B_X$.

ΘΕΜΑ 3: Έστω $(X, ||\cdot||)$ χώρος με νόρμα και $e : X \to X^{**}$ η κανονική ισομετρική εμφύτευση. Να δείξετε ότι:

(i) (0,5 μ.) Η e είναι $w - w^*$ ομοιομορφισμός εντός.

(ii) (1,5 μ.) Ο X είναι ανακλαστικός ανν B_X $w-$ συμπαγές.
[*Υπόδειξη:* Θ. Αλάογλου και Goldstine.]

ΘΕΜΑ 4: Έστω $(X, ||\cdot||)$ χώρος με νόρμα.

(i) (1 μ.) Εάν $(z_n) \subseteq X$, $z \in X$ με $z_n \xrightarrow{w} z$, να δείξετε ότι $||z|| \le \liminf_n ||z_n||$.

(ii) (0,5 μ.) Εάν $(x_n) \subseteq S_X$, $x \in S_X$ με $x_n \xrightarrow{w} x$, να δείξετε ότι $\lim_n ||x_n + x|| = 2$.

(iii) (1 μ.) Υποθέτουμε ότι ο X είναι *ομοιόμορφα κυρτός*. Εάν $(x_n) \subseteq S_X$, $x \in S_X$ με $x_n \xrightarrow{w} x$, να δείξετε ότι $\lim_n ||x_n - x|| = 0$.

ΘΕΜΑ 5: Έστω (Ω, Σ, μ) χώρος μέτρου και $p, q \in (1, \infty)$ με $1/p + 1/q = 1$.

(i) (0,5 μ.) Έστω $u \in L^p(\Omega)$. Θέτουμε

$$w(t) = \begin{cases} |u(t)|^{p-2}u(t), & \text{αν} \quad u(t) \neq 0 \\ \\ 0, & \text{αν} \quad u(t) = 0 \end{cases} \quad , \quad t \in \Omega.$$

Να δείξετε ότι $w \in L^q(\Omega)$ με $||w||_q^q = ||u||_p^p$.

(ii) (1,5 μ.) Ορίζουμε την απεικόνιση $T : L^q(\Omega) \to (L^p(\Omega))^*$ ως εξής:

$$Tw(u) = \int_\Omega uw d\mu, \quad \forall\, w \in L^q(\Omega), \quad \forall\, u \in L^p(\Omega).$$

Θεωρήστε γνωστό ότι η T είναι καλώς ορισμένη γραμμική ισομετρία (και άρα έχει $||\cdot||-$ κλειστή εικόνα). Να δείξετε ότι η T είναι επί.
[*Υπόδειξη:* Θ. Hahn-Banach, ανακλαστικότητα του $L^p(\Omega)$ και ερώτ. (i).]

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!