

ΕΞΕΤΑΣΤΕΑ ΥΛΗ «ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ» ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2025.

1. Στοιχεία Γενικής Τοπολογίας (χωρίς αποδείξεις). Εισαγωγικά στα δίκτυα (χωρίς αποδείξεις).
2. Τοπολογικοί γραμμικοί χώροι. Βασικές έννοιες και ιδιότητες (χωρίς αποδείξεις).
3. Γενικά για ασθενείς τοπολογίες. Ασθενής τοπολογία T_Φ που επάγεται σε γραμμικό χώρο X από οικογένεια Φ γραμμικών συναρτησιακών που διαχωρίζει σημεία. Βάση περιοχών του 0 και χαρακτηρισμός ασθενούς σύγκλισης δικτύων στον τοπολογικό γραμμικό χώρο (X, T_Φ) . Επιπλέον, τα παρακάτω αποτελέσματα:
 - στην άπειρη διάσταση, κάθε ασθενής περιοχή του 0 περιέχει μη τετριμμένο γραμμικό υπόχωρο και η T_Φ δεν ταυτίζεται με τοπολογία νόρμας.
 - ο τοπολογικός δυϊκός του (X, T_Φ) ταυτίζεται με τη γραμμική θήκη της Φ .
 - εάν η Φ είναι αριθμήσιμη, ο (X, T_Φ) είναι μετριοποιήσιμος.
4. **Εξαιρείται πλήρως** το αναρτημένο αρχείο «ΤΟΠΟΛ. ΓΡΑΜΜ. ΧΩΡΟΙ ΜΕΡΟΣ Β», που αφορά στους Τοπολογικούς Γραμμικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης.
5. Αναλυτική μορφή Θ . Hahn-Banach και συνέπειες (χωρίς αποδείξεις).

Η κανονική ισομετρική εμφύτευση ενός χώρου με νόρμα στο δεύτερο δυϊκό του.

Οι δύο μορφές των Γεωμετρικών Θ . Hahn-Banach σε τοπολογικούς γραμμ. χώρους (χωρίς αποδείξεις).
6. Αρχή Ομοιομόρφου Φράγματος.
7. Ασθενής (w) τοπολογία ενός χώρου με νόρμα $(X, ||\cdot||)$. Ορισμός και βασικές ιδιότητες. Επιπλέον, τα παρακάτω αποτελέσματα:
 - Θ . Mazur .
 - κάθε w -συγκλίνουσα ακολουθία έχει κυρτό block που συγκλίνει ως προς τη νόρμα (χωρίς απόδειξη).
 - κάθε w -συμπαγές είναι $||\cdot||$ -φραγμένο.
 - χαρακτηρισμός w -σύγκλισης ακολουθίας στο χώρο c_0 (εξαιρείται η απόδειξη της ισομετρικής ταύτισης $c_0^* \equiv l^1$).
 - χαρακτηρισμός w -σύγκλισης ακολουθίας σε χώρο Hilbert.
 - Ιδιότητα Schur του χώρου l^1 (χωρίς απόδειξη).

Μελέτη της μετριοποιησιμότητας της w - τοπολογίας και πιο συγκεκριμένα, τα παρακάτω αποτελέσματα:

 - Ένας απειροδιάστατος χώρος με νόρμα δεν είναι w - μετριοποιήσιμος.
 - Σε ένα διαχωρίσιμο χώρο με νόρμα, κάθε w -συμπαγές υποσύνολο είναι w -μετριοποιήσιμο.
 - Θ . Eberlein: κάθε w -συμπαγές σύνολο είναι ακολουθιακά w - συμπαγές.

-- Εάν ένας χώρος με νόρμα έχει διαχωρίσιμο δυϊκό, τότε κάθε φραγμένο υποσύνολό του είναι w -μετρικοποιήσιμο.

8. Ασθενής* (w^*) τοπολογία του δυϊκού X^* ενός χώρου με νόρμα. Ορισμός και βασικές ιδιότητες. Το αποτέλεσμα ότι κάθε w^* -συμπαγές υποσύνολο του δυϊκού ενός χώρου Banach είναι $\|\cdot\|$ -φραγμένο. Η απουσία θεωρήματος τύπου Mazur για την w^* -τοπολογία. Επιπλέον, τα παρακάτω αποτελέσματα:

--Θ. Goldstine.

--Θ. Αλάογλου (**εξαιρείται η απόδειξη του Θ. Tychonoff**).

--Η μοναδιαία μπάλα του δυϊκού ενός διαχωρίσιμου χώρου με νόρμα είναι w^* -συμπαγής μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος.

9. Ανακλαστικοί χώροι Banach.

--Χαρακτηρισμός μέσω της w -συμπαγείας της μοναδιαίας μπάλας και ακολουθιακός χαρακτηρισμός.

--Ανακλαστικότητα κλειστών γραμμικών υπόχωρων και του δυϊκού ενός ανακλαστικού χώρου.

--Ανακλαστικότητα χώρων Hilbert.

--Ανακλαστικότητα των χώρων

$$l^p, 1 < p < \infty \text{ (χωρίς απόδειξη).}$$

Παραδείγματα μη ανακλαστικών χώρων.

10. Ομοιόμορφα κυρτοί χώροι Banach. Ομοιόμορφη κυρτότητα χώρων Hilbert. Επιπλέον, τα παρακάτω αποτελέσματα:

--Θ. Milmann- Pettis: κάθε ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach είναι ανακλαστικός (**χωρίς απόδειξη**).

-- κάθε ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach έχει την ιδιότητα Kadec – Klee.

11. --Ανισότητες Hölder, Minkowski.

Ορισμός των χώρων $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ και βασικές ιδιότητες:

--πληρότητα της νόρμας και διαχωρισιμότητα (**χωρίς αποδείξεις**).

--σχέση $\|\cdot\|_p$ –σύγκλισης και σχεδόν παντού κατά σημείο σύγκλισης ακολουθίας (**χωρίς απόδειξη**).

--Ομοιόμορφη κυρτότητα και ανακλαστικότητα του χώρου $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ (μαζί με τις προπαρασκευαστικές ανισότητες που παρουσιάστηκαν στο μάθημα).

Εξαιρούνται πλήρως οι ανισότητες Clarkson.

--Η ισομετρική ταύτιση του δυϊκού του χώρου $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ με το χώρο

$L^q(\Omega)$, όπου q ο συζυγής εκθέτης του p .

12. --Θ. Ανοικτής Απεικόνισης κι εφαρμογές (σελ. 1-11 του σχετικού αναρτημένου αρχείου).

-- Θ. Κλειστού Γραφήματος κι εφαρμογές (μόνο οι 1,2 του σχετικού αναρτημένου αρχείου).

ΔΙΕΥΚΡΙΝΙΣΗ: Στις αποδείξεις που περιλαμβάνονται στην εξεταστέα ύλη, περιλαμβάνονται και οι αποδείξεις των σχετικών προπαρασκευαστικών λημμάτων και προτάσεων που έγιναν στο μάθημα.