

ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Ι
Τοπολογικοί Γραμμικοί Χώροι, Θ. Hahn-Banach,
Ασθενείς Τοπολογίες, Ανακλαστικοί Χώροι.

1. Έστω X γραμμικός χώρος και $C \subseteq X$ απορροφούν.

(i) Να δείξετε ότι

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nC.$$

(ii) Υποθέτουμε επιπλέον ότι ο X είναι χώρος Banach και ότι το C είναι κυρτό, κλειστό και συμμετρικό. Να δείξετε ότι το C είναι περιοχή του 0.

[Υπόδειξη: **Θ. Baire**: Εάν ένας πλήρης μετρικός χώρος γράφεται σαν ένωση αριθμησίμου πλήθους κλειστών υποσυνόλων του, τότε κάποιο από αυτά θα πρέπει να έχει μη κενό εσωτερικό.]

2. Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος και $C \subseteq X$ κλειστό τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{2}(x + y) \in C, \quad \forall x, y \in C.$$

Να δείξετε ότι:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\forall k \in [0, 2^n] \cap \mathbb{N}$, ισχύει

$$\frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)y \in C, \quad \forall x, y \in C.$$

[Υπόδειξη: Επαγωγή στο n .]

(ii) το C είναι κυρτό.

[Υπόδειξη: Το σύνολο

$$\left\{ \frac{k}{2^n} : n \in \mathbb{N}, k \in [0, 2^n] \cap \mathbb{N} \right\}$$

είναι πυκνό στο $[0, 1]$.]

3. Έστω X τοπικά κυρτός τοπολογικός γραμμικός χώρος, δηλ. ο X έχει μια βάση περιοχών του 0 που αποτελείται από κυρτά σύνολα. Εάν $(x_n) \subseteq X$ με $x_n \rightarrow x$, $x \in X$, να δείξετε ότι

$$\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \rightarrow x.$$

[Υπόδειξη: Να υποθέσετε αρχικά ότι $x = 0$.]

4. Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος και $K, F \subseteq X$ μη κενά, ξένα μεταξύ τους με K συμπαγές και F κλειστό. Να δείξετε ότι υπάρχει ισορροπημένη ανοικτή περιοχή V του 0 ώστε

$$(K + V) \cap F = \emptyset$$

[Υπόδειξη: Για κάθε $x \in K$, υπάρχει ισορροπημένη ανοικτή περιοχή W_x του 0 ώστε $x + W_x + W_x \subseteq F^c$.]

5. Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος και $K, F \subseteq X$ μη κενά.
 (i) Εάν K, F συμπαγή, να δείξετε ότι $K + F$ συμπαγές.
 (ii) Εάν K συμπαγές και F κλειστό, να δείξετε ότι $K + F$ κλειστό.
 (iii) Να βρείτε δύο κλειστά υποσύνολα K, F του \mathbb{R}^2 , τέτοια ώστε το $K + F$ να μην είναι κλειστό.
6. Έστω X τοπικά κυρτός τοπολογικός γραμμικός χώρος, Y γνήσιος κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X και $x_0 \notin Y$. Να δείξετε ότι:
 (i) υπάρχει $f \in X^*$ τέτοιο ώστε

$$f(Y) = \{0\}, \quad f(x_0) = 1.$$

[Υπόδειξη: Γεωμετρικό Θ. Hahn-Banach.]

- (ii) ο γραμμικός υπόχωρος $Y + \langle x_0 \rangle$ είναι κλειστός. [Υπόδειξη: Εργαστείτε με δίκτυα αξιοποιώντας το προηγούμενο ερώτημα.]
7. Έστω X χώρος με νόρμα και Z γραμμικός υπόχωρος του X^* . Θέτουμε

$$Z^\perp = \bigcap_{f \in Z} \text{Ker } f, \quad (Z^\perp)^\perp = \{ f \in X^* : f(Z^\perp) = \{0\} \}.$$

Να δείξετε ότι $(Z^\perp)^\perp = \overline{Z}^{w^*}$. [Υπόδειξη: Γεωμετρικό Θ. Hahn-Banach.]

8. Θεωρούμε το γραμμικό χώρο

$$X = c_{00}(\mathbb{N}) = \{ x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid x(n) = 0, \text{ τελικώς } \},$$

εφοδιασμένο με τη νόρμα $\|x\|_\infty = \sup_n |x(n)|$.

- (i) Να δείξετε ότι $\overline{X}^{\|\cdot\|_\infty} = c_0(\mathbb{N})$.

- (ii) Θέτουμε $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, με $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x(k)}{k}$, $x \in X$, $n \geq 1$.

Να δείξετε ότι $f_n \in X^*$, $n \geq 1$ και $\forall x \in X$, $\sup_n |f_n(x)| < \infty$.

Επιπλέον, $\sup_n \|f_n\| = \infty$.

(iii) Θέτουμε $g_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, με $g_n(x) = nx(n)$, $x \in X$, $n \geq 1$.

Να δείξετε ότι $g_n \in X^*$, $n \geq 1$ και

$$g_n \xrightarrow{w^*} 0, \quad \sup_n \|g_n\| = \infty.$$

(iv) Θέτουμε $\tilde{g}_n : c_0(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$, με $\tilde{g}_n(x) = nx(n)$, $x \in c_0(\mathbb{N})$, $n \geq 1$.

Να δείξετε ότι $\tilde{g}_n \in c_0(\mathbb{N})^*$, $n \geq 1$ και ότι υπάρχει $x \in c_0(\mathbb{N})$ ώστε $\tilde{g}_n(x) \not\rightarrow 0$ (επομένως, η ακολουθία (\tilde{g}_n) δεν είναι w^* -συγκλίνουσα.)

9. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ απειροδιάστατος χώρος με νόρμα.

(i) Εάν V ασθενώς ανοικτή περιοχή του 0, να δείξετε ότι υπάρχει Y μη τετριμμένος γραμμικός υπόχωρος του X τέτοιος ώστε $Y \subseteq V$.

(ii) Εάν $x, z \in X$ με $\|x\| < 1$, $\|z\| = 1$, να δείξετε ότι $\exists t > 0$ τέτοιο ώστε $\|x + tz\| = 1$.

(iii) Θέτουμε

$$S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}, \quad B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}.$$

Να δείξετε ότι $\overline{S_X}^w = B_X$.

10. Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \rightarrow Y$ γραμμικός τελεστής. Να δείξετε ότι :

(i) T φραγμένος αν $g \circ T \in X^*$, $\forall g \in Y^*$. (Υπόδειξη: Αρχή Ομοιομόρφου Φράγματος.)

(ii) T φραγμένος αν $T : (X, w) \rightarrow (Y, w)$ είναι συνεχής.

11. (i) Να δείξετε ότι κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος.

(ii) Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach και $A \subseteq B_{X^*}$ τέτοιο ώστε

$$\bigcap_{f \in A} \text{Ker } f = \{0\}.$$

Να δείξετε ότι υπάρχει αριθμήσιμο $B \subseteq A$ τέτοιο ώστε

$$\bigcap_{f \in B} \text{Ker } f = \{0\}.$$

12. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και Y γνήσιος $\|\cdot\|$ -κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X . Να δείξετε ότι:

(i) Υπάρχει $z_0 \in X$ τέτοιο ώστε

$$\|z_0\| = 1, \quad d(z_0, Y) > 1/2.$$

(ii) Υπάρχουν $x_0 \in X, f \in X^*$ τέτοια ώστε

$$f(x_0) > 1, \quad f(Y) = \{0\}, \quad \|f\| = 1.$$

[Υπόδειξη: Εάν z_0 όπως στο ερώτημα (i), θέτουμε $x_0 = 2z_0$ και εφαρμόζουμε μια συνέπεια του Αναλυτικού Θ. Hahn-Banach.]

13. Στην άσκηση αυτή αποδεικνύεται ότι: Αν η μοναδιαία μπάλα ενός χώρου με νόρμα X είναι ασθενώς μετρικοποιήσιμη, τότε ο X^* είναι διαχωρίσιμος.

Σημ. ότι το αντίστροφο έχει αποδειχθεί στο μάθημα.

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα.

(i) Εάν $L \in B_{X^{**}}, \varepsilon > 0$ και $\Phi \subseteq X^*$ πεπερασμένο, να δείξετε ότι υπάρχει $x_1 \in B_X$ ώστε

$$|f(x_1) - L(f)| < \varepsilon, \quad \forall f \in \Phi.$$

[Υπόδειξη: Θ. Goldstine.]

(ii) Υποθέτουμε ότι ο τοπολογικός χώρος (B_X, w) είναι μετρικοποιήσιμος μέσω μιας μετρικής d και θέτουμε

$$G_n = \{x \in B_X : d(x, 0) < 1/n\}, \quad n \geq 1.$$

(a) Να δείξετε ότι για κάθε $n \geq 1$, υπάρχουν $\Phi_n \subseteq X^*$ πεπερασμένο και $\varepsilon_n > 0$ ώστε

$$\bigcap_{f \in \Phi_n} f^{-1}((-\varepsilon_n, \varepsilon_n)) \cap B_X \subseteq G_n.$$

(b) Θεωρούμε τον κλειστό γραμμικό υπόχωρο $Y = \overline{\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n \rangle}$.

Να δείξετε ότι $Y = X^*$ και να συμπεράνετε ότι ο X^* είναι διαχωρίσιμος.

[Υπόδειξη: Απαγωγή σε άτοπο, άσκηση 12 (ii) και προηγούμενα ερωτήματα.]

14. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Να δείξετε ότι X ανακλαστικός ανν κάθε $\|\cdot\|$ - κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X^* είναι w^* - κλειστός.
15. (i) Έστω X ανακλαστικός χώρος Banach και $f \in X^*$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε

$$\|x_0\| = 1, \quad f(x_0) = \|f\|.$$

(ii) Θεωρούμε το χώρο Banach $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$, όπου

$$C[0, 1] = \{u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ συνεχής συνάρτησης}\}, \quad \|u\|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} |u(t)|.$$

(a) Για $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$, να ορίσετε $u_\varepsilon \in C[0, 1]$ που ικανοποιεί

$$u_\varepsilon \left(\left[0, \frac{1}{2} - \varepsilon \right] \right) = \{1\}, \quad u_\varepsilon \left(\left[\frac{1}{2} + \varepsilon, 1 \right] \right) = \{-1\}, \quad \|u_\varepsilon\|_\infty = 1.$$

(b) Θέτουμε $f : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(u) = \int_0^{1/2} u(t) dt - \int_{1/2}^1 u(t) dt, \quad \forall u \in C[0, 1].$$

Να δείξετε ότι f γραμμικό φραγμένο με $\|f\| = 1$ και ότι δεν υπάρχει $u \in C[0, 1]$ τέτοιο ώστε

$$\|u\|_\infty = 1, \quad f(u) = 1.$$

Συμπεράνατε ότι ο $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι ανακλαστικός.

16. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα.

(i) Εάν $(x_n) \subseteq X$, $x \in X$ με $x_n \xrightarrow{w} x$, να δείξετε ότι

$$\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|.$$

(ii) Υποθέτουμε ότι ο X είναι ανακλαστικός. Εάν Y γνήσιος $\|\cdot\|$ - κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X και $x_0 \in X \setminus Y$, να δείξετε ότι υπάρχει $y_0 \in Y$ ώστε

$$\|x_0 - y_0\| = d(x_0, Y).$$

17. Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \rightarrow Y$ γραμμικός τελεστής. Ο T λέγεται

–**συμπαγής** αν το $\overline{T(B_X)}^{\|\cdot\|}$ είναι $\|\cdot\|$ - συμπαγές στον Y .

–**ισχυρά συνεχής** αν για κάθε ακολουθία $(x_n) \subseteq X$ και για κάθε $x \in X$ με $x_n \xrightarrow{w} x$, ισχύει $\lim_n \|Tx_n - Tx\| = 0$.

Να δείξετε ότι:

(i) Κάθε συμπαγής τελεστής είναι ισχυρά συνεχής. (Υπόδειξη: Απαγωγή σε άτοπο.)

(ii) Εάν X ανακλαστικός και $T : X \rightarrow Y$ ισχυρά συνεχής, τότε ο T είναι συμπαγής.

(iii) Εάν X ανακλαστικός και $T : X \rightarrow l^1(\mathbb{N})$ είναι γραμμικός φραγμένος, τότε ο T είναι συμπαγής.