ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΙΙ
Θεωρήματα Ανοικτής Απεικόνισης και Κλειστού Γραφήματος
Χώροι $L^p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$.

1. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Να δείξετε ότι ο T είναι αντιστρέψιμος (επί) ανν

   (i) $T(X)$ $||\cdot||-$ πυκνό στον Y και

   (ii) υπάρχει $c > 0$ ώστε $||Tx|| \ge c||x||, \quad \forall\, x \in X$.

2. (i) Εάν X χώρος με νόρμα και Z_1 , Z_2 γραμμικοί υπόχωροι ώστε Z_1 κλειστός και Z_2 πεπερασμένης διάστασης, να δείξετε ότι ο $Z_1 + Z_2$ είναι κλειστός.

   (ii) Έστω X, Y χώροι Banach, $Z \subseteq X$ και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής επί. Να δείξετε ότι:

   (α) $T[\, X \setminus (Z + \mathrm{Ker}T)\,] = Y \setminus T(Z)$.

   (β) $T(Z)$ κλειστό ανν $Z + \mathrm{Ker}T$ κλειστό.

   (γ) Εάν Z κλειστός γραμμικός υπόχωρος και ο $\mathrm{Ker}T$ είναι πεπερασμένης διάστασης, να δείξετε ότι ο $T(Z)$ είναι κλειστός.

3. Για κάθε $x \in c_0(\mathbb{N})$ ορίζουμε

$$||x|| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |x(k)|.$$

   Να δείξετε ότι η $||\cdot||$ είναι καλώς ορισμένη νόρμα και ότι ο $(c_0(\mathbb{N}\,, ||\cdot||)$ *δεν* είναι Banach. [*Υπόδειξη:* Οι νόρμες $||\cdot||$, $||\cdot||_\infty$ συγκρίνονται.]

4. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής επί. Να δείξετε ότι:

   (i) Υπάρχει $M > 0$ ώστε: $\forall\, y \in Y$, $\exists\, x \in X$ με

$$y = Tx, \quad ||x|| \;\le\; M||y||.$$

   (ii) Έστω $H : l^1 \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Να δείξετε ότι:

   (α) Υπάρχει φραγμένη ακολουθία $(x_n) \subseteq X$ ώστε

$$Tx_n = He_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

όπου (e_n) η φυσική βάση του l^1.

(β) Υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής $G : l^1 \to X$ ώστε $T \circ G = H$.

(iii) Εάν Y διαχωρίσιμος, τότε υπάρχει Z διαχωρίσιμος κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X ώστε $Y = T(Z)$.

[*Υπόδειξη:* Υπάρχει $H : l^1 \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής *επί*.]

5. Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής που είναι ανοικτή απεικόνιση. Να δείξετε ότι εάν ο X είναι Banach, τότε και ο Y είναι Banach.

   [*Υπόδειξη:* Ισχύει κι εδώ το ερώτ. (i) της προηγούμενης άσκησης.]

6. Έστω $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ χώρος Hilbert και $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ γραμμικός τελεστής.

   (i) Έστω $x,\ y \in \mathcal{H}$ τέτοια ώστε

$$\langle y - Tz,\ x - z \rangle \ \geq\ 0, \quad \forall\, z \in \mathcal{H}.$$

   Να δείξετε ότι $y = Tx$.

   (ii) Υποθέτουμε ότι $\langle\ Tx,\ x\ \rangle\ \geq\ 0,\ \ \forall\, x \in \mathcal{H}$. Να δείξετε ότι ο T είναι φραγμένος. [*Υπόδειξη:* Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος.]

7. (i) Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $(u_n)_{n \geq 1} \subseteq C[0,1]$ με

$$u_n(t) = 1 - nt, \quad \forall\, t \in [0, 1/n), \quad u_n(t) = 0,\ \forall\, t \in [1/n\ , 1].$$

   Να δείξετε ότι

$$\lim_n \int_0^1 u_n(t) g(t) dt = 0, \quad \forall\, g \in\ L^1(0,1).$$

   (ii) Να δείξετε ότι υπάρχει $\Phi \in [L^\infty(0,1)]^*$ τέτοιο ώστε

$$\Phi(u) = u(0), \quad \forall\, u \in C[0,1].$$

   Για το παραπάνω συναρτησιακό Φ και χρησιμοποιώντας το ερώτ.(i), να δείξετε επιπλέον ότι *δεν* υπάρχει $g \in L^1(0,1)$ τέτοια ώστε

$$\Phi(u) = \int_0^1 u(t) g(t) dt, \quad \forall\, u \in L^\infty(0,1).$$

8. Έστω (Ω, Σ, μ) χώρος μέτρου με $\mu(\Omega) = 1$.

   (i) Έστω $1 \le r < p < \infty$. Εάν $u \in L^p(\Omega)$, να δείξετε ότι $||u||_r \le ||u||_p$.

   [*Υπόδειξη:* Ανισότητα Hölder.]

   Συμπεράνατε ότι $L^p(\Omega) \subseteq L^r(\Omega)$.

   (ii) Έστω $1 \le r < p < s < \infty$ και $u \in L^r(\Omega) \cap L^s(\Omega)$. Εάν $\alpha \in (0,1)$ τέτοιο ώστε
$$\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{r} + \frac{1-\alpha}{s},$$

   να δείξετε ότι $||u||_p \le ||u||_r^{\alpha} \cdot ||u||_s^{1-\alpha}$.

   [*Υπόδειξη:* Εάν $p' = \dfrac{r}{\alpha p}$, $q' = \dfrac{s}{(1-\alpha)p}$, να παρατηρήσετε ότι
$$1/p' + 1/q' = 1, \quad r/p' + s/q' = p$$

   και να εφαρμόσετε την ανισότητα Hölder.]

   Συμπεράνατε ότι $L^r(\Omega) \cap L^s(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$.

9. Έστω $(u_n) \subseteq L^p(0,1)$, $u \in L^p(0,1)$, $1 \le p < \infty$ ώστε
$$\lim_n ||u_n||_p = ||u||_p \ , \quad u_n(t) \to u(t), \text{ σχεδόν παντού στο } (0,1).$$

   Να δείξετε ότι $\lim_n ||u_n - u||_p = 0$.

   [*Υπόδειξη:* Λήμμα του Fatou στην ακολουθία συναρτήσεων
$$g_n = \left[\, 2^{p-1}(|u_n|^p + |u|^p) - |u_n - u|^p \,\right], \quad n \ge 1.]$$

10. Έστω $(u_n) \subseteq L^p(0,1)$, $u \in L^p(0,1)$, $1 < p < \infty$ ώστε
$$\sup_n ||u_n||_p < \infty, \quad u_n(t) \to u(t), \text{ σχεδόν παντού στο } (0,1).$$

    Να δείξετε ότι $u_n \xrightarrow{w} u$ στον $L^p(0,1)$.

    [*Υπόδειξη:* Θ. Egorov και το παρακάτω:
$$\lim_{|E| \to 0} \int_E g(t)dt = 0, \quad \forall\, g \in L^1(0,1) \;].$$

11. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων

$$u_n(t) = ne^{-nt}, \quad t \in (0,1), \quad n \geq 1.$$

Να δείξετε ότι

$$\sup_n ||u_n||_1 < \infty, \quad u_n(t) \to 0, \text{ σχεδόν παντού στο } (0,1)$$

αλλά δεν ισχύει ότι $u_n \xrightarrow{w} 0$ στον $L^1(0,1)$.

[Επομένως, το συμπέρασμα της προηγούμενης άσκησης δεν ισχύει για $p = 1$.]

12. Έστω $u : (0,1) \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη και $q > 1$. Υποθέτουμε ότι

$$u \cdot v \in L^1(0,1), \quad \forall \; v \in L^q(0,1).$$

Να δείξετε ότι:

(i) υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$||u \cdot v||_1 \leq M||v||_q \,, \quad \forall \; v \in L^q(0,1).$$

(*Υπόδειξη*: Θ. Κλειστού γραφήματος σε κατάλληλο τελεστή.)

(ii) το συναρτησιακό $\Phi_u : L^q(0,1) \to \mathbb{R}$ με

$$\Phi_u(v) = \int_0^1 u(t)v(t)dt, \quad \forall \; v \in L^q(0,1)$$

είναι γραμμικό και φραγμένο.

(iii) $u \in L^p(0,1)$.

[Να θεωρήσετε γνωστό το παρακάτω αποτέλεσμα της Θ. Μέτρου:

"Αν $h : (0,1) \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη τέτοια ώστε

$$\int_0^1 h(t)v(t)dt = 0, \quad \forall \; v \in L^q(0,1),$$

τότε $h(t) = 0$, σ.π. στο $(0,1)$. "]