1. Μετρησιμότητα.

Έστω X μη κενό σύνολο.

Ορισμός 1.1. Μια κλάση $\mathcal{C}$ υποσυνόλων του X ονομάζεται $\sigma-$ **άλγεβρα** στο X ανν έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) $X \in \mathcal{C}$.

(ii) Εάν $E \in \mathcal{C}$, τότε και $X \setminus E \in \mathcal{C}$.

(iii) Εάν $E_n \in \mathcal{C}$, $n \geq 1$, τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{C}$.

Ορισμός 1.2. Εάν $\mathcal{C}$ είναι μια $\sigma-$ άλγεβρα στο X, τότε ο $(X, \mathcal{C})$ λέγεται **μετρήσιμος χώρος** και τα μέλη της $\mathcal{C}$ λέγονται **μετρήσιμα.**

Ορισμός 1.3. Εάν X μετρήσιμος και Y τοπολογικός χώρος, μια συνάρτηση $u : X \to Y$ λέγεται **μετρήσιμη** ανν για κάθε $V \subseteq Y$ ανοικτό, το $u^{-1}(V)$ είναι μετρήσιμο.

Παράδειγμα: Έστω X μετρήσιμος χώρος και E μετρήσιμο. Θεωρούμε τη *χαρακτηριστική συνάρτηση* του E:

$$\mathcal{X}_E(x) = 1, \; \forall\, x \in E, \qquad \mathcal{X}_E(x) = 0, \; \forall\, x \notin E.$$

Η $\mathcal{X}_E : X \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.

Πρόταση 1.4. Έστω Y, Z τοπολογικοί χώροι και X μετρήσιμος χώρος. Εάν $h : Y \to Z$ συνεχής και $u : X \to Y$ μετρήσιμη, τότε $h \circ u$ μετρήσιμη.

Πρόταση 1.5. Έστω X μετρήσιμος χώρος και $u, v : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε, οι συναρτήσεις

$$|u|, \quad u^+, \quad u^-, \quad \lambda u + \mu v, \quad u \cdot v,$$

είναι μετρήσιμες.

Πρόταση 1.6. Έστω X μετρήσιμος χώρος, $u_n : X \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, μετρήσιμες και $u : X \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με $\lim_n u_n(x) = u(x)$, $\forall x \in X$. Τότε, u μετρήσιμη.

Ορισμός 1.7. Έστω X μετρήσιμος χώρος. Μια συνάρτηση $s : X \to \mathbb{R}$ λέγεται **απλή** , αν το σύνολο τιμών της είναι πεπερασμένο.

Αν s απλή συνάρτηση, τότε η s γράφεται στη μορφή

$$s = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathcal{X}_{E_k}, \quad n \geq 1, \tag{1}$$

όπου

$E_k \in \mathcal{C}$, $1 \leq k \leq n$ ξένα ανά δύο

και

$a_k \in \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq n$ διαφορετικά ανά δύο.

Προφανώς, κάθε απλή συνάρτηση είναι μετρήσιμη.

Σχόλιο: Η μορφή (1) είναι μονοσήμαντη και οι αριθμοί $a_k \in \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq n$ είναι οι τιμές της s.

Πρόταση 1.8. Έστω X μετρήσιμος χώρος και $u : X \to [0, +\infty)$ μετρήσιμη. Τότε, υπάρχει ακολουθία απλών συναρτήσεων $s_n : X \to [0, +\infty)$, $n \geq 1$, ώστε

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq u, \quad \lim_n s_n(x) = u(x), \quad \forall\, x \in X.$$

2. Βασικές ιδιότητες θετικών μέτρων.

Ορισμός 2.1. Έστω $(X, \mathcal{C})$ μετρήσιμος χώρος. **Θετικό μέτρο** στο X είναι μια συνάρτηση

$$\lambda : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$$

τέτοια ώστε για οποιαδήποτε ακολουθία $E_n \in \mathcal{C}$, $n \geq 1$ **ξένων ανά δύο** μετρήσιμων συνόλων ισχύει

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n).$$

Στο εξής θα υποθέτουμε ότι $\lambda(\mathcal{C}) \neq \{+\infty\}$.

Επιπλέον ιδιότητες των θετικών μέτρων:

Έστω λ θετικό μέτρο πάνω στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{C})$. Τότε:

- $\lambda(\emptyset) = 0$.
- (**Μονοτονία.**) Αν $A \subseteq B$, τότε $\lambda(A) \leq \lambda(B)$.
- (**Υποπροσθετικότητα.**) Εάν $E_n \in \mathcal{C}$, $n \geq 1$, τότε

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n).$$

- Εάν $E_n \in \mathcal{C},\ n \geq 1,$ με $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \ldots,$ τότε

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_n \lambda(E_n).$$

- Εάν $E_n \in \mathcal{C},\ n \geq 1,$ με $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \ldots$ και $\lambda(E_1) < \infty,$ τότε

$$\lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_n \lambda(E_n).$$

Η έννοια του ''σχεδόν παντού''.

Έστω $(X, \mathcal{C}, \lambda)$ χώρος μέτρου λ.

Λέμε ότι μια πρόταση που εξαρτάται από το $x \in X$ ισχύει λ- **σχεδόν για κάθε** x ανν υπάρχει $E \in \mathcal{C}$ με $\lambda(E) = 0$ τέτοιο ώστε η πρότασή μας να ισχύει $\forall x \notin E$.

Αν το x εννοείται, τότε λέμε απλά

λ - **σχεδόν παντού** (**λ -σ.π.**).

3. Ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.

Έστω $(X, \mathcal{C}, \lambda)$ χώρος μέτρου λ.

Ορισμός 3.1. Έστω

$$s = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathcal{X}_{E_k}, \quad n \geq 1,$$

απλή συνάρτηση, όπου

$E_k \in \mathcal{C}$, $1 \leq k \leq n$ ξένα ανά δύο

και

$a_k \in \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq n$ διαφορετικά ανά δύο.

Ορίζουμε σαν λ - **ολοκλήρωμα Lebesgue** της s ~~τον αριθμό~~ την ποσότητα

$$\int_X s \, d\lambda \, = \, \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda(E_k). \in [0, +\infty]$$

[**Παραδοχή:** $0 \cdot \infty = 0$.]

Ειδικότερα, αν $E \in \mathcal{C}$, ορίζουμε

$$\int_X \mathcal{X}_E \, d\lambda \, = \, \lambda(E).$$

Ορισμός 3.2. Έστω $u : X \to [0, +\infty)$ μετρήσιμη. Ορίζουμε σαν λ-**ολοκλήρωμα Lebesgue** της u την ποσότητα

$$\int_X u\, d\lambda \;=\; \sup\left\{ \int_X s\, d\lambda : \; s \text{ απλή με } 0 \le s \le u \right\} \;\in\; [0, +\infty].$$

(Βλ. Πρόταση 1.8.)

Βασικές ιδιότητες.

Έστω $u, v : X \to [0, +\infty)$ μετρήσιμες.

(i) Αν $u \le v$ σ.π., τότε $\int_X u\, d\lambda \;\le\; \int_X v\, d\lambda$.

(ii) Αν $A, B \in \mathcal{C}$ με $A \subseteq B$, τότε $\int_A u\, d\lambda \le \int_B u\, d\lambda$.

(iii) Αν $E \in \mathcal{C}$, τότε $\int_E u\, d\lambda = \int_X u\mathcal{X}_E\, d\lambda$.

(iv) Αν $E \in \mathcal{C}$ με $\lambda(E) = 0$, τότε $\int_E u\, d\lambda = 0$.

Πρόταση 3.3. Έστω $u : X \to [0, +\infty)$ μετρήσιμη. Θέτουμε

$$\mu(E) = \int_E u d\lambda, \quad E \in \mathcal{C}.$$

Τότε, το μ είναι θετικό μέτρο και για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $w : X \to [0, +\infty)$,

$$\int_X w d\mu \; = \; \int_X w u d\lambda.$$

Πρόταση 3.4. Έστω $u : X \to [0, +\infty)$ μετρήσιμη. Τότε

$$\int_X u \, d\lambda = 0 \Longleftrightarrow u(x) = 0, \;\; \text{σ.π. στο } X.$$

Ορισμός 3.5. Έστω $u : X \to [0, +\infty)$ μετρήσιμη. Η u λέγεται λ- **Lebesgue ολοκληρώσιμη** ανν

$$\int_X u \, d\lambda \; < \; \infty.$$

Ορισμός 3.6. Έστω $u : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη. Η u λέγεται λ- **Lebesgue ολοκληρώσιμη** ανν οι u^+, u^- είναι λ- Lebesgue ολοκληρώσιμες. Σε αυτή την περίπτωση ορίζουμε

$$\int_X u \, d\lambda = \int_X u^+ \, d\lambda \; - \; \int_X u^- \, d\lambda.$$

Ορισμός 3.7. Ορίζουμε σαν $L^1(X,\lambda)$ το σύνολο των μετρήσιμων συναρτήσεων $u : X \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$\int_X |u| d\lambda < \infty.$$

Εάν $u \in L^1(X,\lambda)$, η u είναι ολοκληρώσιμη.

Πρόταση 3.8. Το $L^1(X,\lambda)$ είναι γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ και για όλα τα $u, v \in L^1(X,\lambda)$, $a,\ b \in \mathbb{R}$,

$$\int_X (au + bv) d\lambda = a \int_X u d\lambda + b \int_X v d\lambda.$$

Πρόταση 3.9. Εάν $u \in L^1(X,\lambda)$, τότε

$$\left| \int_X u d\lambda \right| \leq \int_X |u| d\lambda.$$

4. Βασικά θεωρήματα σύγκλισης.

Έστω $(X, \mathcal{C}, \lambda)$ χώρος μέτρου λ.

I. Λήμμα του Fatou.

Έστω $u_n : X \to [0, +\infty)$, $n \geq 1$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε,

$$\liminf_n \int_X u_n d\lambda \geq \int_X \left(\liminf_n u_n \right) d\lambda.$$

II.Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης.

Έστω $u_n : X \to [0, \infty)$, $n \geq 1$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων που είναι μονότονη, δηλ. $\forall\, n \geq 1$,

$$u_n(x) \leq u_{n+1}(x), \quad \lambda - \text{σ.π.}$$

Εάν $u : X \to [0, \infty)$ μετρήσιμη συνάρτηση με

$$\lim_n u_n(x) = u(x), \quad \lambda - \text{σ.π.}$$

τότε

$$\lim_n \int_X u_n d\lambda = \int_X u d\lambda.$$

III. Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue .

Έστω $u_n : X \to \mathbb{R},\ n \geq 1$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $u : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση με

$$\lim_n u_n(x) \;=\; u(x), \quad \lambda - \text{σ.π.}$$

Υποθέτουμε επιπλέον ότι υπάρχει μη αρνητική συνάρτηση $w \in L^1(X, \lambda)$ τέτοια ώστε $\forall\, n \geq 1$,

$$|u_n(x)| \;\leq\; w(x), \quad \lambda - \text{σ.π.}$$

Τότε,

$$\lim_n \int_X u_n d\lambda \;=\; \int_X u d\lambda.$$

Βασική ιδιότητα ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

$\lim_{\lambda(E)\to 0} \int_E |u| d\lambda = 0$

Πρόταση 4.1. Έστω $u \in L^1(X, \lambda)$. Τότε,

$\forall\, \varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

για κάθε $E \in \mathcal{C}$ με $\lambda(E) < \delta$, ισχύει $\displaystyle\int_E |u| d\lambda < \varepsilon$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει η αποδεικτέα. Τότε, υπάρχουν

$$\varepsilon > 0 \quad \text{και} \quad E_1,\ E_2,\ E_3, \ldots \in \mathcal{C}$$

τέτοια ώστε

$$\lambda(E_n) < \frac{1}{2^n}\,, \qquad \int_{E_n} |u| d\lambda \;\geq\; \varepsilon, \qquad \forall\, n \geq 1.$$

Θέτουμε

$$A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\,, \qquad n \geq 1, \qquad A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\,.$$

Τότε, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ και

$$\lambda(A_n) \;\leq\; \sum_{k=n}^{\infty} \lambda(E_k) \;\leq\; \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} \;\to\; 0,$$

καθώς $n \to \infty$.

Ειδικότερα,

$$\lambda(A_1) \ \leq \ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k) \ \leq \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 < \infty.$$

Επομένως, $\lambda(A) = 0$, οπότε $\displaystyle\int_A |u| d\lambda = 0$.

Επειδή $(A_n) \downarrow$, έχουμε ότι

$$\lim_n |u(x)| \mathcal{X}_{A_n}(x) \ = \ |u(x)| \mathcal{X}_A(x), \quad \forall \ x \in X.$$

Από το Θ. Κυριαρχ. Σύγκλ. έπεται ότι

$$\lim_n \int_X |u| \mathcal{X}_{A_n} d\lambda = \int_X |u| \mathcal{X}_A d\lambda$$

ή

$$\lim_n \int_{A_n} |u| d\lambda = \int_A |u| d\lambda = 0$$

(ΑΤΟΠΟ), διότι

$$\int_{A_n} |u| d\lambda \ \geq \ \int_{E_n} |u| d\lambda \ \geq \ \varepsilon, \quad n \geq 1.$$

$\square$

IV.Θεώρημα του Egorov.

Υποθέτουμε ότι $\lambda(X) < \infty$.

Έστω $u_n : X \to \mathbb{R},\ n \geq 1$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $u : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση με

$$\lim_n u_n(x) \ = \ u(x), \quad \lambda - \text{σ.π.}$$

Τότε, ισχύει το εξής:

$\forall\, \delta > 0$, υπάρχει $E \in \mathcal{C}$ τέτοιο ώστε $\lambda(E) < \delta$

και

$$u_n \to u, \quad \text{ομοιόμορφα στο } X \setminus E,$$

δηλ. $\forall\, \varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|u_n(x) \ - \ u(x)| \ < \ \varepsilon, \quad \forall\ n \geq n_0\,, \quad \forall\, x \in X \setminus E.$$

5. Μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}$.

Αν $E \subseteq \mathbb{R}$, το *μέτρο Lebesgue* του E, που το συμβολίζουμε με $\lambda(E)$ ή $|E|$ είναι μια γενίκευση της έννοιας του μήκους.

–Αν $E = (a, b)$ είναι διάστημα, τότε $\lambda(E) = b - a$.

–Εύκολα μπορεί κανείς να ορίσει το μήκος μιας πεπερασμένης ή ακόμη και αριθμήσιμης ένωσης **ξένων ανά δύο** διαστημάτων $I_1\,, I_2\,, \dots I_n\,, \dots$ ως εξής:

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) \;\in\; [0, \infty].$$

–Γενικά, αν $E \subseteq \mathbb{R}$, παίρνουμε όλες τις καλύψεις του συνόλου E από αριθμήσιμες οικογένειες από ανοιχτά διαστήματα $I_1\,, I_2\,, \dots I_n\,, \dots$

και παίρνουμε ως μέτρο $\lambda(E)$ το infimum των ποσοτήτων

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n).$$

Για να αποκτήσει το μέτρο Lebesgue τις ''καλές'' του ιδιότητες (περιγράφονται παρακάτω), είναι απαραίτητο να περιορίσουμε τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τα οποία έχουν ''μέτρο''.

Θεώρημα : Υπάρχουν μοναδική $\sigma-$ άλγεβρα $\mathcal{C}$ στον $\mathbb{R}$ που περιέχει τα ανοικτά σύνολα και μοναδικό μέτρο $\lambda : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ τέτοια ώστε:

(i) $\lambda((a,b)) = b - a, \quad -\infty \leq a < b \leq +\infty.$

(ii) **(Αναλλοίωτο ως προς τις μεταφορές).** Αν $E \in \mathcal{C},\ t \in \mathbb{R},$ τότε

$$\lambda(t + E) = \lambda(E).$$

(iii) **(Ομοιοθεσία).** Αν $E \in \mathcal{C},\ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$ τότε

$$\lambda(tE) = |t|\lambda(E).$$

(iv) $\forall\, K \subseteq \mathbb{R}$ συμπαγές, ισχύει $\lambda(K) < \infty.$

(v) **(Κανονικότητα).** $\forall\, E \in \mathcal{C},$

$$\begin{aligned} \lambda(E) &= \inf\{\lambda(V) : V \text{ ανοικτό με } E \subseteq V\} \\ &= \sup\{\lambda(F) : F \text{ κλειστό με } F \subseteq E\}. \end{aligned}$$

Επιπλέον, εάν $E \in \mathcal{C}$ ανοικτό ή $\lambda(E) < \infty,$ τότε

$$\lambda(E) = \sup\{\lambda(K) : K \text{ συμπαγές με } K \subseteq E\}.$$

(vi) **(Πληρότητα).** Εάν $E \in \mathcal{C}$ με $\lambda(E) = 0$ και $A \subseteq E$, τότε $A \in \mathcal{C}.$

Το παραπάνω μέτρο ονομάζεται **μέτρο Lebesgue** στον $\mathbb{R}$.

Επιπλέον ιδιότητες:

- Εάν $E \in \mathcal{C}$ το πολύ αριθμήσιμο, τότε $\lambda(E) = 0$.

  Υπάρχουν *υπεραριθμήσιμα* σύνολα $E \in \mathcal{C}$ μέτρου 0 (π.χ. **σύνολο Cantor**).

- Εάν $E \in \mathcal{C}$ με $\lambda(E) > 0$, υπάρχει $A \subseteq E$ με $A \notin \mathcal{C}$.