Χώροι $L^p(0,1)$, $1 \leq p \leq \infty$

I. Θεμελιώδεις ανισότητες

Πρόταση I.1. $\forall\ a, b \geq 0$, $p \in (0,+\infty)$,

$$(a+b)^p \leq c_p \cdot (a^p + b^p),$$

όπου $c_p = \max\{1, 2^{p-1}\}$.

Απόδειξη:

• $p>1$. Η συνάρτηση $\varphi(t) = t^p$ είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$, οπότε

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{a^p+b^p}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad (a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p+b^p).$$

• $0<p\leq 1$. Εάν $a=0$ ή $b=0$, η αποδεικτέα προφανώς ισχύει.
Υποθέτουμε ότι $a>0$, $b>0$.
Η συνάρτηση

$$[0,+\infty) \ni t \longmapsto \left(\frac{a}{a+b}\right)^t \downarrow$$

$$\overset{[0<p\leq 1]}{\Longrightarrow} \quad \left(\frac{a}{a+b}\right)^p \geq \frac{a}{a+b}$$

Όμοια,

$$\left(\frac{b}{a+b}\right)^p \geq \frac{b}{a+b}$$

$$\overset{(+)}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow \frac{a^p + b^p}{(a+b)^p} \geq 1. \quad \boxtimes$$

<u>Πρόταση Ι.2.</u> Εάν $2 \leq p < \infty$, τότε $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x+y|^p + |x-y|^p \leq 2^{p-1} \cdot \left(|x|^p + |y|^p\right).$$

<u>Απόδειξη:</u> Εφαρμόζοντας την Πρότ. Ι.1 για "p" $= 2/p \leq 1$, παίρνουμε:

$$\forall\, a, b \geq 0, \quad (a^p + b^p)^{2/p} \leq (a^p)^{2/p} + (b^p)^{2/p} = a^2 + b^2$$

$$\Longrightarrow a^p + b^p \leq (a^2 + b^2)^{p/2}.$$

Η παραπάνω για

$$\text{"}a\text{"} = \left|\frac{x+y}{2}\right|, \quad \text{"}b\text{"} = \left|\frac{x-y}{2}\right|$$

δίνει

$$\frac{|x+y|^p + |x-y|^p}{2^p} \leq \left(\frac{|x+y|^2 + |x-y|^2}{4}\right)^{p/2} \leq$$

$$\leq \frac{(|x|^2 + |y|^2)^{p/2}}{2^{p/2}} \underset{[p/2 \geq 1]}{\overset{[\text{Πρότ. Ι.1}]}{\leq}}$$

$$\leq \frac{1}{\cancel{2^{p/2}}} \cdot \cancel{2^{p/2}}^{\,-1}\left(|x|^p + |y|^p\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{|x+y|^p + |x-y|^p}{2^p} \leq \frac{|x|^p + |y|^p}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad |x+y|^p + |x-y|^p \leq 2^{p-1}\left(|x|^p + |y|^p\right).$$

$\boxtimes$

Πρόταση Ι.3. (Ανισότητα Young).

Έστω $p, q \in (1, +\infty)$ ώστε

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ (συζυγείς εκθέτες).}$$

Τότε, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x| \cdot |y| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}.$$

Η ισότητα ισχύει ανν $|x|^p = |y|^q$.

Απόδειξη: Θέτουμε

$$\varphi(t) = \frac{t^p}{p} - t + \frac{1}{q}, \quad t \geq 0.$$

Τότε, $\varphi(1) = 0$, $\varphi'(t) = t^{p-1} - 1$

t	0		1	
$\varphi'(t)$		$-$	0	$+$
φ		$\searrow$		$\nearrow$

$\varphi(t) \geq \varphi(1) = 0$, $\forall\, t \geq 0$

Το "$=$" ισχύει μόνο για $t = 1$

Άρα, $\quad t \leq \dfrac{t^p}{p} + \dfrac{1}{q}, \quad \forall\, t \geq 0 \qquad (1)$

κ' το "$=$" ισχύει μόνο για $t = 1$

- Έστω $x, y \in \mathbb{R}$. Εάν $y=0$, η αποδεικτέα προφανώς ισχύει.

Έστω $y \neq 0$. Εφαρμόζουμε την (1) για "t" $= |x| \cdot |y|^{1-q}$ και παίρνουμε

$$|x| \cdot |y|^{1-q} \leq \frac{|x|^p \cdot |y|^{p-pq}}{p} + \frac{1}{q}.$$

Αλλά, $1/p + 1/q = 1 \Rightarrow q+p = pq$

$$\Rightarrow p - pq = -q,$$

οπότε

$$|x| \cdot |y| \cdot |y|^{-q} \leq \frac{|x|^p}{p} \cdot |y|^{-q} + \frac{1}{q}$$

$$\Longrightarrow \quad |x| \cdot |y| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}.$$

Το "$=$" ισχύει ανν $|x| \cdot |y|^{1-q} = 1$

$$\Longleftrightarrow \quad |x| = |y|^{q-1} \Longleftrightarrow |x|^p = |y|^{pq-p} = |y|^q.$$

$\boxtimes$

Ανισότητες
Hölder & Minkowski.

Έστω $(X, \mathcal{C}, \lambda)$ χώρος θετικού μετρικού.

Πρόταση I.4. (Ανισότητα Hölder).

Έστω $1 < p, q < \infty$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Εάν $u, v : X \to [0, \infty)$ μετρήσιμες, τότε

$$\int_X u \cdot v \, d\lambda \leq \underbrace{\left(\int_X u^p d\lambda\right)^{1/p}}_{A} \cdot \underbrace{\left(\int_X v^q d\lambda\right)^{1/q}}_{B}.$$

(Παραδοχή: $0 \cdot \infty = 0$).

Εάν $A < \infty$, $B < \infty$, το "$=$" ισχύει ανν $\exists$ $\alpha, \beta \geq 0$ (όχι και δύο μηδέν!) ώστε

$$\alpha u^p(x) = \beta v^q(x), \ \lambda-\sigma.\pi.$$

Απόδειξη:

- Εάν $A = 0$, τότε $u = 0$, $\lambda-\sigma.\pi.$ $\Longrightarrow$

  $\Longrightarrow$ $u \cdot v = 0$, $\lambda-\sigma.\pi.$

  $\Longrightarrow$ ισχύει η αποδεικτέα. [Όμοια, για $B = 0$]

- Εάν $A > 0$, $B = +\infty$, το β' μέλος της αποδεικτέας $= +\infty$, άρα πάλι ισχύει η αποδεικτέα.

Όμοια κι' αν $A = +\infty$, $B > 0$.

- Υποθέτουμε ότι $0 < A < \infty$, $0 < B < \infty$.

Θέτουμε
$$u_1 = u/A, \quad v_1 = v/B.$$

Τότε, $u_1, v_1 : X \to [0, +\infty)$ μετρήσιμες
και
$$\int_X u_1^p \, d\lambda = \int_X v_1^q \, d\lambda = 1.$$

Από Ανισότητα Young (Πρότ. I.3) έχουμε
$$u_1(x) v_1(x) \leq \frac{u_1(x)^p}{p} + \frac{v_1(x)^q}{q}, \quad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow \int_X u_1 \cdot v_1 \, d\lambda \leq \frac{1}{p} \int_X u_1^p \, d\lambda + \frac{1}{q} \int_X v_1^q \, d\lambda$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\Rightarrow \int_X u \cdot v \, d\lambda \leq A \cdot B \quad (\text{αποδεικτέα}).$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει το "=".
Τότε,
$$\int_X \left(\frac{u_1^p}{p} + \frac{v_1^q}{q} - u_1 v_1 \right) d\lambda = 0,$$

επί $\quad \dfrac{u_1^p}{p} + \dfrac{v_1^q}{q} \geq u_1 v_1 \quad \Longrightarrow$

$$\Rightarrow \quad u_1(x) v_1(x) = \frac{u_1(x)^p}{p} + \frac{v_1(x)^q}{q}, \quad \lambda\text{-σ.π.}$$

$$\overset{[\text{Πρότ. I.3}]}{\Longrightarrow} \quad u_1(x)^p = v_1(x)^q, \quad \lambda\text{-σ.π.}$$

$$\Rightarrow \quad B^q \cdot u(x)^p = A^p \cdot v(x)^q, \quad \lambda\text{-σ.π.} \quad \boxtimes$$

Πρόταση I.5. (Ανισότητα Minkowski)

Έστω $1 < p < \infty$ και $u, v : X \to [0, \infty)$ μετρήσιμες. Τότε,

$$\left\{ \int_X (u+v)^p d\lambda \right\}^{1/p} \leq \left(\int_X u^p d\lambda \right)^{1/p} + \left(\int_X v^p d\lambda \right)^{1/p}.$$

Απόδειξη: Έστω $q > 1 \mid 1/p + 1/q = 1$ (δηλ. $q = \frac{p}{p-1}$). Έχουμε

$$\int_X (u+v)^p d\lambda = \int_X u \cdot (u+v)^{p-1} d\lambda + \int_X v \cdot (u+v)^{p-1} d\lambda$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_X u^p d\lambda \right)^{1/p} \cdot \left\{ \int_X (u+v)^{qp-q} d\lambda \right\}^{1/q} +$$

$$+\left(\int_X v^p d\lambda\right)^{1/p} \cdot \left\{\int_X (u+v)^{qp-q} d\lambda\right\}^{1/q}$$

$$\Rightarrow \int_X (u+v)^p d\lambda \leq \left\{\int_X (u+v)^p\right\}^{1/q} \cdot (C+D),$$

όπου $C=\left(\int_X u^p d\lambda\right)^{1/p}$, $D=\left(\int_X v^p d\lambda\right)^{1/p}$

$$\xRightarrow{[1-1/q=1/p]} \left\{\int_X (u+v)^p d\lambda\right\}^{1/p} \leq C+D \text{ (αποδεικτέα).}$$

$\boxtimes$

II. Βασικές ιδιότητες των χώρων $L^p(0,1)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Έστω λ το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}$.
Εναλλακτικοί συμβολισμοί: dt, dx, $|\cdot|$.

Ορισμός II.1. Έστω $0<p<\infty$ και $u:(0,1)\to\mathbb{R}$ μετρήσιμη. Θέτουμε

$$\|u\|_p = \left(\int_{(0,1)} |u|^p d\lambda\right)^{1/p} = \left(\int_0^1 |u(t)|^p dt\right)^{1/p} \in [0,+\infty].$$

Θέτουμε

$$L^p(0,1) = \{u:(0,1)\to\mathbb{R} \mid u \text{ μετρήσιμη με } \|u\|_p<\infty\}.$$

Πρόταση I.1 $\Rightarrow$ $L^p(0,1)$ γραμμικός χώρος.

Ορισμός II.2. Έστω $u:(0,1)\to\mathbb{R}$ μετρήσιμη. Η u λέγεται ουσιωδώς φραγμένη αν

$$\boxed{\exists\, a>0: \ |u(t)| \leq a, \quad \lambda-\sigma.\pi.} \quad (1)$$

Ένας αριθμός $a>0$ που ικανοποιεί την (1) ονομάζεται ουσιώδες φράγμα της u.

Εάν $u:(0,1)\to\mathbb{R}$ ουσιωδώς φραγμένη, θέτουμε

$$\|u\|_\infty = \inf\{a>0 \mid a \text{ ουσιώδες φράγμα της } u\}.$$

Πρόταση II.3. Εάν u ουσιωδώς φραγμένη, τότε

$$|u(t)| \le \|u\|_\infty, \quad \lambda\text{-σ.π.}$$

Απόδειξη: Θέτουμε

$$E=\{t\in(0,1): |u(t)|>\|u\|_\infty\}.$$

Θα δ.ο.

$$\lambda(E)=0.$$

Θέτουμε

$$E_n=\{t\in(0,1): |u(t)|>\|u\|_\infty+\tfrac{1}{n}\},\ n\ge 1.$$

Τότε,

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

$\forall n\geq 1$, $\exists$ a_n ουσιώδες φράγμα της u με

$$a_n < \|u\|_\infty + \frac{1}{n}.$$

$$\Rightarrow \quad E_n \subseteq \underbrace{\{t\in(0,1): |u(t)|>a_n\}}_{\text{μέτρου } 0},\ n\geq 1$$

$$\Rightarrow \quad \lambda(E)=0. \qquad \boxtimes$$

Θέτουμε

$$L^{\infty}(0,1)=\{u:(0,1)\to\mathbb{R} \mid u \text{ ουσιωδώς φραγμένη}\}.$$

Εάν $p\in[1,\infty]$, <u>συζυγής εκθέτης</u> του p είναι ο

$$q=\begin{cases}\frac{p}{p-1}, & 1<p<\infty\\ 1, & p=\infty\\ \infty, & p=1.\end{cases}$$

Τότε, $\underline{1/p+1/q=1}.$

(παραδοχή: $\frac{1}{\infty}=0$).

<u>Πρόταση ΙΙ.4.</u> Έστω $p,q\in[1,\infty]$ συζυγείς εκθέτες και $u\in L^p(0,1)$, $v\in L^q(0,1)$. Τότε,

$$u\cdot v\in L^1(0,1),\quad \|u\cdot v\|_1\leq\|u\|_p\cdot\|v\|_q.$$

<u>Απόδειξη:</u> Εάν $1<p<\infty$, τότε από Πρότ. Ι.4 παίρνουμε

$$\int_0^1|u(t)|\cdot|v(t)|dt\leq\left\{\int_0^1|u(t)|^p dt\right\}^{1/p}\cdot\left\{\int_0^1|v(t)|^q dt\right\}^{1/q}$$

$$=\|u\|_p\cdot\|v\|_q$$

$$\Longrightarrow u\cdot v \in L^1(0,1) \text{ κ' } \|u\cdot v\|_1 \leq \|u\|_p \cdot \|v\|_q .$$

Εάν $p=1$, $q=\infty$, τότε $|v(t)| \leq \|v\|_\infty$, σ.π.

$$\Longrightarrow \int_0^1 |u(t)||v(t)|\,dt \leq \|v\|_\infty \int_0^1 |u(t)|\,dt$$

$$= \|u\|_1 \cdot \|v\|_\infty$$

$$\Longrightarrow u\cdot v \in L^1(0,1), \|u\cdot v\|_1 \leq \|u\|_1 \|v\|_\infty .$$

Όμοια κ' για $p=\infty$, $q=1$. $\boxtimes$

<u>Πρόταση ΙΙ.5.</u> Έστω $p\in[1,\infty]$ και $u,v\in L^p(0,1)$. Τότε, $\|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$.

<u>Απόδειξη:</u> Εάν $1<p<\infty$, το συμπέρασμα έπεται από την ανισότητα Minkowski (Πρότ. Ι.5).
Εάν $p=1$ ή ∞, η αποδεικτέα έπεται από τους ορισμούς κ' την απλή ανισότητα

$$|u(t)+v(t)| \leq |u(t)|+|v(t)|, \quad 0<t<1.$$

$\boxtimes$

<u>Σχόλιο:</u> $\forall p\in[1,\infty]$, $\forall c\in\mathbb{R}$, $\forall u\in L^p(0,1)$,

$$\|cu\|_p = |c|\cdot\|u\|_p .$$

Η έκφραση

$\|u\|_p, \quad 1 \le p \le \infty$

δεν ορίζει νόρμα!

Πράγματι· εάν $\|u\|_p = 0$, τότε $u = 0$, λ-σ.π.
(όχι παντού!)

Για να ξεπεράσουμε αυτή τη δυσκολία, ορίζουμε στον $L^p(0,1)$ την παρακάτω διμελή σχέση "$\sim$":

$\forall\, u, v \in L^p(0,1), \quad u \sim v \iff u = v, \ \lambda$-σ.π.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η "$\sim$" είναι σχέση ισοδυναμίας, η οποία διαμερίζει τον $L^p(0,1)$ σε κλάσεις ισοδυναμίας $[u]$, $u \in L^p(0,1)$,
όπου

$$[u] = \{ v \in L^p(0,1) \mid u = v, \ \lambda\text{-σ.π.} \}.$$

Εάν $v \in [u]$, $\int_0^1 |u|^p = \int_0^1 |v|^p \ (1 \le p < \infty)$

κ' $\|u\|_\infty = \|v\|_\infty \ (p = \infty)$,
οπότε ορίζεται καλώς η ποσότητα

$$\|[u]\|_p = \int_0^1 |u(t)|^p dt \ (1 \le p < \infty)$$

κ' η $\|[u]\|_\infty = \|u\|_\infty \ (p = \infty)$.

Στο εξής, όταν γράφουμε "$L^p(0,1)$" θα εννοούμε το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας

$$[u], \quad u \in L^p(0,1),$$

οπότε η έκφραση $\|u\|_p$ ορίζει νόρμα στον $L^p(0,1)$.

<u>Θεώρημα II.6.</u> Ο $(L^p(0,1), \|\cdot\|_p)$ είναι χώρος Banach.

<u>Πρόταση II.7.</u> Εάν $(u_n) \subset L^p(0,1)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ κ' $u \in L^p(0,1)$ με $\|u_n - u\|_p \xrightarrow{n} 0$, $\exists$ υπακολουθία (u_{k_n}) κ' $w \in L^p(0,1)$, $w \geq 0$, ώστε

- $u_{k_n}(t) \to u(t)$, λ-σ.π.
- $\forall n \geq 1$, $|u_{k_n}(t)| \leq w(t)$, λ-σ.π.

<u>Θεώρημα II.8.</u> Για $1 \leq p < \infty$, ο $L^p(0,1)$ είναι διαχωρίσιμος. Ο $L^\infty(0,1)$ <u>δεν</u> είναι διαχωρίσιμος.

Πρόταση ΙΙ.9. (Ανισότητα Clarkson, V1)

Εάν $2 \leq p < \infty$ κ' $u, v \in L^p(0,1)$, ισχύει

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_p^p + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|_p^p \leq \frac{1}{2}\left(\|u\|_p^p + \|v\|_p^p \right).$$

Απόδειξη: Άμεση, από την Πρόταση Ι.2.

Πρόταση ΙΙ.10. Για $2 \leq p < \infty$, ο $L^p(0,1)$ είναι ομοιόμορφα κυρτός.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon \in (0,2)$. Θέτουμε $\delta = 1 - \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right]^{1/p} > 0$.

Έστω $u, v \in L^p(0,1)$ με

$$\|u-v\|_p \geq \varepsilon, \quad \|u\|_p \leq 1, \ \|v\|_p \leq 1.$$

Έχουμε

$$\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p + \left\| \frac{u+v}{2} \right\|_p^p \leq \left\| \frac{u-v}{2} \right\|_p^p + \left\| \frac{u+v}{2} \right\|_p^p \leq$$

$$\overset{[\text{Πρότ. ΙΙ.9}]}{\leq} \frac{1}{2}\left(\|u\|_p^p + \|v\|_p^p \right) = 1$$

$$\Longrightarrow \left\| \frac{u+v}{2} \right\|_p^p \leq 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p = (1-\delta)^p$$

$$\Longrightarrow \left\| \frac{u+v}{2} \right\|_p \leq 1 - \delta.$$

$\boxtimes$

Πόρισμα ΙΙ.11. Για $2 \leq p < \infty$, ο $L^p(0,1)$ είναι ανακλαστικός.

<u>Λήμμα ΙΙ-12:</u> Έστω $1 < p \leq 2$,

$1/p + 1/q = 1$, $\beta \in [0,1]$. Τότε,

$$(1+\beta)^q + (1-\beta)^q \leq 2\,(1+\beta^p)^{q-1}.$$

<u>Απόδειξη:</u> Θέτουμε

$$\varphi_\beta(t) = \left(1+\beta t^{1-q}\right)\cdot\left(1+\beta t\right)^{q-1}, \ \cancel{t \in [0,1]}.$$

Έχουμε $\boxed{\varphi_\beta(1) = (1+\beta)^q,}$

$$\varphi_\beta(\beta^{p-1}) = \left[1+\beta(\beta^{p-1})^{1-q}\right]\left(1+\beta\beta^{p-1}\right)^{q-1}$$

$$= \left(1+\beta\beta^{-1}\right)\left(1+\beta^p\right)^{q-1}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\varphi_\beta(\beta^{p-1}) = 2\,(1+\beta^p)^{q-1}.}$$

Σημ. $(p-1)(1-q) = p - pq - 1 + q = -1$

(αφού $1/p + 1/q = 1$).

Επιπλέον, $\boxed{\varphi'_\beta(\beta^{p-1}) = 0}$

και

$\varphi'_\beta(t) =$

$$= (1-q)\beta t^{-q}(1+\beta t)^{q-1} + (q-1)\beta\left(1+\beta t^{1-q}\right)(1+\beta t)^{q-2}$$

$$= (q-1)\beta\,(1+\beta t)^{q-2}\left[1+\beta t^{1-q} - t^{-q}(1+\beta t)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_\beta'(t) = (q-1)\beta(1+\beta t)^{q-2}(1-t^{-q})}$$

Θέτουμε $g_\beta(t) = \varphi_\beta(t) + \varphi_{-\beta}(t)$, $t \in [0,1]$.

Τότε,

$$g_\beta(1) = (1+\beta)^q + (1-\beta)^q = \underline{\text{α' μέλος αποδεικτέας}}$$

$$g_\beta(\beta^{p-1}) = 2(1+\beta^p)^{q-1} = \underline{\text{β' μέλος αποδεικτέας}}$$

Αφού $\beta^{p-1} \leq 1$, αρκεί να δ.ο. $\underline{g_\beta \downarrow}$.

$\forall\, t \in [0,1]$,

$$g_\beta'(t) = (q-1)\beta(1+\beta t)^{q-2}(1-t^{-q}) - (q-1)\beta(1-\beta t)^{q-2}(1-t^{-q})$$

$$= (q-1)\beta(1-t^{-q}) \cdot \left[(1+\beta t)^{q-2} - (1-\beta t)^{q-2}\right].$$

Είναι

$$q-2=\frac{p}{p-1}-2=\frac{2-p}{p-1}\geq 0$$

$$\Longrightarrow \underline{(1+\beta t)^{q-2}-(1-\beta t)^{q-2}\geq 0}, \ \forall t\in[0,1],$$

ενώ $\forall t\in[0,1]$, $t^{q}\leq 1 \Rightarrow t^{-q}\geq 1$

$$\Rightarrow \underline{1-t^{-q}\leq 0}$$

$$\Longrightarrow g_\beta'(t)\leq 0, \ \forall t\in[0,1]$$

$$\Longrightarrow g_\beta \downarrow \text{ στο } [0,1].$$

$\boxtimes$

<u>Πόρισμα ΙΙ.13</u>: Έστω $1<p\leq 2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Τότε, $\forall x,y\in\mathbb{R}$,

$$|x+y|^q+|x-y|^q\leq 2\left(|x|^p+|y|^p\right)^{q-1}.$$

<u>Απόδειξη</u>: Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι $\forall \beta\in[-1,1]$,

$$(1+\beta)^q+(1-\beta)^q\leq 2\left(1+|\beta|^p\right)^{q-1}$$

(βλ. Λήμμα ΙΙ.12).

- Για $x=0$, η αποδεικτέα ισχύει, διότι $p(q-1)=pq-p=q$.
- Έστω $x\neq 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $|x|\leq|y|$.

Θέτουμε $\beta = \frac{y}{x} \in [-1,1]$. Έχουμε $y = x\beta$ κ'

$$|x+y|^q + |x-y|^q = |x(1+\beta)|^q + |x(1-\beta)|^q$$
$$= |x|^q \cdot \left(|1+\beta|^q + |1-\beta|^q \right)$$
$$= |x|^q \cdot \left[(1+\beta)^q + (1-\beta)^q \right]$$
$$\leq 2|x|^q \cdot \left(1 + |\beta|^p \right)^{q-1}$$
$$= 2|x|^q \cdot \left(1 + \frac{|y|^p}{|x|^p} \right)^{q-1}$$
$$\overset{p(q-1)=q}{=} 2\left(|x|^p + |y|^p \right)^{q-1}. \quad \boxtimes$$

<u>Λήμμα II.14</u>: Έστω $0<r<1$ κ' $u, v \in L^r(0,1)_+$. Τότε, $\|u+v\|_r \geq \|u\|_r + \|v\|_r$. ($u, v \geq 0$).

<u>Απόδειξη</u>: Θέτουμε

$$\Gamma = \|u\|_r + \|v\|_r, \quad \alpha = \frac{\|u\|_r}{\Gamma}, \quad \beta = \frac{\|v\|_r}{\Gamma}.$$

Τότε, $\alpha + \beta = 1$. Επειδή η

$$x \mapsto x^r$$

είναι <u>κοίλη</u> στο $[0, +\infty)$, έχουμε

$\forall t \in (0,1)$,

$$|u(t)+v(t)|^r = \left[\alpha \frac{u(t)}{\alpha} + \beta \frac{v(t)}{\beta}\right]^r$$

$$\geq \alpha \frac{u(t)^r}{\alpha^r} + \beta \frac{v(t)^r}{\beta^r}$$

$$\Longrightarrow \|u+v\|_r^r \geq \alpha \left(\frac{\|u\|_r}{\alpha}\right)^r + \beta \left(\frac{\|v\|_r}{\beta}\right)^r$$

$$= \alpha \Gamma^r + \beta \Gamma^r = \Gamma^r$$

$$\Longrightarrow \|u+v\|_r \geq \Gamma = \|u\|_r + \|v\|_r. \quad \boxtimes$$

<u>Πρόταση II. 15 (Ανισότητα Clarkson, V2)</u>

Έστω $1 < p \leq 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $u, v \in L^p(0,1)$.

Τότε, $\forall u, v \in L^p(0,1)$,

$$\|u+v\|_p^q + \|u-v\|_p^q \leq 2\left(\|u\|_p^p + \|v\|_p^p\right)^{q-1}.$$

<u>Απόδειξη:</u> Επειδή $q(p-1) = p$, έχουμε ότι $\forall w \in L^p$,

$$\|w\|_p^q = \left(\int_0^1 |w|^p\right)^{q/p} =$$

$$= \left[\int_0^1 |w|^{q(p-1)}\right]^{\frac{1}{p-1}} = \| |w|^q \|_{p-1}.$$

Επομένως, $\forall u, v \in L^p(0,1)$,

$$\|u+v\|_p^q + \|u-v\|_p^q = \| |u+v|^q \|_{p-1} + \| |u-v|^q \|_{p-1} \overset{[p-1\leq 1!]}{\underset{[\text{Λήμμα II-14}]}{\leq}}$$

$$\leq \| |u+v|^q + |u-v|^q \|_{p-1}$$

$$\overset{[\text{Πόρισμα II-13}]}{\leq} 2 \| (|u|^p + |v|^p)^{q-1} \|_{p-1}$$

$$\overset{[(p-1)(q-1)=1]}{=} 2 \left\{ \int_0^1 [|u|^p + |v|^p] \right\}^{\frac{1}{p-1}}$$

$$= 2 \left\{ \|u\|_p^p + \|v\|_p^p \right\}^{q-1}. \quad \boxtimes$$

<u>Πόρισμα II.16:</u> Για $1<p\leq 2$, ο L^p είναι ομοιόμορφα κυρτός.

<u>Απόδειξη:</u> Προκύπτει εύκολα από την Πρότ. II-15. (Άσκηση!)

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ II-17</u> !

<u>$\forall p \in (1,\infty)$, ο L^p είναι ομοιόμορφα κυρτός.</u>

($\Longrightarrow$ L^p αναυλαστικός)

<u>Πρόταση ΙΙ.18</u>: Ο $l^1(\mathbb{N})$ εμφυτεύεται ισομετρικά στον $L^1(0,1)$ (κ' άρα ο L^1 <u>δεν</u> <u>είναι ανακλαστικός</u>).

<u>Απόδειξη:</u> Θέτουμε
$$E_n = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], \; n \geq 1.$$

Τότε,
$$E_n \cap E_j = \emptyset, \; \forall n \neq j, \quad (0,1] = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j.$$

Θέτουμε
$$u_n = \frac{1}{\lambda(E_n)} \chi_{E_n}, \quad n \geq 1.$$

Τότε,
$$\|u_n\|_{L^1} = 1, \; \forall n \geq 1, \quad u_n|_{E_j} = 0, \; \forall n \neq j.$$

<u>Ισχυρισμός:</u> Έστω $n \geq 1$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Τότε,
$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k u_k \right\|_{L^1} = \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Πράγματι:

- $\forall j > n$, $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k u_k \right) \Big|_{E_j} = 0$.
- Για $1 \leq j \leq n$, $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k u_k \right) \Big|_{E_j} = a_j / \lambda(E_j)$.

Επομένως,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k u_k \right\|_{L^1} = \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n} a_k u_k(t) \right| dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \int_{E_j} \left| \sum_{k=1}^{n} a_k u_k \right| d\lambda \right\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_{E_j} |a_j| / \lambda(E_j) \, d\lambda = \sum_{j=1}^{n} |a_j|.$$

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι $\forall x \in l^1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| x(n) u_n \|_{L^1} = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

$\overset{[L^1 \text{ Banach}]}{\Longrightarrow}$ υπάρχει το

$$\sum_{n=1}^{\infty} x(n) u_n = \|\cdot\|_{L^1} - \lim_n \sum_{k=1}^{n} x(k) u_k$$

και

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x(n) u_n \right\|_{L^1} = \lim_n \left\| \sum_{k=1}^{n} x(k) u_k \right\|_{L^1} =$$

$\underline{[\text{Ισχυρ.!}]}$ $\lim_n \sum_{k=1}^{n} |x(k)| = \|x\|_{l^1}$.

Άρα, η

$$l^1 \ni x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} x(n) u_n \in L^1$$

είναι γραμμ. ισομετρία. $\boxtimes$

Πρόταση II.19: Έστω $p, q \in (1, \infty)$ με $1/p + 1/q = 1$.

Θεωρούμε τον τελεστή $T : L^q(0,1) \to [L^p(0,1)]^*$ με

$$T(u)(v) = \int_0^1 u(t)v(t)\,dt, \quad \forall u \in L^q, \forall v \in L^p.$$

Τότε, ο T είναι <u>γραμμική</u> <u>ισομετρία</u> <u>επί</u>.

<u>Απόδειξη:</u> Προφανώς, T γραμμικός.

Επιπλέον, λόγω ανισότητας Hölder, ο T είναι φραγμένος και

$$\|Tu\| \leq \|u\|_q, \quad \forall u \in L^q.$$

• <u>T ισομετρία.</u> Πράγματι έστω $u \in L^q$.

Θέτουμε
$$v(t) = \begin{cases} |u(t)|^{q-2} u(t), & u(t) \neq 0 \\ 0, & u(t) = 0. \end{cases}$$

Τότε,

$$\int_0^1 |v(t)|^p dt = \int_{(u\neq 0)} \left(|u|^{q-1}\right)^p d\lambda =$$

$$= \int_{(u \neq 0)} |u|^q d\lambda = \int_0^1 |u|^q d\lambda$$

$$= \|u\|_q^q$$

$\Longrightarrow$

$\Longrightarrow v \in L^p$ και $\|v\|_p = \|u\|_q^{q/p} = \|u\|_q^{q-1}$.

Έχουμε επιπλέον

$$Tu(v) = \int_0^1 u(t)v(t)\,dt = \int_{(u\neq 0)} u\cdot|u|^{q-2}\cdot u\,d\lambda$$

$$= \int_{(u\neq 0)} |u|^q d\lambda = \|u\|_q^q.$$

Επομένως,

$$\|u\|_q^q = Tu(v) \leq \|Tu\|\cdot\|v\|_p = \|Tu\|\cdot\|u\|_q^{q-1}$$

$$\Longrightarrow \|u\|_q \leq \|Tu\| \Rightarrow \|Tu\| = \|u\|_q.$$

• T επί. Πράγματι· επειδή L^q Banach κ' T ισομετρία, ο $T(L^q)$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $(L^p)^*$.

Υποθέτουμε ότι $T(L^q) \subsetneq (L^p)^*$.

Από Θ. Hahn–Banach, $\exists\, \Lambda \in (L^p)^{**}$:

$$\|\Lambda\| = 1, \quad \Lambda\left[T(L^q)\right] = \{0\},$$

δηλ.

$$\Lambda(Tu)=0, \quad \forall u \in L^q.$$

Αλλά <u>L^p ανακλαστικός</u>! $\Longrightarrow \exists v \in L^p$:

$$\Lambda = e(v),$$

όπου

$$e : L^p \to (L^p)^{**}$$

η κανονική εμφύτευση.

Τότε, $\|v\|_p = \|e(v)\| = \|\Lambda\| = 1$ και

$\forall u \in L^q$,

$$0 = \Lambda(Tu) = Tu(v) = \int_0^1 u(t)v(t)\,dt.$$

Θέτουμε $u(t) = \begin{cases} |v(t)|^{p-2}v(t), & v(t) \neq 0 \\ 0, & v(t) = 0. \end{cases}$

Τότε, $\displaystyle\int_0^1 |u(t)|^q\,dt = \int_{(v\neq 0)} \left(|v|^{p-1}\right)^q d\lambda =$

$$= \int_{(v\neq 0)} |v|^p d\lambda = \|v\|_p^p < \infty$$

$\Longrightarrow u \in L^q$ και $\|u\|_q^q = \|v\|_p^p$.

Αλλά τότε

$$0=\int_0^1 u(t)v(t)\,dt=\int_{(v\neq 0)} |v|^{p-2}v\cdot v\,d\lambda$$

$$=\|v\|_p^p=1 \text{ (ΑΤΟΠΟ!)}$$

$\boxtimes$

<u>Θεώρημα</u> II.20: Θέτουμε $T: L^\infty \to (L^1)^*$ με $T(u)(v)=\int_0^1 u(t)v(t)\,dt$, $\forall u\in L^\infty$, $\forall v\in L^1$.

Τότε, η T είναι γραμμική ισομετρία επί.

<u>Πόρισμα II.21</u>: Ο $L^\infty(0,1)$ <u>δεν</u> <u>είναι</u> <u>ανακλαστικός</u>.

(1)

2^{η} ανισότητα Clarkson

Εάν $1<p<2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, τότε $\forall u, v \in L^p(\Omega)$,

$$\|u-v\|_p^q + \|u+v\|_p^q \leq 2\left(\|u\|_p^p + \|v\|_p^p\right)^{q-1}. \quad (\mathrm{I})$$

Πόρισμα Εάν $1<p<2$, ο $L^p(\Omega)$ είναι ομοιόμορφα κυρτός.

Απόδειξη: $\forall u, v \in L^p(\Omega)$ με $\|u\|_p \leq 1$, $\|v\|_p \leq 1$, έχουμε

$$\|u-v\|_p^q + \|u+v\|_p^q \overset{(\mathrm{I})}{\leq} 2 \cdot 2^{q-1} = 2^q. \quad (\mathrm{II})$$

Έστω $\varepsilon \in (0,2)$. Θα επιλέξουμε $\delta \in (0,1)$ | $\forall u, v \in L^p(\Omega)$ με

$$\|u\|_p \leq 1, \ \|v\|_p \leq 1, \ \left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p > 1-\delta, \quad (\mathrm{III})$$

ισχύει $\|u-v\|_p < \varepsilon$.

Έστω $\delta \in (0,1)$ | η (III) ικανοποιείται. Τότε, λόγω της (II),

$$\|u-v\|_p^q + 2^q(1-\delta)^q < 2^q$$

$$\Rightarrow \|u-v\|_p^q < 2^q\left[1-(1-\delta)^q\right]$$

$$\Rightarrow \|u-v\|_p < 2\left[1-(1-\delta)^q\right]^{1/q}$$

Για να ισχύει $\|u-v\|_p < \varepsilon$, αρκεί

$$2\left[1-(1-\delta)^q\right]^{1/q} < \varepsilon$$

ή
$$2^q\left[1-(1-\delta)^q\right] < \varepsilon^q$$

ή
$$1-(1-\delta)^q < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q$$

ή
$$(1-\delta)^q > 1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q$$

ή
$$1-\delta > \left[1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right]^{1/q}$$

ή
$$0<\delta < 1-\left[1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right]^{1/q}.$$

⊠