ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΧΩΡΩΝ $L^p(\Omega)$, $1<p<\infty$.

Έστω $1<p<\infty$.

Πρόταση 1:

(i) Η συνάρτηση $\varphi(t)=\frac{1+|t|^p}{2}-\left(\frac{1+t}{2}\right)^p$ είναι $\downarrow$ στο $[-1,1]$.

(ii) $\forall t\in[-1,1]$, $\left(\frac{1+t}{2}\right)^p \le \frac{1+|t|^p}{2}$. (1)

(iii) $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $\left|\frac{a+b}{2}\right|^p \le \frac{|a|^p+|b|^p}{2}$. (2)

Απόδειξη:

(i) $\varphi(t)=\begin{cases}\frac{1+t^p}{2}-\left(\frac{1+t}{2}\right)^p, & t\in[0,1]\\ \frac{1+(-t)^p}{2}-\left(\frac{1+t}{2}\right)^p, & t\in[-1,0).\end{cases}$

φ συνεχής.

- $\forall t\in(0,1)$, $\varphi'(t)=\frac{p}{2}\left[t^{p-1}-\left(\frac{1+t}{2}\right)^{p-1}\right]<0$

(αφού $t<\frac{1+t}{2}$) $\Rightarrow \varphi\downarrow$ στο $[0,1]$

- $\forall t\in(-1,0)$, $\varphi'(t)=-\frac{p}{2}\left[(-t)^{p-1}+\left(\frac{1+t}{2}\right)^{p-1}\right]<0$
$\Rightarrow \varphi\downarrow$ στο $[-1,0]$.

Επιπλέον φ συνεχής, $\varphi\downarrow$ στο $[-1,1]$.

(ii) $\forall t\in[-1,1]$, $\varphi(t)\ge\varphi(1)=0 \Rightarrow$ ισχύει η (1).

(iii) Έστω $a,b\in\mathbb{R}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|a|\le|b|$.

- Εάν $b=0$, τότε $a=0 \Rightarrow$ ισχύει η (2).
- Εάν $b\neq0$, θέτουμε $t=a/b\in[-1,1]$ κι λόγω της (1),

$$\left|\frac{1+t}{2}\right|^p=\left(\frac{1+t}{2}\right)^p\le\frac{1+|t|^p}{2}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $|b|^p$, προκύπτει η (2). $\boxtimes$

Η επόμενη Πρόταση "βελτιώνει" την Πρόταση 1.

<u>Πρόταση 2:</u> Έστω $0<\varepsilon<1$. Τότε, $\exists\ \tilde{\delta}=\tilde{\delta}(\varepsilon)\in(0,1) \mid$

<u>(i)</u> $\forall t\in[-1,1-\varepsilon]$, $\left(\frac{1+t}{2}\right)^p \leq (1-\tilde{\delta})\,\frac{1+|t|^p}{2}$. (3)

<u>(ii)</u> $\forall a,b\in\mathbb{R}$ με $|a-b|\geq \varepsilon \max(|a|,|b|)$ ισχύει

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p \leq (1-\tilde{\delta})\,\frac{|a|^p+|b|^p}{2}. \qquad (4)$$

<u>Απόδειξη:</u>

<u>(i)</u> Έστω φ η συνάρτηση της Πρότ. 1. Τότε,

$$\forall t\in[-1,1-\varepsilon],\quad \varphi(t)\geq\varphi(1-\varepsilon)>\varphi(1)=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1+|t|^p}{2}-\left(\frac{1+t}{2}\right)^p \geq \varphi(1-\varepsilon)=\theta_\varepsilon>0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1+t}{2}\right)^p \leq \frac{1+|t|^p}{2}-\theta_\varepsilon.$$

Επιλέγουμε $0<\tilde{\delta}<\min\{\theta_\varepsilon,1\}$. Τότε, $\forall t\in[-1,1-\varepsilon]$

$$\tilde{\delta}\,\frac{1+|t|^p}{2}\leq\tilde{\delta}<\theta_\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1+t}{2}\right)^p \leq \frac{1+|t|^p}{2}-\tilde{\delta}\,\frac{1+|t|^p}{2}$$

$$=(1-\tilde{\delta})\,\frac{1+|t|^p}{2}.$$

<u>(ii)</u> Έστω $a,b\in\mathbb{R}$ με $|a-b|\geq\varepsilon\max(|a|,|b|)$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|a|\leq|b|$.

- Εάν $b=0$, τότε $a=0 \Rightarrow$ η (4) ισχύει.
- Εάν $b\neq 0$, θέτουμε $t=a/b\in[-1,1]$ κ'

$$1-t=|t-1|\geq\varepsilon \quad\Rightarrow\quad t\leq 1-\varepsilon.$$

(3)

Εφαρμόζοντας την (3) για $t = a/b \in [-1, 1-\varepsilon]$ παίρνουμε
$$\left|\frac{1+t}{2}\right|^p = \left(\frac{1+t}{2}\right)^p \le (1-\tilde{\delta})\,\frac{1+|t|^p}{2}.$$

Πολλ/ζοντας με $|b|^p$ προκύπτει η $(*_1)$. $\boxtimes$

<u>Παρατήρηση 1:</u> Η (4) γράφεται ισοδύναμα:

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall\, a, b \in \mathbb{R} \text{ με } |a-b| \geq \varepsilon \max(|a|,|b|), \text{ ισχύει} \\ \dfrac{|a|^p+|b|^p}{2} - \left|\dfrac{a+b}{2}\right|^p \geq \tilde{\delta}\,\dfrac{|a|^p+|b|^p}{2}.\end{array}} \quad (5)$$

Το α' μέλος της (5) είναι <u>πάντα</u> ≥ 0 (βλ. Πρότ. (1) (iii)) για όλα τα $a, b \in \mathbb{R}$ αλλά <u>φράσσεται από κάτω από θετικό εάν $|a-b| \geq \varepsilon \max(|a|,|b|)$, $|a|+|b| > 0$</u>

<u>Παρατήρηση 2:</u> $\forall\, u, v \in L^p(\Omega)$, θέτουμε
$$R(u,v) = \int_\Omega \left(\frac{|u|^p+|v|^p}{2} - \left|\frac{u+v}{2}\right|^p\right) d\mu \geq 0$$
(Πρότ. 1).

Εάν $\forall\, \varepsilon > 0$,
$$\inf\{R(u,v) \mid \|u\|_p \le 1, \|v\|_p \le 1, \|u-v\|_p \geq \varepsilon\} = s_\varepsilon > 0,$$
τότε ο L^p είναι ομοιόμορφα κυρτός.

Πράγματι· έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε
$$0 < \eta_\varepsilon < \min(1, s_\varepsilon).$$

Τότε, $\forall\, u, v \in L^p$ με $\|u\|_p \le 1$, $\|v\|_p \le 1$, $\|u-v\|_p \geq \varepsilon$ έχουμε

$R(u,v) \geq \eta_\varepsilon$ (ή) $\frac{\|u\|_p^p+\|v\|_p^p}{2} - \left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^p > \eta_\varepsilon$

(ή) $\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^p \leq \frac{\|u\|_p^p+\|v\|_p^p}{2} - \eta_\varepsilon$

$$\leq 1-\eta_\varepsilon$$

(ή) $\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p \leq (1-\eta_\varepsilon)^{1/p} = 1-\delta_\varepsilon,$

όπου $\delta_\varepsilon = 1-(1-\eta_\varepsilon)^{1/p} \in (0,1)$.

<u>Η απόδειξη της ομοιόμορφης κυρτότητας των L^p, $1<p<\infty$, βασίζεται ουσιωδώς στις Παρατηρήσεις 1 & 2.</u>

<u>Θεώρημα 1</u>: Για $1<p<\infty$, ο $L^p(\Omega)$ είναι ομοιόμορφα κυρτός.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\varepsilon \in (0,1)$ κ' $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}(\varepsilon) \in (0,1]$ (θα επιλεγεί αργότερα). Λόγω της Πρότασης 2(ii), $\exists\, \tilde{\delta} \in (0,1)$ ώστε να ισχύει η (5) για "ε" $= \tilde{\varepsilon}$.

Έστω $u,v \in L^p(\Omega)$ με $\|u\|_p \leq 1$, $\|v\|_p \leq 1$, $\|u-v\|_p \geq \varepsilon$. Θέτουμε

$$R(u,v) = \int_\Omega \left(\frac{|u|^p+|v|^p}{2} - \left|\frac{u+v}{2}\right|^p \right) d\mu .$$

Θα δ.ο. το $R(u,v)$ έχει θετικό κάτω φράγμα ανεξάρτητο των u,v (βλ. Παρατήρηση 2).
Για να αξιοποιήσουμε την (5) θέτουμε

$$M = \{\omega \in \Omega : |u(\omega)-v(\omega)| \geq \tilde{\varepsilon} \max(|u(\omega)|, |v(\omega)|)\}$$

Τότε, $\forall\, \omega \in M$,

$$\frac{|u(\omega)|^p+|v(\omega)|^p}{2} - \left|\frac{u(\omega)+v(\omega)}{2}\right|^p >$$

$$> \tilde{\delta}\, \frac{|u(\omega)|^p+|v(\omega)|^p}{2} \implies$$

$$\Rightarrow R(u,v) \geq \int_{\mathcal{M}} \left(\frac{|u|^p + |v|^p}{2} - \left| \frac{u+v}{2} \right|^p \right) d\mu \quad \left. \right\} (6)$$

$$\geq \tilde{\delta} \int_{\mathcal{M}} \frac{|u|^p + |v|^p}{2} d\mu .$$

Αλλά

$$\varepsilon^p \leq \|u-v\|_p^p = \int_{\Omega} |u-v|^p d\mu = \int_{\mathcal{M}} |u-v|^p d\mu +$$

$$+ \int_{\mathcal{M}^c} |u-v|^p d\mu \leq$$

$$\leq \int_{\mathcal{M}} |u-v|^p d\mu + \tilde{\varepsilon}^p \int_{\mathcal{M}^c} [\max(|u|,|v|)]^p d\mu$$

$$\leq \int_{\mathcal{M}} |u-v|^p d\mu + \tilde{\varepsilon}^p \int_{\mathcal{M}^c} (|u|^p + |v|^p) d\mu$$

$$\leq \int_{\mathcal{M}} |u-v|^p d\mu + \tilde{\varepsilon}^p (\|u\|_p^p + \|v\|_p^p)$$

$$\leq \int_{\mathcal{M}} |u-v|^p d\mu + 2\tilde{\varepsilon}^p$$

$$\Rightarrow \varepsilon^p - 2\tilde{\varepsilon}^p \leq \int_{\mathcal{M}} |u-v|^p d\mu \overset{[\text{Πρότ.} 1(ii)]}{\leq}$$

$$\leq 2^{p-1} \int_{\mathcal{M}} (|u|^p + |v|^p) d\mu$$

$$\overset{(6)}{\Rightarrow} R(u,v) \geq \frac{\tilde{\delta}}{2^p} (\varepsilon^p - 2\tilde{\varepsilon}^p) \overset{(?)}{>} 0 .$$

Αρκεί π.χ. $\tilde{\varepsilon}^p = \frac{\varepsilon^p}{4}$ ή $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon / 4^{1/p}$.

Άρα, $\inf\{ R(u,v) : \|u\|_p \leq 1, \|v\|_p \leq 1, \|u-v\|_p \geq \varepsilon \} > 0 .$ $\boxtimes$