ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΝΟΙΚΤΗΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗΣ

Πρόταση 1 (Βασική!) Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα κ' $T: X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. ~~Υ~~ποθέτουμε ότι

$$0 \in \overset{\circ}{\overline{TB}},$$

όπου $B = \{x \in X : \|x\| < 1\}$. Τότε,

$$0 \in \overset{\circ}{TB} \quad (\Rightarrow T \text{ επί, ανοικτή}).$$

Απόδειξη: $\exists\, \delta > 0 \mid B_Y(0,\delta) \subset \overline{TB}$

(όπου $B_Y(0,r) = \{y \in Y : \|y\| < r\},\ r > 0$).

Τότε, $B_Y(0,\delta) \subset TB + B_Y(0,\delta/2)$

$$\Rightarrow \forall \theta > 0,\ B_Y(0,\theta) \subset \frac{\theta}{\delta} TB + B_Y(0,\theta/2)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \theta > 0,\ \forall y \in B_Y(0,\theta),\ \exists\, x \in X : \\ \|x\| < \frac{\theta}{\delta},\ \|y - Tx\| < \theta/2 . \end{array} \right\} \quad (1)$$

Θα δ.ο.

$$B_Y(0,\delta/2) \subset TB .$$

Έστω $y \in B_Y(0, \delta/2)$.

- Για "θ" $= \delta/2$, η (1) δίνει ότι

$\exists\, x_1 \in X: \quad \|x_1\| < \frac{1}{2}, \ \|y - Tx_1\| < \frac{\delta}{2^2}$.

- Για "θ" $= \frac{\delta}{2^2}$, (1) $\Longrightarrow$ $\exists\, x_2 \in X$:

$\|x_2\| < \frac{1}{2^2}, \ \|y - Tx_1 - Tx_2\| < \frac{\delta}{2^3}$.

- Για "θ" $= \frac{\delta}{2^3}$, (1) $\Rightarrow$ $\exists\, x_3 \in X$:

$\|x_3\| < \frac{1}{2^3}, \ \|y - Tx_1 - Tx_2 - Tx_3\| < \frac{\delta}{2^4}$,

κ.ο.κ.

Επαγωγικά, επιλέγουμε $(x_n) \subset X$:

$$\left\{ \|x_n\| < \frac{1}{2^n}, \quad \Big\|y - \sum_{k=1}^{n} Tx_k\Big\| < \frac{\delta}{2^{n+1}}, \quad n \geq 1. \right\} \quad (2)$$

Είναι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$

$\xrightarrow{X \text{ Banach!}}$ $\exists\, x \in X: \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$,

δηλ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \xrightarrow[n \to \infty]{\|\cdot\|} x$.

Τότε, αφού T συνεχής, έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} Tx_k = T\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} Tx$$

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} \quad \boxed{y = Tx}.$$

Επιπλέον,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

$$\Rightarrow \quad \|x\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \|x_1\| + \sum_{n=2}^{\infty} \|x_n\|$$

$$\leq \|x_1\| + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \|x_1\| + \frac{1}{2} < 1$$

(σημ. ότι $\|x_1\| < 1/2$, λόγω της (2)).

Άρα, $\|x\| < 1 \Rightarrow \boxed{x \in B}$.

Δείξαμε λοιπόν ότι

$$\boxed{B_Y(0, \delta/2) \subset TB} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \quad 0 \in \overset{\circ}{\widehat{TB}}.$$

<u>Επιπλέον, T ανοικτή.</u>

Πράγματι· έστω $G \subset X$ ανοικτό και $x_0 \in G$. Τότε, $G - x_0$ ανοικτό $\ni 0$

$$\Rightarrow \exists \rho > 0 / \ \rho B \subset G - x_0$$

$$\Rightarrow \rho TB = T(\rho B) \subset TG - Tx_0$$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} B_Y(0, \rho\delta/2) \subset \rho TB \subset TG - Tx_0$$

$$\Rightarrow B_Y(Tx_0, \rho\delta/2) \subset TG$$

$\Rightarrow$ Tx_0 εσωτερικό σημείο του TG.

<u>Τέλος, T επί.</u>

Πράγματι· έστω $y \in Y \setminus \{0\}$. Τότε,

$$\frac{\delta}{4\|y\|} y \in B(0, \delta/2) \overset{(3)}{\subset} TB$$

$$\Rightarrow y \in T\left(\frac{4}{\delta}\|y\| B\right) \subset T(X).$$

$\boxtimes$

Πόρισμα 2: Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα και $T: X \to Y$ φραγμένος γραμμικός με $\overset{\circ}{\overline{T(B)}} \neq \emptyset$.

Τότε, $0 \in \overset{\circ}{\widehat{TB}}$ ($\Rightarrow$ T επί, ανοικτή).

Απόδειξη: Γενικά, αν G κυρτό συμμετρικό υποσύνολο ενός τοπολ. γραμμ. χώρου με $\overset{\circ}{G} \neq \emptyset$, τότε $0 \in \overset{\circ}{G}$.

Πράγματι· έστω $y_0 \in \overset{\circ}{G} \Rightarrow \exists\, V$ ανοικτό $|$

$0 \in V$, $y_0 + V \subset G \Rightarrow V \subset G - y_0$.

Τότε, $\frac{1}{2} V \subset \frac{1}{2} G - \frac{1}{2} y_0 \subset \frac{1}{2} G + \frac{1}{2} G \subset G$.

Επειδή B κυρτό, συμμετρικό κ' T γραμμικός, το $\overline{T(B)}$ είναι κυρτό, συμμετρικό με $\overset{\circ}{\overline{T(B)}} \neq \emptyset$ κ' άρα

$0 \in \overset{\circ}{\overline{T(B)}}$. $\boxtimes$

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του Θ. Ανοικτής Απεικόνισης, δίνουμε μια ενδιαφέρουσα συνέπεια της Πρότασης 1:

<u>Πρόταση 3</u>: Έστω Y διαχωρίσιμος χώρος <u>Banach</u>. Τότε, $\exists\, T: \ell^1(\mathbb{N}) \to Y$ φραγμένος, γραμμικός, <u>επί</u>.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω (y_n) $\|\cdot\|$-πυκνό υποσύνολο του

$$\{y \in Y : \|y\| \le 1\}.$$

$\forall x \in \ell^1$,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x(n) y_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| \cdot \|y_n\|$$
$$\le \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| = \|x\|_1$$
$$< \infty$$

$\xRightarrow{Y \text{ Banach!}}$ η $\sum_{n=1}^{\infty} x(n) y_n$ $\|\cdot\|$-συγκλίνει στον Y.

Θέτουμε $T: \ell^1 \to Y$

με
$$T(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} x(n) y_n .$$

Προφανώς, T γραμμικός, επί

$\forall x \in \ell^1$, $\|T(x)\| \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} \|x(n) y_n\| \leq 2\|x\|_1$

$\Rightarrow$ T φραγμένος.

Επιπλέον, $\forall n \geq 1$, $T(e_n) = 2y_n$, όπου

(e_n) η φυσική βάση του ℓ^1. Τότε,

$\{y_n : n \geq 1\} \subset T(B_{\ell^1})$, όπου

$$B_{\ell^1} = \{x \in \ell^1 : \|x\|_1 < 1\}.$$

Εφ' όσον (y_n) $\|\cdot\|$-πυκνό στο $\{y : \|y\| \leq 1\}$, παίρνουμε ότι

$$B_Y(0,1) \subset B_Y[0,1] = \{y \in Y : \|y\| \leq 1\} \subset \overline{T(B_{\ell^1})}^{\|\cdot\|}$$

$$\Rightarrow 0 \in \overset{\circ}{\overline{T(B_{\ell^1})}} \xRightarrow{(\text{Πρόταση } 1)} T \text{ επί.}$$

$\boxtimes$

Θεώρημα 4 (Θ. Ανοικτής απεικόνισης)

Έστω X, Y χώροι Banach κ' $T: X \to Y$ γραμμικός, φραγμένος, επί. Τότε, ο T είναι ανοικτή απεικόνιση (δηλ. απεικονίζει ανοικτά σε ανοικτά).

Απόδειξη: Θέτουμε $B = \{x \in X : \|x\| < 1\}$.

Τότε, $X = \bigcup_{n \geq 1} nB \overset{(T \text{ επί})}{\Longrightarrow}$

$$\Rightarrow \quad Y = TX \subset \bigcup_{n \geq 1} (nTB) \subset \bigcup_{n \geq 1} n\overline{TB}$$

$$\Rightarrow \quad Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} n\overline{TB}.$$

Επειδή Y πλήρης, το Θ. Baire δίνει

$$\overset{\circ}{\overline{nTB}} \neq \emptyset, \text{ για κάποιο } n \geq 1$$

$$\Rightarrow \quad n\overset{\circ}{\overline{TB}} \neq \emptyset, \quad " \quad " \quad "$$

$$\Rightarrow \quad \overset{\circ}{\overline{TB}} \neq \emptyset$$

$\overset{(\text{Πόρισμα 2})}{\Longrightarrow}$ T ανοικτή! $\boxtimes$

Συνέπειες Θ. Ανοικτής Απεικόνισης

Πόρισμα 5: Έστω X, Y χώροι Banach και $T: X \to Y$ γραμμικός, φραγμένος, επί. Τότε, $\exists M > 0 \mid \forall y \in Y, \exists x \in X$ ώστε

$$y = T(x), \quad \|x\| \leq M \cdot \|y\|.$$

Απόδειξη: $T(B)$ ανοικτό $\subset Y$

$\Rightarrow \exists \delta > 0 \mid B_Y(0, \delta) \subset T(B)$.

Έστω $y \in Y \setminus \{0\}$. Τότε, $\frac{\delta}{2\|y\|} y \in T(B)$

$\Rightarrow \exists z \in B \mid \frac{\delta}{2\|y\|} y = T(z)$

$\Rightarrow y = T\left(\frac{2\|y\|}{\delta} z\right)$. Θέτουμε $x = \frac{2\|y\|}{\delta} z$.

Τότε, $\|x\| = \frac{2\|y\|}{\delta} \|z\| \leq \frac{2}{\delta} \cdot \|y\|$.

Θέτουμε $M = 2/\delta$.

$\boxtimes$

Πόρισμα 6: Έστω $X, Y, T: X \to Y$ όπως στο πόρισμα 5. Εάν επιπλέον T 1-1, τότε

T ισομορφισμός.

<u>Απόδειξη:</u> Ορίζεται ο $T^{-1}: Y \to X$

και είναι γραμμικός.

Έστω $M>0$ όπως στο Πόρισμα 5 και $y \in Y$. Τότε, $\exists x \in X \mid$

$$y = Tx, \qquad \|x\| \leq M \cdot \|y\|$$

$$\Rightarrow \|T^{-1}(y)\| \leq M \cdot \|y\|$$

$\Rightarrow$ T^{-1} φραγμένος $\Rightarrow$ T ισομορφισμός. $\boxtimes$

<u>Πόρισμα 7:</u> Έστω X γραμμικός χώρος που

είναι <u>Banach</u> ως προς δύο νόρμες $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$. Υποθέτουμε ότι $\exists M>0 \mid$

$$\|x\|_1 \leq M\|x\|_2, \quad \forall x \in X.$$

Τότε, οι $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ είναι ισοδύναμες, δηλ.

$\exists K>0 \mid \forall x \in X$,

$$K\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M \cdot \|x\|_2.$$

<u>Απόδειξη:</u> Οι $(X, \|\cdot\|_1)$, $(X, \|\cdot\|_2)$ είναι Banach και η ταυτοτική

$$I_d: (X, \|\cdot\|_2) \to (X, \|\cdot\|_1)$$

είναι γραμμικός, <u>φραγμένος</u>, 1-1, επί τελεστής

$\underset{\Rightarrow}{(\text{Πόρισμα } 6)}$ I_d ισομορφισμός. $\boxtimes$

<u>Πόρισμα 8:</u> Έστω X, Y χώροι Banach

και $T: X \to Y$ γραμμικός, φραγμένος, <u>επί</u>.
Εάν X ανακλαστικός, τότε και Y ανακλαστικός.

<u>Απόδειξη:</u> Πόρισμα 5 $\Rightarrow \exists M \geq 0 \,|$

$\forall y \in Y, \exists x \in X$ ώστε
$$y = Tx, \quad \|x\| \leq M\|y\|.$$

Αρκεί να δ.ο. η κλειστή μπάλα
$$B_Y = \{y \in Y : \|y\| \leq 1\}$$
είναι w-συμπαγές.

$\forall y \in B_Y, \exists x \in X \,|\, y = Tx, \ \|x\| \leq M\|y\| \leq M$

$\Rightarrow \boxed{B_Y \subset M\,T(B_X), \text{ όπου}}$ (4)
$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}.$$

X ανακλ. $\Rightarrow B_X$ w-συμπαγές $\subset X$.
Αλλά T w-w συνεχής (γιατί;)

$\Rightarrow T(B_X)$ w-συμπαγές $\subset Y$.

Αλλά B_Y w-κλειστό $\overset{(4)}{\Rightarrow}$ B_Y w-συμπαγές.

$\boxtimes$

<u>Σχόλιο:</u> Η υπόθεση "X, Y Banach" στο Θ. Ανοικτής Απεικόνισης δεν μπορεί να παραλειφθεί!

<u>Παράδειγμα 1:</u> Θεωρούμε στον $\ell^1(\mathbb{N})$ τις νόρμες

$$\|\cdot\|_1, \quad \|\cdot\|_\infty$$

δηλ.

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|, \quad \|x\|_\infty = \sup_n |x(n)|.$$

Τότε, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1, \ \forall x \in \ell^1$

$\Rightarrow$ η $Id: (\ell^1, \|\cdot\|_1) \to (\ell^1, \|\cdot\|_\infty)$

είναι γραμμικός, φραγμένος, 1–1, επί <u>αλλά</u>

δεν είναι ισομορφισμός!

Πράγματι· έστω (e_n) η φυσική βάση.

$\forall n \geq 1$, θέτουμε $x_n = \frac{1}{n}(e_1 + e_2 + \cdots + e_n)$.

Τότε, $\|x_n\|_\infty = \|(\underbrace{1/n, 1/n, \ldots, 1/n}_{n}, 0, 0, \ldots)\|_\infty$

$$= 1/n \longrightarrow 0$$

Ενώ $\|x_n\|_1 = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n} = 1 \not\to 0.$

Σημ. ότι ο $(\ell^1, \|\cdot\|_\infty)$ <u>δεν είναι</u> <u>Banach</u>!

Πράγματι: $c_{00}(\mathbb{N}) \subset \ell^1(\mathbb{N}) \subset c_0(\mathbb{N})$

$$\Rightarrow \overline{c_{00}(\mathbb{N})}^{\|\cdot\|_\infty} \subset \overline{\ell^1}^{\|\cdot\|_\infty} \subset c_0$$

$$\Rightarrow c_0 = \overline{\ell^1}^{\|\cdot\|_\infty}, \quad c_0 \not\supseteq \ell^1.$$

<u>Παράδειγμα 2:</u> Έστω $(Y, \|\cdot\|)$ διαχωρίσιμος χώρος Banach. Θεωρούμε στον Y μια <u>αλγεβρική</u> βάση $\{y_i \mid i \in I\}$, I υπεραριθμήσιμο, με $\|y_i\| = 1$, $i \in I$.

Τότε, $\forall y \in Y$, $\exists!$ $S \subset I$ πεπερασμένο και $(a_i)_{i \in S} \subset \mathbb{R} \mid y = \sum_{i \in S} a_i y_i$.

Θέτουμε
$$\|y\|_0 = \sum_{i \in S} |a_i|.$$

Η $I_d : (Y, \|\cdot\|_0) \to (Y, \|\cdot\|)$

είναι γραμμικός, φραγμένος, 1–1, επί αλλά όχι ισομορφισμός.

Πράγματι $\forall i, j \in I$ με $i \neq j$,

$\|y_i - y_j\|_0 = 2$ ὡς <u>I υπεραριθμ.</u>

$\Rightarrow$ $(Y, \|\cdot\|_0)$ όχι διαχωρίσιμος (γιατί;)