ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΑ ΚΥΡΤΟΙ ΧΩΡΟΙ BANACH

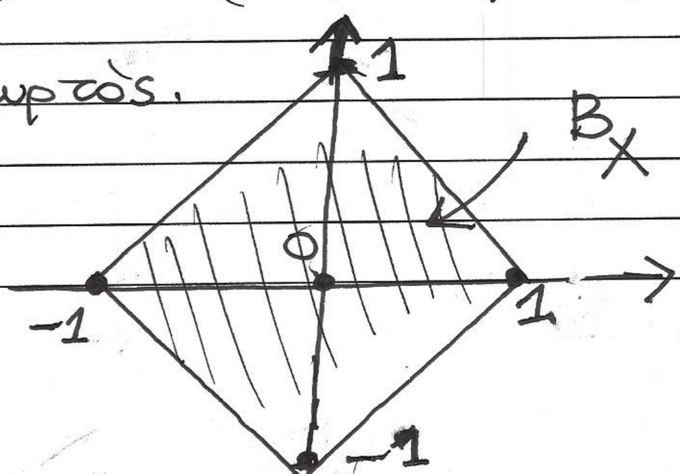
Ορισμός 1: Ένας χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται γνήσια κυρτός αν $\forall x,y \in B_X$ με $x \neq y$, ισχύει $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1$
$\left(\Leftrightarrow 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| > 0 \right)$.

Γεωμετρική ερμηνεία: Εάν $(X, \|\cdot\|)$ γνήσια κυρτός, τότε η μοναδιαία σφαίρα $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ δεν περιέχει ευθύγραμμα τμήματα.

Παραδείγματα:

(i) $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$.

Εάν $x = (1,0)$, $y = (0,1)$, τότε
$$\|x\|_1 = \|y\|_1 = \left\| \frac{x+y}{2} \right\|_1 = 1$$
$\Rightarrow$ ο $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ δεν είναι γνήσια κυρτός.



(ii) Έστω $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle, \|\cdot\|)$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Τότε ο $\mathcal{H}$ είναι γνήσια κυρτός. Πράγματι αν $x, y \in B_{\mathcal{H}}$ με

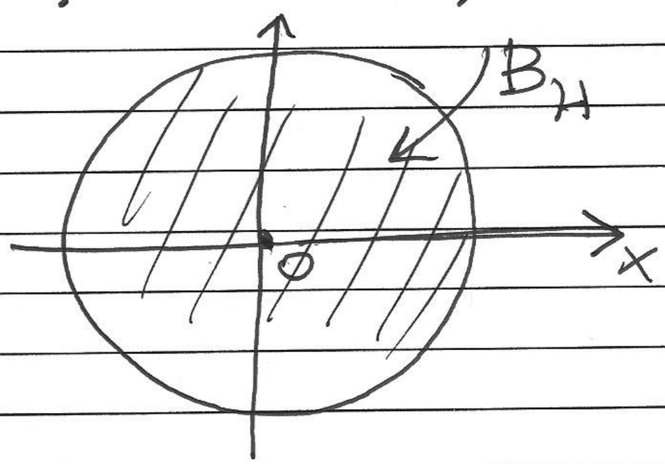
$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1,$$

τότε

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

$$\Longrightarrow \quad 4 + \|x-y\|^2 \leq 2(1+1) = 4$$

$$\Longrightarrow \quad x = y.$$



Π.χ. $\mathcal{H} = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$

<u>Ορισμός 2:</u> Ένας χώρος με νόρμα λέγεται <u>ομοιόμορφα κυρτός</u> αν $\forall \varepsilon \in (0, 2]$,

$$\exists \delta > 0 \mid \forall x, y \in B_X,$$

$$\|x-y\| \geq \varepsilon \Longrightarrow 1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| > \delta$$

<u>Σχόλιο 1:</u> Ομοιόμορφα κυρτός $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ γνήσια κυρτός.

Σχόλιο 2: Ο ορισμός 2 γράφεται ισοδύναμα:

$\forall \varepsilon \in (0,2]$, $\exists \delta > 0$ / $\forall x, y \in B_X$,

$$0 \leq 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq \delta \Longrightarrow \|x-y\| < \varepsilon$$

δηλ.

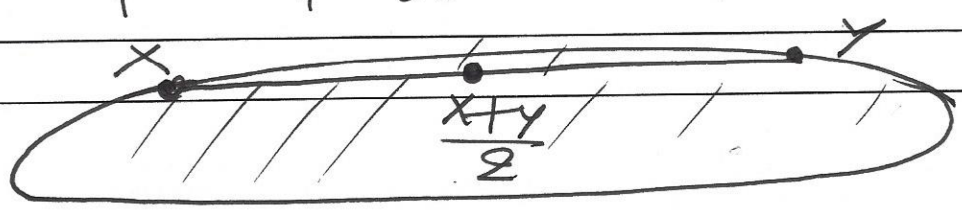
$$\left.\begin{aligned} &\|x-y\| \longrightarrow 0 \\ \text{καθώς}\quad &\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \longrightarrow 1. \end{aligned}\right\} \text{ ομοιόμορφα για } x, y \in B_X$$

Γεωμετρική ερμηνεία:

Εάν το μέσο ενός ευθ. τμ. με άκρα στην B_X είναι "πολύ κοντά" στην περιφέρεια S_X, τότε αναγκαστικά και τα άκρα είναι "πολύ κοντά" μεταξύ τους.

Αυτό συνεπάγεται ότι η B_X "προσομοιάζει" με την $(B_{\mathbb{R}^2}, \|\cdot\|_2)$ δηλ. είναι αρκετά "στρογγυλή".

Η παρακάτω δεν είναι μπάλα ενός ομοιόμορφα κυρτού χώρου:



<u>Πρόταση 3:</u> Κάθε χώρος με εσωτερικό γινόμενο είναι ομοιόμορφα κυρτός.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $\varepsilon \in (0,2]$. Θέτουμε

$$\delta = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2/4} > 0.$$

Εάν $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$, τότε

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2} \leq 1$$

οπότε εάν $\|x-y\| \geq \varepsilon$, έχουμε

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 \leq 1 - \varepsilon^2/4 = (1-\delta)^2$$

$$\Longrightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1-\delta$$

$$\Longrightarrow 1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \geq \delta. \qquad \boxtimes$$

<u>Σχόλιο 3:</u> Η ομοιόμορφη κυρτότητα είναι καθαρά γεωμετρική ιδιότητα και <u>δεν</u> διατηρείται μέσω ισομορφισμού.

<u>Π.χ.</u> $X = \ell^2$. $\forall x \in X$, ορίζουμε

$$\|x\| = \max\{2|x(1)|, \|x\|_2\}$$

Η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα ισοδύναμη με την $\|\cdot\|_2$ αλλά δεν είναι ομοιόμορφα κυρτή (δεν είναι και γνήσια κυρτή!) (Άσκηση!)

Πρόταση 4: Έστω X χώρος με νόρμα. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) X ομοιόμορφα κυρτός

(ii) $\forall (x_n), (y_n) \subset B_X$ με $\|x_n + y_n\| \to 2$, ισχύει $\|x_n - y_n\| \to 0$.

Απόδειξη (Άσκηση!)

Πρόταση 5: Έστω X ομοιόμορφα κυρτός.

Εάν $(x_n) \subset X$, $x \in X$ με

$x_n \xrightarrow{w} x$, $\|x_n\| \to \|x\|$,

τότε $\|x_n - x\| \to 0$.

Απόδειξη:

• Υποθέτουμε ότι $\|x_n\| = \|x\| = 1$, $n \geq 1$.

$H-B \Rightarrow \exists f \in X^*$:

$\|f\| = 1$, $f(x) = \|x\| = 1$.

Τότε, $\forall n \geq 1$,

$$2 \geq \|x_n + x\| \geq |f(x_n + x)| = |f(x_n) + 1|.$$

Αλλά $f(x_n) \xrightarrow{(n)} f(x) = 1$, οπότε

$$2 \geq \overline{\lim_n} \|x_n + x\| \geq \underline{\lim_n} \|x_n + x\| \geq 2$$

$$\Longrightarrow \quad \|x_n + x\| \xrightarrow{(n)} 2,$$

$\underset{\Longrightarrow}{[\text{Πρότ. } 4]}$ $\|x_n - x\| \to 0$.

- Γενικά, έστω $(x_n) \subset X$, $x \in X$ με $x_n \xrightarrow{w} x$, $\|x_n\| \to \|x\|$.

— Εάν $x = 0$, προφανώς $\|x_n - 0\| = \|x_n\| \to 0$.

— Έστω $x \neq 0$. Τότε $\|x_n\| > 0$, τελικώς, δηλ. $\exists n_0 \mid \forall n \geq n_0$, $\|x_n\| > 0$.

Θέτουμε $y_n = \dfrac{x_n}{\|x_n\|}$, $n \geq n_0$, $y = \dfrac{x}{\|x\|}$.

Τότε, $\forall f \in X^*$,

$$f(y_n) = \frac{1}{\|x_n\|} f(x_n) \to \frac{f(x)}{\|x\|} = f(y)$$

$$\Longrightarrow \quad y_n \xrightarrow{w} y, \text{ ενώ } \|y_n\| = \|y\| = 1, \ n \geq n_0$$

$$\Longrightarrow \|y_n - y\| \xrightarrow{n} 0 \Longrightarrow \|x_n - x\| \to 0$$

(γιατί;) $\boxtimes$

(Milman–Pettis)

Θεώρημα 6: Κάθε ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach είναι ανακλαστικός.

Απόδειξη: Έστω $e : X \to X^{**}$ η κανονική εμφύτευση, δηλ.

$$e(x)(f) = f(x), \quad \forall x \in X, \ \forall f \in X^*.$$

$\left.\begin{array}{l} e \text{ ισομετρία} \\ X \text{ Banach} \end{array}\right\} \Longrightarrow e(X)$ $\|\cdot\|$-κλειστός.

Αρκεί να δ.ο. $\overline{e(X)}^{\|\cdot\|} = X^{**}$.

Έστω $\Lambda \in X^{**}$, $\varepsilon > 0$, $\|\Lambda\| = 1$.

Επειδή X ομοιόμορφα κυρτός, $\exists\, \delta > 0$ |

$$\left.\begin{array}{l} \forall x, y \in B_X, \text{ εάν } \|x-y\| \geq \varepsilon, \text{ τότε} \\ \qquad 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| > \delta. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Είναι

$$1 = \|\Lambda\| = \sup\{ |\Lambda(f)| : f \in X^*, \|f\| = 1 \}$$

$\Longrightarrow \exists\, f \in X^*$ ώστε

$$\|f\| = 1, \quad |\Lambda(f)| > 1 - \delta/2 \quad (2)$$

Το σύνολο

$$V = \{ F \in X^{**} : |F(f) - \Lambda(f)| < \delta/2 \}$$

είναι w^*-ανοικτό & $\Lambda \in V$.

Αλλά $\overline{e(B_X)}^{w^*} = B_{X^{**}}$ (Θ. Goldstine!).

οπότε $V \cap e(B_X) \neq \emptyset$, δηλ.

$\exists\, x \in B_X$, ώστε $e(x) \in V$, δηλ.

$$|f(x) - \Lambda(f)| < \delta/2. \quad (3)$$

Ισχυρισμός: $\|\Lambda - e(x)\| \leq \varepsilon$.

Ας υποθέσουμε αντιθέτως ότι $\|\Lambda - e(x)\| > \varepsilon$.
Το

$$W = \{F \in X^{**} : \|F - e(x)\| > \varepsilon\}$$

είναι w^*-ανοικτό (!) κ' $\Lambda \in W$.

Οπότε το $V \cap W$ είναι w^*-ανοικτό $\ni \Lambda$

$\xRightarrow[\text{δηλ.}]{[\text{Θ. Goldstine!}]}$ $\exists\, y \in B_X \mid e(y) \in V \cap W$,

$$|f(y) - \Lambda(f)| < \delta/2, \quad \|x - y\| > \varepsilon. \quad (4)$$

Έχουμε

$$2|\Lambda(f)| = |\Lambda(f) - f(x) + f(x) + f(y) + \Lambda(f) - f(y)|$$

$$\leq |\Lambda(f) - f(x)| + |f(x+y)| + |\Lambda(f) - f(y)|$$

$$\overset{(3),(4)}{<} \delta + \|\cancel{x+y}\|.$$

(9)

Αλλά $\|x-y\| > \varepsilon \overset{(4)\ (1)}{\Longrightarrow}$

$$\|x+y\| < 2-2\delta$$

$$\Longrightarrow 2|\Lambda(f)| < \delta + 2 - 2\delta = 2-\delta$$

$$\Longrightarrow |\Lambda(f)| < 1-\frac{\delta}{2} \text{ (ΑΤΟΠΟ!) (βλ. (2)!)}$$

Άρα, $\|\Lambda - e(x)\| \leq \varepsilon$.

Δείξαμε λοιπόν ότι $\forall \Lambda \in X^{**}$ με $\|\Lambda\|=1$ κ' $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in X$ ώστε

$$\|\Lambda - e(x)\| \leq \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \overline{e(X)}^{\|\cdot\|} = X^{**} \Longrightarrow e(X) = X^{**}. \quad \boxtimes$$

(+) Άσκηση! Έστω $(Y, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα.

Να δ.ο. η $(Y^*, w^*) \ni f \longmapsto \|f\|$

είναι κάτω ημισυνεχής, δηλ.

$\forall c > 0$, το σύνολο

$$\{f \in Y^* : \|f\| > c\}$$

είναι w^*-ανοικτό.