ΜΕΤΡΙΚΟΠΟΙΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΣΤΙΣ ΑΣΘΕΝΕΙΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΕΣ — Θ. EBERLEIN

Ξεκινάμε με κάποια τοπολογικά προαπαιτούμενα.

Πρόταση 1: Έστω τ, τ' δύο τοπολογίες στο σύνολο $X \neq \emptyset$. ΤΠΕΙ:

(i) $\tau = \tau'$

(ii) Για κάθε δίκτυο $(x_\lambda) \subseteq X$ και $\forall x \in X$,

$$x_\lambda \xrightarrow{\tau} x \text{ ανν } x_\lambda \xrightarrow{\tau'} x.$$

Απόδειξη:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Προφανές.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Έστω $F \subset X$ τ-κλειστό κ' $(x_\lambda) \subset F$ δίκτυο με $x_\lambda \xrightarrow{\tau'} x$, $x \in X$. Τότε κ' $x_\lambda \xrightarrow{\tau} x \Rightarrow x \in F$. Άρα, F τ'-κλειστό $\Rightarrow \tau \subseteq \tau'$. Όμοια, $\tau' \subseteq \tau$ και άρα $\tau = \tau'$. $\boxtimes$

Πρόταση 2: Έστω τ, τ' δύο τοπολογίες στο σύνολο $X \neq \emptyset$ ώστε

(X, τ) T_2, (X, τ') συμπαγής.

Εάν $\tau \subseteq \tau'$, τότε $\tau = \tau'$.

Απόδειξη: Έστω $F \subset X$ τ'-κλειστό. Τότε, F τ'-συμπαγές $\xRightarrow{(\tau \subseteq \tau')}$ F τ-συμπαγές $\xRightarrow{[(X,\tau)\ T_2]}$ F τ-κλειστό. Άρα, $\tau' \subseteq \tau$ $\Rightarrow \tau' = \tau$. $\boxtimes$

<u>Πρόταση 3:</u> Έστω $(d_k)_{k\geq 1}$ ακολουθία ψευδομετρικών σε σύνολο $X \neq \emptyset$. Θέτουμε

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{d_k(x,y)}{1+d_k(x,y)}, \quad x,y \in X.$$

Τότε:

<u>(i)</u> d ψευδομετρική στο X.

<u>(ii)</u> Για κάθε δίκτυο $(x_\lambda) \subseteq X$ και $x \in X$, ισχύει η ισοδυναμία:

$$d(x_\lambda, x) \xrightarrow{\lambda} 0 \text{ ανν } d_k(x_\lambda, x) \xrightarrow{\lambda} 0, \ \forall k \geq 1.$$

<u>Απόδειξη:</u> Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi : [0,+\infty) \to [0,1)$ με $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$, $t \geq 0$.

Διαπιστώνεται εύκολα ότι $\varphi \uparrow$, ομοιομορφισμός επί. Επιπλέον, $\forall\, t,s \geq 0$,

$$\underline{\varphi(t+s) \leq \varphi(t) + \varphi(s).} \quad (1)$$

[Πράγματι $\forall\, t,s \geq 0$,

$$\varphi(t+s) = \frac{t+s}{1+t+s} = \frac{t}{1+t+s} + \frac{s}{1+t+s}$$

$$\leq \frac{t}{1+t} + \frac{s}{1+s} = \varphi(t) + \varphi(s).]$$

<u>(i)</u> Αρκεί να επαληθεύσουμε την τριγωνική ανισότητα.

$\forall\, x,y,z \in X$,

$$d(x,z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi[d_k(x,z)]}{2^k} \overset{[\varphi\uparrow]}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi[d_k(x,y) + d_k(y,z)]}{2^k}$$

$$\overset{(1)}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi[d_k(x,y)]}{2^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi[d_k(y,z)]}{2^k}$$

$$= d(x,y) + d(y,z).$$

(3)

(ii) Έστω $(x_\lambda) \subseteq X$ δίκτυο και $x \in X$.
Υποθέτουμε ότι $d(x_\lambda, x) \xrightarrow{\lambda} 0$.
$\forall\, k \geq 1$, $\forall\, \lambda$,
$$\varphi[d_k(x_\lambda, x)]/2^k \leq d(x_\lambda, x)$$
$$\Rightarrow \quad \varphi[d_k(x_\lambda, x)] \xrightarrow{\lambda} 0 = \varphi(0)$$
$$\underset{[\varphi \text{ ομοιομ.}]}{\Rightarrow} \quad d_k(x_\lambda, x) \xrightarrow{\lambda} 0, \ \forall\, k \geq 1.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι
$$d_k(x_\lambda, x) \xrightarrow{\lambda} 0, \quad \forall\, k \geq 1.$$
Τότε,
$$\varphi[d_k(x_\lambda, x)] \xrightarrow{\lambda} \varphi(0) = 0, \ \forall\, k \geq 1.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $N \geq 1$ ώστε
$$\sum_{k > N} \frac{1}{2^k} < \varepsilon/2. \quad (2)$$
Επειδή
$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\varphi[d_k(x_\lambda, x)]}{2^k} \xrightarrow{\lambda} 0,$$
$\exists\, \lambda_0 /\ \forall\, \lambda \geq \lambda_0$,
$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\varphi[d_k(x_\lambda, x)]}{2^k} < \varepsilon/2. \quad (3)$$
Τότε, $\forall\, \lambda \geq \lambda_0$,
$$d(x_\lambda, x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\varphi[d_k(x_\lambda, x)]}{2^k} + \sum_{k>N} \frac{\varphi[d_k(x_\lambda, x)]}{2^k}$$
$$\overset{(2),(3)}{<} \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$
(συμφ. ότι $0 \leq \varphi < 1$).

Άρα, $d(x_\lambda, x) \xrightarrow{\lambda} 0$. $\boxtimes$

Σε ό,τι ακολουθεί, ο X είναι γραμμικός χώρος. (4)

<u>Πρόταση 4</u>: Έστω $\Phi \subseteq X^{\#}$ αριθμήσιμη που χωρίζει σημεία στον X. Τότε, τ_Φ μετρικοποιήσιμη.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\Phi = \{ f_k : k \geq 1 \}$

$\forall\, k \geq 1$, $x, y \in X$, θέτουμε $d_k(x,y) = |f_k(x) - f_k(y)|$.
Είναι σαφές ότι οι d_k, $k \geq 1$ είναι ψευδομετρικές στον X.
Θέτουμε

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{d_k(x,y)}{1 + d_k(x,y)}, \quad x, y \in X.$$

Εάν $d(x,y) = 0$, έχουμε
$d_k(x,y) = 0$ ή $f_k(x) = f_k(y)$, $\forall\, k \geq 1$
$\Rightarrow$ $x = y$.

Επομένως, d <u>μετρική</u> στον X
(βλ. Πρόταση 3(i)).

Έστω $(x_\lambda) \subseteq X$ δίκτυο, $x \in X$. Τότε,

$$x_\lambda \xrightarrow{[\tau_d]} x \iff d_k(x_\lambda, x) \xrightarrow{\lambda} 0, \ \forall\, k \geq 1$$

(βλ. Πρόταση 3 (ii))

$$\iff f_k(x_\lambda) \to f_k(x), \ \forall\, k \geq 1$$

$$\iff x_\lambda \xrightarrow{[\tau_\Phi]} x.$$

Σύμφ. με την Πρόταση 1, $\tau_d = \tau_\Phi$
οπότε τ_Φ μετρικοποιήσιμη. $\boxtimes$

Στο ό,τι ακολουθεί, ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα.

<u>Πρόταση 5:</u> Έστω $D \subseteq X^*$ $\|\cdot\|$-πυκνό κ' $A \subseteq X$ φραγμένο. Τότε, $\tau_w|A = \tau_D|A$.

<u>Απόδειξη:</u> Το D χωρίζει σημεία στον X. Πράγματι· υποθέτουμε αναδρόμως ότι $\exists\, x \in X \setminus \{0\}$ με

$$g(x) = 0, \quad \forall g \in D.$$

Έστω $f \in X^*$, $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $g \in D$ |

$$\|f - g\| < \varepsilon / \|x\|.$$

Τότε,

$$|f(x)| = |f(x) - g(x)| \leq \|f - g\| \cdot \|x\| < \varepsilon,$$

$\forall \varepsilon > 0$

$$\Rightarrow f(x) = 0, \ \forall f \in X^* \Rightarrow x = 0, \text{ Άτοπο.}$$

Προφανώς, $\tau_D \subseteq \tau_w \Rightarrow \tau_D|A \subseteq \tau_w|A$.

Έστω $(x_\lambda) \subseteq A$ δίκτυο με $x_\lambda \xrightarrow{(\tau_D)} x \in A$.
Έστω $f \in X^*$, $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $g \in D$ |

$$\|f - g\| < \varepsilon / 3M$$

όπου $M = \sup\{\|x\| : x \in A\} < \infty$.
Επιλέγουμε λ_0 | $\forall \lambda \geq \lambda_0$,

$$|g(x_\lambda) - g(x)| < \varepsilon/3.$$

Τότε, $\forall \lambda \geq \lambda_0$,

$$|f(x_\lambda) - f(x)| \leq |(f-g)(x_\lambda)| + |g(x_\lambda) - g(x)| + |g(x) - f(x)|$$

$$\leq \|f - g\| \cdot \|x_\lambda\| + \varepsilon/3 + \|f - g\| \cdot \|x\|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3M} M + \varepsilon/3 + \frac{\varepsilon M}{3M} = \varepsilon.$$

Επομένως, $f(x_\lambda) \to f(x), \forall f \in X^*$

$\Rightarrow \quad x_\lambda \xrightarrow{w} x.$

Άρα, $\tau_w|_A \subseteq \tau_D|_A \Rightarrow \tau_w|_A = \tau_D|_A.$ ☒

<u>Πόρισμα 6:</u> Εάν X^* διαχωρίσιμος κ' $A \subseteq X$ φραγμένο, τότε (A, w) μετρικοποιήσιμος.

[Ειδικότερα, (B_X, w) μετρικοποιήσιμος.]

<u>Απόδειξη:</u>
Έστω $D \subseteq X^*$ αριθμήσιμο $\|\cdot\|$-πυκνό. Τότε,

$$\tau_w|_A = \tau_D|_A \text{ (βλ. Πρότ. 5)},$$

ενώ

τ_D μετρικοποιήσιμη (βλ. Πρότ. 4). ☒

<u>Πρόταση 7:</u> Έστω $D \subseteq X$ $\|\cdot\|$-πυκνό κ' $A \subseteq X^*$ $\|\cdot\|$-φραγμένο. Τότε,

$$\tau_{w^*}|_A = \tau_{e(D)}|_A,$$

όπου $e: X \to X^{**}$ η κανονική ισομετρία.

<u>Απόδειξη:</u>
Το $e(D)$ χωρίζει σημεία στον X^*.
[Πράγματι· έστω $f \in X^* \mid \forall x \in D, e(x)(f) = 0.$

Τότε, $f|_D = 0 \overset{(D \text{ πυκνό})}{\Longrightarrow} f = 0.$]

Επειδή $e(D) \subseteq e(X)$, προφανώς

$$\tau_{e(D)} \subseteq \tau_{w^*}$$

$$\Rightarrow \quad \tau_{e(D)}|_A \subseteq \tau_{w^*}|_A.$$

Έστω $(f_\lambda) \subseteq A$ δίκτυο με $f_\lambda \xrightarrow{(\tau_{e(D)})} f \in A$.
Έστω $x \in X$, $\varepsilon > 0$.
Επιλέγουμε $z \in D \mid \|x - z\| < \varepsilon/3M$, όπου
$$M = \sup\{\|g\| : g \in A\}$$
κ' $\lambda_0 \mid \forall \lambda \geq \lambda_0$,
$$|f_\lambda(z) - f(z)| < \varepsilon/3.$$
Τότε, $\forall \lambda \geq \lambda_0$,
$$|f_\lambda(x) - f(x)| \leq |f_\lambda(x-z)| + |f_\lambda(z) - f(z)| + |f(z) - f(x)|$$
$$\leq \|f_\lambda\| \cdot \|x - z\| + \varepsilon/3 + \|f\| \cdot \|x - z\|$$
$$\leq M\frac{\varepsilon}{3M} + \varepsilon/3 + M\frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon$$
$$\Rightarrow f_\lambda(x) \to f(x),\ \forall x \in X \Rightarrow f_\lambda \xrightarrow{w^*} f.$$
Άρα, $\tau_{w^*}|_A \subseteq \tau_{e(D)}|_A \Rightarrow \tau_{w^*}|_A = \tau_{e(D)}|_A$. $\boxtimes$

<u>Πόρισμα 8</u>: Εάν X διαχωρίσιμος κ' $A \subseteq X^*$ φραγμένο, τότε (A, w^*) μετρικοποιήσιμος.
[Ειδικότερα, (B_{X^*}, w^*) μετρικοποιήσιμος]

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $D \subseteq X$ αριθμήσιμο $\|\cdot\|$-πυκνό. Τότε,
$$\tau_{w^*}|_A = \tau_{e(D)}|_A \text{ (βλ. Πρότ. 7)}$$
ενώ
$$\tau_{e(D)} \text{ μετρικοποιήσιμη}$$
(βλ. Πρότ. 4). $\boxtimes$

Σαρώθηκε με το CamScanner

Πρόταση 9: Έστω $A \subseteq X$ w-συμπαγές και $\Phi \subseteq X^*$ που χωρίζει σημεία. Τότε,

$$\tau_w|_A = \tau_\Phi|_A.$$

Απόδειξη: Άμεσο από την Πρόταση 2, αφού $\tau_\Phi|_A \subseteq \tau_w|_A$. $\boxtimes$

Πρόταση 10: Εάν X διαχωρίσιμος κ' $A \subseteq X$ w-συμπαγές, τότε (A, w) μετρικοποιήσιμος.

Απόδειξη: Έστω $D = \{x_n : n \geq 1\}$ $\|\cdot\|$-πυκνό στον X. Από Θ. H-B,

$\forall n \geq 1$, $\exists f_n \in X^* \mid \|f_n\| = 1$, $f_n(x_n) = \|x_n\|$.

Ισχυρισμός: Η $\Phi = \{f_n : n \geq 1\} \subseteq X^*$ χωρίζει σημεία στον X.

[Πράγματι: έστω $x \in X$ ώστε $f_n(x) = 0$, $\forall n \geq 1$.

Έστω $\varepsilon > 0$. $\exists N \geq 1 \mid \|x - x_N\| < \varepsilon/2$. Τότε,

$$\|x\| \leq \|x - x_N\| + \|x_N\| = \|x - x_N\| + f_N(x_N) =$$
$$= \|x - x_N\| + f_N(x_N - x)$$
$$\leq 2\|x - x_N\| < \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow x = 0.]$$

Λόγω των Προτάσεων 9 & 4,

$$\tau_w|_A = \tau_\Phi|_A, \ \tau_\Phi \text{ μετρικοποιήσιμη.}$$

$\boxtimes$

Θεώρημα 11 (Eberlein)
Κάθε w-συμπαγές $\subseteq X$, είναι ακολουθιακά w-συμπαγές.

Απόδειξη: Έστω $(x_n) \subseteq A$. Θέτουμε

$$Y = \overline{\langle x_n : n \geq 1 \rangle}^{\|\cdot\|}.$$

Τότε,
$(Y, \|\cdot\|)$ διαχωρίσιμος κλειστός γραμμ. υπόχωρος του $X \Rightarrow Y$ w-κλειστός

$\Rightarrow$ $Y \cap A$ w-συμπαγές στον Y

[Πρότ.10]
$\Longrightarrow$ $(Y \cap A, w)$ μετρικοποιήσιμος

$\Longrightarrow$ η (x_n) έχει w-συγκλίνουσα υπακολουθία. $\boxtimes$

Θ.12: Εάν $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα κ' ο (X, w) είναι μετρικοπ., τότε $\dim X < \infty$.
[Απόδ: Βλ. αρχείο "w-ΤΟΠΟΛΟΓΙΕΣ ΣΕ ΧΩΡΟ ΜΕ ΝΟΡΜΑ", σελ. 18, Θ.10.]