# Θ. Tychonoff (μια παραλλαγή).

- Οικογένειες με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής (F.I.P.).

Έστω $E$ μη κενό σύνολο.

Ορισμός I.1: Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(E)$, $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Η $\mathcal{A}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής (F.I.P.) ανν οποιαδήποτε τομή πεπερασμένου πλήθους μελών της $\mathcal{A}$ είναι μη κενή.

Πρόταση I.1: Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(E)$ με την F.I.P. Θεωρούμε την κλάση

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A}} = \{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(E) \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \text{ κ' η } \mathcal{B} \text{ έχει την F.I.P.}\}.$$

Τότε, το $(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}, \subseteq)$ έχει maximal στοιχείο.

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{C}$ αλυσίδα στο $(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}, \subseteq)$. Θέτουμε

$$C = \bigcup\{\mathcal{B} \mid \mathcal{B} \in \mathcal{C}\}.$$

Τότε, $C \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$. Πράγματι· έστω $A_i \in C$, $1 \leq i \leq n$ $(n \geq 1)$. Τότε, $\exists\, \mathcal{B}_i \in \mathcal{C}$, $1 \leq i \leq n$ ώστε

$$A_i \in \mathcal{B}_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Επειδή $(\mathcal{C}, \subseteq)$ αλυσίδα, $\exists\, i_0 \in \{1, 2, \dots, n\} \mid$

$$\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}_{i_0}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Τότε, $A_i \in \mathcal{B}_{i_0}$, $1 \leq i \leq n \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$.

Συνεπώς, $C$ άνω φράγμα της $\mathcal{C}$. Το συμπέρασμα έπεται από το Λήμμα του Zorn. $\boxtimes$

<u>Πρόταση Ι.2.:</u> Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(E)$ με την F.I.P. κ' $\mathcal{D}$ maximal στοιχείο του $(M_{\mathcal{A}}, \subseteq)$ (βλ. Πρότ. Ι.1). Τότε:

<u>(i)</u> οποιαδήποτε τομή πεπερ. πλήθους μελών της $\mathcal{D}$ ανήκει στην $\mathcal{D}$.

<u>(ii)</u> Εάν $A \subseteq E$ με $A \cap D \neq \emptyset$, $\forall D \in \mathcal{D}$, τότε $A \in \mathcal{D}$.

<u>Απόδειξη:</u> <u>(i)</u> Έστω $A_i \in \mathcal{D}$, $1 \le i \le n$ κ' $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

Τότε, η $\mathcal{D} \cup \{A\}$ έχει την F.I.P. Πράγματι· εάν $D_1, D_2, \dots, D_m \in \mathcal{D}$, αφού η $\mathcal{D}$ έχει την F.I.P., έχουμε

$$A \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m} D_i\right) = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m \cap D_1 \cap \dots \cap D_m \neq \emptyset.$$

Επειδή $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D} \cup \{A\}$, έπεται ότι $A \in \mathcal{D}$.

<u>(ii)</u> Η $\mathcal{D} \cup \{A\}$ έχει την F.I.P. Πράγματι· εάν $A_i \in \mathcal{D}$, $1 \le i \le n$, τότε
$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{D}$ (βλ. (i)) $\Rightarrow A \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \neq \emptyset$. $\boxtimes$

<u>Πρόταση Ι.3.:</u> Έστω $E$ τοπολογικός χώρος. Τ.Π.Ε.Ι.

<u>(i)</u> $E$ συμπαγής

<u>(ii)</u> Εάν $\mathcal{F}$ οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του $E$ με την F.I.P., τότε $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$.

(Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς της συμπάγειας κ' της F.I.P.)

## II. Τοπολογία Γινόμενο.

Έστω $S \neq \emptyset$ κ' $K$ τοπολογικός χώρος. Θέτουμε

$$E = K^S = \{f : S \to K \mid f \text{ συνάρτηση}\}.$$

$\forall s \in S$, θέτουμε $\delta_s : E \to K$ με $\delta_s(f) = f(s)$, $\forall f \in E$.

Θεωρούμε την τοπολογία $\tau$ που έχει υποβάση τα σύνολα

$$\delta_s^{-1}(G), \quad s \in S, \quad G \subseteq K \text{ ανοικτό}.$$

Τότε, $\forall f \in E$, $\forall\ U \in \tau$ με $f \in U$, $\exists\ G_i \subseteq K$ ανοικτά, $s_i \in S$, $1 \leq i \leq n$ $(n \geq 1)$ ώστε

$$f \in \bigcap_{i=1}^{n} \delta_{s_i}^{-1}(G_i) \subseteq U.$$

Η παρακάτω πρόταση προκύπτει εύκολα από τους ορισμούς.

<u>Πρόταση II.1:</u> <u>(i)</u> Ο $(E, \tau)$ είναι $T_2$.

<u>(ii)</u> Εάν $(f_\lambda) \subseteq E$ δίκτυο, $f \in E$, τότε

$$f_\lambda \xrightarrow{\tau} f \text{ ανν } \forall s \in S,\ f_\lambda(s) \to f(s).$$

<u>(iii)</u> Η $\tau$ είναι η μικρότερη τοπολογία στο $E$ ως προς την οποία όλες οι συναρτήσεις $\delta_s$, $s \in S$ είναι συνεχείς.

<u>Ορισμός II.1:</u> Η $\tau$ λέγεται <u>τοπολογία γινόμενο</u> στο $E = K^S$.

# III. Θεώρημα Tychonoff.

Θεώρημα III.1: Έστω $K$ τοπολογικός χώρος, $S \neq \emptyset$ κ' $\mathcal{T}$ η τοπολογία γινόμενο στον $E = K^S$. Εάν $K$ συμπαγής, τότε κ' ο $(E, \mathcal{T})$ είναι συμπαγής.

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(E)$ μια οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του $E$ με την F.I.P. Θα δ-ο.

$$\bigcap_{F \in \mathcal{A}} F \neq \emptyset. \qquad (1)$$

Σύμφωνα με τις Προτ. I.1, I.2, $\exists\, \mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(E)$ με την F.I.P. ώστε $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ κ' η $\mathcal{A}$ ικανοποιεί την παρακάτω:
"Εάν $A \subseteq E$ με $A \cap D \neq \emptyset$, $\forall D \in \mathcal{D}$, τότε $A \in \mathcal{D}$."
Για να δείξουμε την (1), αρκεί να δ-ο.

$$\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{D} \neq \emptyset. \qquad (2)$$

$\forall s \in S$, η $\{ \overline{\delta_s(D)} : D \in \mathcal{D} \}$ είναι μια οικογένεια κλειστών $\subseteq K$ με την F.I.P. κ' αφού $K$ συμπαγής:

$$\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{\delta_s(D)} \neq \emptyset.$$

$\forall s \in S$, επιλέγω $k_s \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{\delta_s(D)}$. (3)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : S \to K$ με $f(s) = k_s$, $s \in S$.

Ισχυρισμός 1: Εάν $s \in S$ κ' $G \subseteq K$ ανοικτό με $f(s) \in G$, τότε $\delta_s^{-1}(G) \in \mathcal{D}$.

Πράγματι $\forall D \in \mathcal{D}$, $f(s) = k_s \in \overline{\delta_s(D)}$ (βλ. (3))
$\Longrightarrow G \cap \delta_s(D) \neq \emptyset \Rightarrow \delta_s^{-1}(G) \cap D \neq \emptyset$.

Έπεται ότι $\overset{-1}{\delta_s}(G) \in \mathcal{D}$.

<u>Ισχυρισμός 2:</u> $p \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{D}$ (κι' άρα ισχύει η (2)).

Πράγματι έστω $D \in \mathcal{D}$ κι' $U \subseteq (E, \tau)$ ανοικτό με $p \in U$. Επιλέγουμε $G_i \subseteq K$ ανοικτό, $s_i \in S'$, $1 \le i \le n$, ώστε

$$p \in \bigcap_{i=1}^{n} \overset{-1}{\delta_{s_i}}(G_i) \subseteq U$$

Τότε, $\forall i$, $p(s_i) \in G_i \xRightarrow{(\text{Ισχυρ. } 1)} \overset{-1}{\delta_{s_i}}(G_i) \in \mathcal{D}$

$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} \overset{-1}{\delta_{s_i}}(G_i) \cap D \neq \emptyset$ (διότι η $\mathcal{D}$ έχει την F.I.P

$\Rightarrow U \cap D \neq \emptyset$. $\boxtimes$