<u>ΑΣΘΕΝΕΙΣ* (w^*) ΤΟΠΟΛΟΓΙΕΣ</u>

Έστω $(X,\|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Θεωρούμε την <u>κανονική ισομετρική εμφύτευση</u>

$$e: X \to X^{**}$$

με

$$e(x)(f)=f(x),\ \forall x\in X,\ \forall f\in X^*.$$

Τότε,

$$\|e(x)\|=\|x\|,\ \forall x\in X.$$

Προφανώς το $e(X)\subseteq X^{**}$ <u>χωρίζει σημεία</u> στον X^*.

<u>Ορισμός 1:</u> Η ασθενής τοπολογία $\mathcal{T}_\Phi$ με $\Phi=e(X)$ που επάγεται στον X^* λέγεται <u>ασθενής* τοπολογία στον</u> X^*.

<u>Συμβολισμός:</u> $\mathcal{T}_{w^*}$ ή $\sigma(X^*,X)$ ή απλά w^*.

<u>Ιδιότητες της w^*-τοπολογίας</u>

- Μια βάση περιοχών του $0\in X^*$ είναι η κλάση των πεπερασμένων τομών συνόλων της μορφής

$$[e(x)]^{-1}((-\varepsilon,\varepsilon)),\ x\in X,\ \varepsilon>0$$

δηλ. της μορφής

$$\boxed{V_x^*(\varepsilon)=\{f\in X^* \mid |f(x)|<\varepsilon\},\ x\in X,\ \varepsilon>0.}$$

- Ο (X^*, w^*) είναι τοπικά κυρτός τοπολογικός γραμμικός χώρος.

- Εάν $F:(X^*, w^*)\to \mathbb{R}$ γραμμική, συνεχής, τότε

$$F\in\langle e(X)\rangle = e(X),$$

δηλ. $\exists\, x\in X \mid F(f)=f(x),\ \forall f\in X^*.$

- Εάν $\overbrace{(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}}^{\text{δίκτυο}}\subset X^*$, $f\in X^*$, τότε

$$f_\lambda \xrightarrow{w^*} f \text{ ανν } \forall x\in X,\ f_\lambda(x)\to f(x)$$

(δηλ. $f_\lambda\to f$ κατά σημείο).

- $\tau_{w^*}\subset \tau_{\|\cdot\|}$, όπου $\|\cdot\|$ η δυϊκή νόρμα στον X^*, δηλ.

$$\|f\|=\sup\{|f(x)| : x\in X,\ \|x\|\leq 1\}.$$

Η ισότητα ισχύει αν $\dim X^*<\infty$ ανν $\dim X<\infty$.

<u>Πρόταση 1</u>: Έστω X χώρος <u>Banach</u> κ' $K \subset X^*$ w^*-συμπαγές. Τότε, K $\|\cdot\|$-φραγμένο.

<u>Απόδειξη</u>:

$\forall x \in X$, η $e(x) : (X^*, w^*) \to \mathbb{R}$ είναι <u>συνεχής</u> (εξ ορισμού της w^*-τοπολογίας)

$$\Longrightarrow \quad e(x)(K) \text{ συμπαγές } \subset \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \quad \sup_{f \in K} |e(x)(f)| < \infty$$

$$\Longrightarrow \quad \sup_{f \in K} |f(x)| < \infty.$$

Δηλ. η οικογένεια $K \subset X^*$ είναι <u>κατά σημείο φραγμένη</u>.

Από την Αρχή Ομοιόμορφου φράγματος (σημ. ότι X <u>Banach</u>), έχουμε

$$\sup_{f \in K} \|f\| < \infty. \qquad \boxtimes$$

<u>Πόρισμα 2:</u> Εάν X <u>Banach</u> και $(f_n) \subset X^*$, $f \in X^*$ με $f_n \xrightarrow{w^*} f$, τότε

$$\sup_n \|f_n\| < \infty.$$

<u>Σχόλιο:</u> Η υπόθεση ότι ο "<u>X είναι Banach</u>" στην Πρότ. 1 κ' στο Πόρισμα 2, δεν μπορεί να παραλειφθεί.

<u>Άσκηση:</u> Θέτουμε

$$X = c_{00}(\mathbb{N}) = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid x(n) = 0, \text{ τελικά}\}$$

κ' $f_n : X \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = n\,x(n)$, $x \in X$, $n \geq 1$.

Να δ.ο. $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ κ' $\sup_n \|f_n\| = \infty$.

(Θεωρούμε στον X τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$.)

Σχετικά με Θ. τύπου Mazur για την w^*-τοπολογία

Είναι γνωστό ότι αν A κυρτό $\subset X$, όπου X χώρος με νόρμα, τότε

$$\overline{A}^{w} = \overline{A}^{\|\cdot\|} \quad (\Theta.\ \text{Mazur!})$$

<u>Δεν ισχύει κάτι ανάλογο για την w^* – τοπολογία!</u>

<u>Παράδειγμα:</u> Θεωρούμε το χώρο

$$(c_0, \|\cdot\|_\infty)$$

κ' θέτουμε

$$e_n^*: c_0 \to \mathbb{R}, \quad e_n^*(x) = x(n),\ x \in c_0,\ n \geq 1.$$

Τότε, $\|e_n^*\| = 1$, $n \geq 1$ κ' $e_n^* \xrightarrow{w^*} 0$

(αφού $\forall x \in c_0$, $e_n^*(x) = x(n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$).

Θέτουμε $A = co(e_n^* \mid n \geq 1)$.

Τότε, A κυρτό $\subset X^*$ κ' $0 \in \overline{A}^{w^*}$.

Επιπλέον, $A \subset S_{X^*} = \{f \in X^* \mid \|f\| = 1\}$.

Πράγματι· έστω $f \in A \Rightarrow \exists\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in [0,1]$ $(k \geq 1)$ ώστε

$$f = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_j^*, \quad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1.$$

Τότε, $$\|f\| \leq \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \|e_j^*\| = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1.$$

Θέτουμε $$x = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k \text{ όροι}}, 0, 0, 0, \ldots)$$

$\Rightarrow$ $x \in c_0$, $\|x\|_\infty = 1$ και
$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_j^*(x) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$$

$$\Rightarrow \|f\| \geq 1 \Rightarrow \|f\| = 1.$$

Άρα, $$\overline{A}^{\|\cdot\|} \subset \overline{S_{X^*}}^{\|\cdot\|} = S_{X^*}$$

$$\Rightarrow 0 \notin \overline{A}^{\|\cdot\|}.$$

<u>Σχόλιο:</u> Εάν οι w και w^* τοπολογίες στον X^* ταυτίζονται ($\Leftrightarrow e(X) = X^{**}$) τότε προφανώς ισχύει το Θ. Mazur στον $(X^*, w^*) = (X^*, w)$.

Μετρικοποιησιμότητα στην w^* – τοπολογία

<u>Θεώρημα 3</u>: Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε, (X^*, w^*) μετρικοποιήσιμος αννο X έχει (το πολύ) αριθμήσιμη βάση Hamel.

<u>Πρόταση 4</u>: Εάν $A \subset X^*$ $\|\cdot\|$-φραγμένο κ' $D \subset X$ $\|\cdot\|$–πυκνό, τότε

$$\tau_{w^*}|_A = \tau_{e(D)}|_A,$$

όπου $e: X \to X^{**}$ η κανονική ισομετρική εμφύτευση κ' $\tau_{e(D)}$ η ασθενής τοπολογία που επάγει η $e(D)$ στον X^*.

<u>Απόδειξη ως άσκηση!</u>

(Παρόμοια με την απόδ. της Πρότ. 12 του προηγούμενου μαθήματος).

<u>Πόρισμα 5:</u> Εάν X διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα και $A \subset X^*$ $\|\cdot\|$-φραγμένο, τότε ο

$$(A, \tau_{w^*}|A)$$

είναι μετρικοποιήσιμος.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω D αριθμήσιμο $\|\cdot\|$-πυκνό στον X $\overset{\text{Πρότ. 4}}{\Longrightarrow}$

$$\tau_{w^*}|A = \tau_{e(D)}|A.$$

Αλλά $e(D)$ αριθμήσιμο $\subset X^{**} \subset$

$\subset (X^*)^{\#}$ που <u>χωρίζει σημεία</u> στον X^* (αφού D $\|\cdot\|$-πυκνό $\subset X$).

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 13 του προηγούμενου μαθήματος για "X" $= X^*$, παίρνουμε ότι ο

$(X^*, \tau_{e(D)})$ είναι μετρικοποιήσιμος

$\Rightarrow$ $(A, \tau_{e(D)}|A)$ μετρικοποιήσ.

$\Rightarrow$ $(A, \tau_{w^*}|A)$ μετρικοποιήσ.

$\boxtimes$

<u>Λήμμα 6:</u> Έστω X χώρος με νόρμα κ' $e: X \to X^{**}$ η κανονική ισομετρική εμφύτευση. Τότε,

$$\overline{e(B_X)}^{w^*} \subseteq B_{X^{**}},$$

όπου $B_X = \{x \mid \|x\| \leq 1\}$, $B_{X^{**}} = \{F \in X^{**} \mid \|F\| \leq 1\}$.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω αντίθετα ότι $\exists\, F \in \overline{e(B_X)}^{w^*}$ με $\|F\| > 1$.

Τότε, $\exists\, f \in B_{X^*} \mid \ |F(f)| > 1$.

Το σύνολο $U_f = \{\Lambda \in X^{**} : |\Lambda(f)| > 1\}$ είναι w^*-ανοικτή περιοχή του F (γιατί;)

$\Rightarrow U_f \cap e(B_X) \neq \varnothing \Rightarrow \exists\, x \in B_X \mid e(x) \in U_f$

$\Rightarrow |e(x)(f)| > 1 \Rightarrow |f(x)| > 1$.

Αλλά, $x \in B_X$, $f \in B_{X^*} \Rightarrow |f(x)| \leq 1$

(Άτοπο!)

$\boxtimes$

<u>Θεώρημα 7 (Θ. πυκνότητας Goldstine)</u>

Έστω X χώρος με νόρμα κ' $e: X \to X^{**}$ η κανονική εμφύτευση. Τότε,

$$\overline{e(B_X)}^{w^*} = B_{X^{**}}.$$

Επιπλέον, $\overline{e(X)}^{w^*} = X^{**}$.

<u>Απόδειξη</u>: Λήμμα 6 $\Rightarrow \overline{e(B_X)}^{w^*} \subseteq B_{X^{**}}$.

Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει η ισότητα, δηλ.

$$\exists\ F \in B_{X^{**}} \text{ με } F \notin \overline{e(B_X)}^{w^*}.$$

Εφαρμόζοντας το Γενικ. Hahn-Banach ($2^{\underline{η}}$ μορφή), επιλέγουμε

$$L : (X^{**}, w^*) \to \mathbb{R}$$

γραμμική, συνεχή κ' $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\boxed{\sup_{\psi \in \overline{e(B_X)}^{w^*}} L(\psi) < \mu < L(F)} \quad (1)$$

Τότε όμως, $L \in \tilde{e}(X^*)$, όπου $\tilde{e}$ η κανονική εμφύτευση του X^* στον X^{***}, δηλ.

$$\forall f \in X^*, \forall \psi \in X^{**}, \quad \tilde{e}(f)(\psi) = \psi(f).$$

Έστω $f \in X^*$ με $L = \tilde{e}(f)$.

Λόγω της (1) παίρνουμε

$\forall x \in B_X$,

$$\mathcal{L}(e(x)) < \mu < \mathcal{L}(F)$$

ή

$$\tilde{e}(f)(e(x)) < \mu < \tilde{e}(f)(F)$$

ή

$$e(x)(f) < \mu < F(f)$$

ή

$$f(x) < \mu < F(f).$$

Εφαρμόζοντας την τελευταία για "x" $= -x$, παίρνουμε

$$\sup_{x \in B_X} |f(x)| \leq \mu < F(f)$$

ή

$$\|f\| \leq \mu < \|F\| \cdot \|f\| \leq \|f\|$$

(Άτοπο!).

Άρα, $\overline{e(B_X)}^{w^*} = B_{X^{**}}$.

Έστω $\psi \in X^{**} \setminus \{0\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|\psi\|} \psi \in B_{X^{**}} = \overline{e(B_X)}^{w^*}$$

$$\Rightarrow \psi \in \|\psi\| \overline{e(B_X)}^{w^*} = \overline{e(\|\psi\| B_X)}^{w^*}$$

$$\subseteq \overline{e(X)}^{w^*}.$$

$\boxtimes$

<u>Θεώρημα 8 (Θ. Αλάογλου)</u>

Εάν X χώρος με νόρμα, τότε ο

$$\left(B_{X^*}, w^*\right)$$

είναι συμπαγής.

<u>Απόδειξη</u>: Θέτουμε $E = [-1,1]^{B_X}$

κ' θεωρούμε στο E την τοπολογία-
-γινόμενο τ (στο $[-1,1]$ τη συνήθη).

Επειδή $[-1,1]$ <u>συμπαγές</u> $\subset \mathbb{R}$, το

Θ. Tychonoff δίνει ότι ο (E,τ) είναι

<u>συμπαγής</u> τοπολογικός χώρος.

Παρατηρούμε ότι $\forall f \in B_{X^*}$, $\forall x \in B_X$,

$$|f(x)| \leq 1 \Rightarrow f|_{B_X} \in E.$$

Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\mathcal{E} : (B_{X^*}, w^*) \to (E, \tau) \text{ με}$$

$$\mathcal{E}(f) = f|_{B_X}.$$

- Η $\mathcal{E}$ είναι 1-1 (γιατί;)

• Η $\mathcal{E}$ είναι <u>ομοιομορφισμός</u> (εντός).

Πράγματι, αν $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subseteq B_{X^*}$ δίκτυο κ' $f \in B_{X^*}$, τότε

$$\left(f_\lambda \xrightarrow{w^*} f\right) \Leftrightarrow \left(f_\lambda(x) \to f(x),\ \forall x \in B_X\right)$$

$$\Leftrightarrow f_\lambda|_{B_X} \xrightarrow{\tau} f|_{B_X}.$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{E}(f_\lambda) \xrightarrow{\tau} \mathcal{E}(f).$$

• <u>$\mathcal{E}(B_{X^*})$ τ-κλειστό στον E.</u>

Πράγματι· έστω $\rho \in \overline{\mathcal{E}(B_{X^*})}^{\tau}$.

Τότε, $\exists (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ δίκτυο $\subset B_{X^*}$ |

$$\mathcal{E}(f_\lambda) \xrightarrow{\tau} \rho$$

δηλ. $f_\lambda|_{B_X} \xrightarrow{\tau} \rho$

$\Leftrightarrow \forall x \in B_X$, $f_\lambda(x) \to \rho(x)$.

Έστω $x, y \in B_X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\alpha x + \beta y \in B_X$.

Τότε, $\rho(\alpha x+\beta y) = \lim\limits_{\lambda} f_\lambda(\alpha x + \beta y) =$

$= \lim\limits_{\lambda} [\alpha f_\lambda(x) + \beta f_\lambda(y)] = \alpha\rho(x) + \beta\rho(y).$

(+) $f: X \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1+\|x\|)\rho\left(\frac{1}{1+\|x\|}x\right)$

Αποδεικνύεται (άσκηση!) ότι

$\exists\, f: X \to \mathbb{R}$ γραμμική $\mid f|_{B_X} = \rho$. (+)

Επειδή $f_\lambda(x) \to \rho(x)$, $\forall x \in B_X$

κ' $\|f_\lambda\| \leq 1$, $\lambda \in \Lambda$, έπεται ότι

$\forall x \in B_X$, $|f(x)| = |\rho(x)| \leq 1$

$\Longrightarrow$ $f \in B_{X^*}$ κ' $\rho = \mathcal{E}(f) \in$

$\in \mathcal{E}(B_{X^*})$.

Εφ' όσον (E, τ) συμπαγής κ'

$\mathcal{E}(B_{X^*})$ κλειστό $\subset (E, \tau)$, το

$\mathcal{E}(B_{X^*})$ είναι τ – συμπαγές.

Αλλά $\mathcal{E}$ w^*–τ ομοιομορφισμός, οπότε και

(B_{X^*}, w^*) συμπαγής. $\boxtimes$

<u>Πόρισμα 9:</u> Εάν X διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα, τότε ο

$$(B_{X^*}, w^*)$$

είναι <u>συμπαγής</u> <u>μετρικοποιήσιμος</u>.

<u>Απόδειξη:</u> Άμεση, από Θ. Αλάογλου κ' Πόρισμα 5. ☒

<u>Πόρισμα 10:</u> Εάν X διαχωρίσιμος χώρος <u>Banach</u> κ' $A \subset X^*$ w^*-συμπαγές, τότε είναι και w^*-ακολουθιακά συμπαγές.

<u>Απόδειξη:</u> Άμεση, από Πρόταση 1 κ' Πόρισμα 9. ☒

<u>Σχόλιο!!</u> ο (B_{X^*}, w^*) είναι w^*-συμπαγής <u>αλλά όχι εν γένει</u> <u>w^*-ακολουθιακά συμπαγής.</u>

<u>Παράδειγμα:</u>

$X = (\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ ✗ δεν <u>είναι διαχωρ.</u> !!

$e_n^* : X \to \mathbb{R}$, $e_n^*(x) = x(n)$, $x \in X$, $n \geq 1$.

Τότε, $(e_n^*) \subset B_{X^*}$.

Η (e_n^*) <u>δεν έχει w^*-συγκλίνουσα υπακολουθία.</u>

Πράγματι έστω $(k_n) \subset \mathbb{N}^*$ γν. αύξουσα.

Θέτουμε $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x(k_n) = (-1)^n$, $x(j) = 0$, $\forall j \notin \{k_1, k_2, \dots\}$.

Τότε, $x \in \ell^\infty$ κ' η $\left(e_{k_n}^*(x)\right) = (x(k_n)) = \left((-1)^n\right)$ <u>δεν είναι συγκλίνουσα.</u>