

1. ΑΣΘΕΝΕΙΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΕΣ - ΓΕΝΙΚΑ.

Έστω X γραμμικός χώρος, $X^\#$ η κλάση των γραμμικών συναρτησιακών πάνω στον X και $\Phi \subseteq X^\#$.

Ορισμός 1 Η Φ χωρίζει σημεία στον X ανν για οποιαδήποτε $x, y \in X$ με $x \neq y$, υπάρχει $f \in \Phi$ ώστε $f(x) \neq f(y)$.

Σχόλιο: Από τον Ορισμό 1 προκύπτει εύκολα ότι η Φ χωρίζει σημεία στον X ανν $\bigcap_{f \in \Phi} \text{Ker } f = \{0\}$.

Έστω $\Phi \subseteq X^\#$ που χωρίζει σημεία στον X .

Θεωρούμε την παρακάτω κλάση υποσυνόλων του X :

$$\mathcal{S}_\Phi = \{f^{-1}((f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)) : x \in X, f \in \Phi, \varepsilon > 0\}.$$

Ορισμός 2 Η μοναδική τοπολογία $\mathcal{T}_\Phi$ στον X που έχει ως υποβάση την $\mathcal{S}_\Phi$ ονομάζεται ασθενής τοπολογία που επάγεται στον X από την κλάση Φ .

Πρόταση 3 Έστω $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq X$ δίκτυο στον X και $x \in X$. Τότε, $x_\lambda \xrightarrow{\mathcal{T}_\Phi} x$ ανν για κάθε $f \in \Phi$, ισχύει $f(x_\lambda) \rightarrow f(x)$.

Απόδειξη:

Έστω $(\preceq)$ η προδιάταξη του κατευθυνόμενου συνόλου Λ .

$(\Rightarrow)$ Έστω $f \in \Phi$, $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $G_x = f^{-1}((f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon))$. Το G_x είναι $\mathcal{T}_\Phi$ -ανοικτό και περιέχει το x . Επομένως, υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ ώστε για κάθε $\lambda \succeq \lambda_0$,

$$x_\lambda \in G_x \quad \text{ή} \quad |f(x_\lambda) - f(x)| < \varepsilon.$$

Άρα, $f(x_\lambda) \rightarrow f(x)$.

$(\Leftarrow)$ Έστω $G \in \mathcal{T}_\Phi$, $x \in X$. Υπάρχουν $N \geq 1$, $z_j \in X$, $f_j \in \Phi$, $\varepsilon_j > 0$, $1 \leq j \leq N$, ώστε

$$x \in \bigcap_{j=1}^N G_j \subseteq G,$$

όπου $G_j = f_j^{-1}((f_j(z_j) - \varepsilon_j, f_j(z_j) + \varepsilon_j))$, $1 \leq j \leq N$.

Τότε, για κάθε j με $1 \leq j \leq N$,

$$x \in G_j \Rightarrow f_j(x) \in (f_j(z_j) - \varepsilon_j, f_j(z_j) + \varepsilon_j)$$

και επειδή $f_j(x_\lambda) \rightarrow f_j(x)$, υπάρχει $\lambda_j \in \Lambda$ ώστε για κάθε $\lambda \succeq \lambda_j$,

$$f_j(x_\lambda) \in (f_j(z_j) - \varepsilon_j, f_j(z_j) + \varepsilon_j) \quad \text{ή} \quad x_\lambda \in G_j.$$

Επιλέγουμε $\lambda_0 \in \Lambda$ ώστε $\lambda_0 \succeq \lambda_j$, για όλα τα j με $1 \leq j \leq N$.

Τότε, για κάθε $\lambda \succeq \lambda_0$, έχουμε

$$x_\lambda \in \bigcap_{j=1}^N G_j \subseteq G.$$

Άρα, $x_\lambda \xrightarrow{\mathcal{T}_\Phi} x$. ■

Πρόταση 4 Η $\mathcal{T}_\Phi$ είναι η μικρότερη τοπολογία στον X ως προς την οποία όλα τα $f \in \Phi$ είναι συνεχή.

Απόδειξη: Από την Πρόταση 3 προκύπτει άμεσα ότι όλα τα $f \in \Phi$ είναι $\mathcal{T}_\Phi$ -συνεχή.

Έστω τώρα μια τοπολογία τ στον X τέτοια ώστε όλα τα $f \in \Phi$ είναι τ -συνεχή. Τότε, για όλα τα $f \in \Phi$, $x \in X$, $\varepsilon > 0$, ισχύει

$$f^{-1}((f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)) \in \tau.$$

Έπεται ότι $\mathcal{S}_\Phi \subseteq \tau \Rightarrow \mathcal{T}_\Phi \subseteq \tau$. ■

Πρόταση 5 (i) $O(X, \mathcal{T}_\Phi)$ είναι τοπολογικός γραμμικός χώρος.

(ii) Εάν $U \in \mathcal{T}_\Phi$ με $0 \in U$, υπάρχουν $N \geq 1$, $f_j \in \Phi$, $1 \leq j \leq N$ και $\varepsilon > 0$, ώστε

$$0 \in \bigcap_{j=1}^N \text{Ker} f_j \subseteq \bigcap_{j=1}^N f_j^{-1}((\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq U.$$

Απόδειξη:

(i)

- Ο $(X, \mathcal{T}_\Phi)$ είναι T_2 . Πράγματι, έστω $x, y \in X$ με $x \neq y$. Επειδή η Φ χωρίζει σημεία, υπάρχει $f \in \Phi$ ώστε $f(x) \neq f(y)$. Επιλέγουμε $0 < \varepsilon < |f(x) - f(y)|$ και θέτουμε

$$G = f^{-1}((f(x) - \varepsilon/2, f(x) + \varepsilon/2)), \quad H = f^{-1}((f(y) - \varepsilon/2, f(y) + \varepsilon/2)).$$

Προφανώς, τα G, H είναι $\mathcal{T}_\Phi$ -ανοικτά, $x \in G$, $y \in H$. Επιπλέον, $G \cap H = \emptyset$. Πράγματι, εάν $z \in G \cap H$, τότε

$$|f(z) - f(x)| < \varepsilon/2, \quad |f(z) - f(y)| < \varepsilon/2 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| < \varepsilon$$

(άτοπο).

- Συνέχεια της πρόσθεσης:

Έστω $((x_\lambda, y_\lambda))_{\lambda \in \Lambda} \subseteq X \times X$ δίκτυο ώστε $(x_\lambda, y_\lambda) \rightarrow (x, y)$ ως προς την τοπολογία γινόμενο $\mathcal{T}_\Phi \times \mathcal{T}_\Phi$, δηλαδή

$$x_\lambda \xrightarrow{\mathcal{T}_\Phi} x, \quad y_\lambda \xrightarrow{\mathcal{T}_\Phi} y.$$

Λόγω της Πρότασης 3, έχουμε ότι για κάθε $f \in \Phi$

$$f(x_\lambda) \rightarrow f(x), \quad f(y_\lambda) \rightarrow f(y) \Rightarrow f(x_\lambda + y_\lambda) = f(x_\lambda) + f(y_\lambda) \rightarrow f(x) + f(y) = f(x + y).$$

Από την Πρόταση 3 έπεται ότι $x_\lambda + y_\lambda \xrightarrow{\mathcal{T}_\Phi} x + y$.

- Συνέχεια του βαθμωτού πολλαπλασιασμού:

Έστω $((a_\lambda, x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathbb{R} \times X$ δίκτυο ώστε $(a_\lambda, x_\lambda) \rightarrow (a, x)$ ως προς την τοπολογία γινόμενο $\tau_{\mathbb{R}} \times \mathcal{T}_\Phi$, όπου $\tau_{\mathbb{R}}$ η συνήθης τοπολογία στον $\mathbb{R}$. Τότε, $a_\lambda \rightarrow a$, $x_\lambda \xrightarrow{\mathcal{T}_\Phi} x$.

Λόγω της Πρότασης 3, έχουμε ότι για κάθε $f \in \Phi$,

$$f(x_\lambda) \rightarrow f(x) \Rightarrow f(a_\lambda \cdot x_\lambda) = a_\lambda f(x_\lambda) \rightarrow a f(x) = f(a \cdot x).$$

Από την Πρόταση 3 έπεται ότι $a_\lambda \cdot x_\lambda \xrightarrow{\mathcal{T}_\Phi} a \cdot x$.

- (ii) Υπάρχουν $N \geq 1$, $z_j \in X$, $f_j \in \Phi$, $\varepsilon_j > 0$, $1 \leq j \leq N$, ώστε

$$0 \in \bigcap_{j=1}^N U_j \subseteq U,$$

όπου $U_j = f_j^{-1}(f_j(z_j) - \varepsilon_j, f_j(z_j) + \varepsilon_j)$, $1 \leq j \leq N$.

Τότε, $0 \in U_j \Rightarrow |f(z_j)| < \varepsilon_j$, $1 \leq j \leq N$. Επιλέγουμε

$$0 < \varepsilon < \min_{j=1}^N \{ \varepsilon_j - |f(z_j)| \}.$$

Έστω $x \in \bigcap_{j=1}^N f_j^{-1}((\varepsilon, \varepsilon))$. Τότε, για κάθε j ,

$$|f_j(x) - f_j(z_j)| \leq |f_j(x)| + |f_j(z_j)| < \varepsilon + |f_j(z_j)| < \varepsilon_j \Rightarrow x \in \bigcap_{j=1}^N U_j.$$

Έπεται ότι

$$0 \in \bigcap_{j=1}^N f_j^{-1}((\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq \bigcap_{j=1}^N U_j \subseteq U.$$

Επιπλέον, είναι σαφές ότι

$$0 \in \bigcap_{j=1}^N \text{Ker} f_j \subseteq \bigcap_{j=1}^N f_j^{-1}((\varepsilon, \varepsilon))$$

■

Λήμμα 6 Υποθέτουμε ότι ο X είναι απειροδιάστατος. Εάν $N \geq 1$, $f_j \in X^\#$, $1 \leq j \leq N$, τότε

$$\bigcap_{j=1}^N \text{Ker} f_j \neq \{0\}.$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $F : X \rightarrow \mathbb{R}^N$ με

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_N(x)), \quad x \in X.$$

Είναι σαφές ότι

$$\text{Ker} f = \bigcap_{j=1}^N \text{Ker} f_j.$$

Εάν η παραπάνω τομή ήταν τετριμμένη, θα είχαμε ότι $\text{Ker} f = \{0\}$ και άρα η F θα ήταν 1-1 και συνεπώς, $\dim X \leq N$ (άτοπο). ■

Πρόταση 7 Υποθέτουμε ότι ο X είναι απειροδιάστατος. Τότε:

- (i) Για κάθε $U \in \mathcal{T}_\Phi$ με $0 \in U$, υπάρχει μη τετριμμένος γραμμικός υπόχωρος Y ώστε $Y \subseteq U$.
- (ii) Δεν υπάρχει νόρμα $\|\cdot\|$ στον X με

$$\mathcal{T}_{\|\cdot\|} = \mathcal{T}_\Phi.$$

Απόδειξη:

(i) Άμεσο από την Πρόταση 5 (ii) και το Λήμμα 6.

(ii) Ας υποθέσουμε αντίθετα ότι υπάρχει νόρμα $\|\cdot\|$ στον X με $\mathcal{T}_{\|\cdot\|} = \mathcal{T}_\Phi$.

Τότε, το σύνολο $B(0,1) = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ είναι $\mathcal{T}_\Phi$ -ανοικτό και περιέχει το 0. Από το (i) προκύπτει ότι υπάρχει μη τετριμμένος γραμμικός υπόχωρος Y με $Y \subseteq B(0,1)$. Επιλέγουμε $y \in Y$ με $y \neq 0$. Τότε, για κάθε $k \geq 1$, έχουμε

$$ky \in Y \Rightarrow \|ky\| < 1 \Rightarrow \|y\| < \frac{1}{k}$$

και άρα $y = 0$ (άτοπο). ■

Λήμμα 8 Εάν $f, g \in X^\#$ $\mu \in \text{Ker} f \subseteq \text{Ker} g$, τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $g = cf$.

Απόδειξη: Εάν $f \equiv 0$, τότε $X = \text{Ker} f \subseteq \text{Ker} g \Rightarrow X = \text{Ker} g \Rightarrow g \equiv 0$ και άρα ισχύει η αποδεικτέα.

Υποθέτουμε ότι $f \not\equiv 0$ κι επιλέγουμε $x_0 \in X$ ώστε $f(x_0) \neq 0$. Έστω $x \in X$. Θέτουμε $u = f(x_0)x - f(x)x_0$. Τότε,

$$f(u) = f(x_0)f(x) - f(x)f(x_0) = 0 \Rightarrow u \in \text{Ker} f \Rightarrow u \in \text{Ker} g \Rightarrow g(u) = 0$$

$$\Rightarrow f(x_0)g(x) - f(x)g(x_0) = 0 \Rightarrow g(x) = \frac{g(x_0)}{f(x_0)}f(x).$$

Η σταθερά $c = \frac{g(x_0)}{f(x_0)}$ ικανοποιεί την αποδεικτέα. ■

Πρόταση 9 Έστω $n \geq 1$, $f_j \in X^\#$, $1 \leq j \leq n$, $g \in X^\#$ ώστε

$$\bigcap_{j=1}^n \text{Ker} f_j \subseteq \text{Ker} g.$$

Τότε, $g \in \langle f_j : 1 \leq j \leq n \rangle$, δηλ. υπάρχουν $c_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$, ώστε $g = \sum_{j=1}^n c_j f_j$.

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο n .

- Για $n = 1$ ισχύει, λόγω του Λήμματος 8.
- Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για κάποιο $n \geq 1$.

Έστω $f_j \in X^\#$, $1 \leq j \leq n+1$, $g \in X^\#$ ώστε

$$\bigcap_{j=1}^{n+1} \text{Ker} f_j \subseteq \text{Ker} g.$$

Θέτουμε $Y = \text{Ker} f_{n+1}$ και $g_j = f_j|_Y$, $1 \leq j \leq n$. Τότε,

$$\bigcap_{j=1}^n \text{Ker} g_j = \bigcap_{j=1}^{n+1} \text{Ker} f_j \subseteq \text{Ker} g|_Y.$$

Από την υπόθεση της επαγωγής προκύπτει ότι υπάρχουν $c_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$, ώστε

$$g|_Y = \sum_{j=1}^n c_j g_j \Rightarrow g(y) - \sum_{j=1}^n c_j f_j(y) = 0, \forall y \in Y \Rightarrow Y \subseteq \text{Ker} \left(g - \sum_{j=1}^n c_j f_j \right).$$

Πάλι λόγω του Λήμματος 8, υπάρχει $c_{n+1} \in \mathbb{R}$ ώστε

$$g - \sum_{j=1}^n c_j f_j = c_{n+1} f_{n+1} \Rightarrow g = \sum_{j=1}^{n+1} c_j f_j.$$

■

Πρόταση 10 Έστω $g : (X, \mathcal{T}_\Phi) \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμική, συνεχής. Τότε, $g \in \langle \Phi \rangle$.

Απόδειξη: Το $g^{-1}((-1, 1))$ είναι $\mathcal{T}_\Phi$ -ανοικτό και περιέχει το 0. Από την Πρόταση 5 (ii) έπεται ότι υπάρχουν $N \geq 1$, $f_j \in \Phi$, $1 \leq j \leq N$ ώστε

$$\bigcap_{j=1}^N \text{Ker} f_j = Y \subseteq g^{-1}((-1, 1)).$$

Ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος του X , οπότε το $g(Y)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}$ κι επιπλέον $g(Y) \subseteq (-1, 1)$. Άρα, $g(Y) = \{0\}$, δηλ. $Y \subseteq \text{Ker} g$. Η Πρόταση 9 μας δίνει ότι $g \in \langle f_j : 1 \leq j \leq N \rangle \subseteq \langle \Phi \rangle$. ■

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τη **μετριοποιησιμότητα** της ασθενούς τοπολογίας $\mathcal{T}_\Phi$. Θα χρειαστούμε κάποια τοπολογικά προαπαιτούμενα.

Πρόταση 11 Έστω τ, τ' δύο τοπολογίες στο μη κενό σύνολο X . *T.II.E.I.*

(i) $\tau \subseteq \tau'$.

(ii) Εάν $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq X$ δίκτυο στον X και $x \in X$ με $x_\lambda \xrightarrow{\tau'} x$, τότε $x_\lambda \xrightarrow{\tau} x$.

Απόδειξη: (i) $\Rightarrow$ (ii). Έστω $G \in \tau$ με $x \in G$. Τότε, $G \in \tau'$, οπότε υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ ώστε για κάθε $\lambda \succeq \lambda_0$, $x_\lambda \in G$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Έστω F τ -κλειστό και $x \in \overline{F}'$. Τότε, υπάρχει δίκτυο $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq F$ ώστε $x_\lambda \xrightarrow{\tau'} x$. Λόγω της υπόθεσης, παίρνουμε $x_\lambda \xrightarrow{\tau} x \Rightarrow x \in F$. Επομένως, το F είναι και τ' -κλειστό. Άρα, $\tau \subseteq \tau'$. ■

Πόρισμα 12 Έστω τ, τ' δύο τοπολογίες στο μη κενό σύνολο X . *T.II.E.I.*

(i) $\tau = \tau'$.

(ii) Εάν $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq X$ δίκτυο στον X και $x \in X$, τότε $x_\lambda \xrightarrow{\tau} x$ ανν $x_\lambda \xrightarrow{\tau'} x$.

Ορισμός 13 Έστω X μη κενό σύνολο. **Ψευδομετρική** στον X είναι μια απεικόνιση $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ που ικανοποιεί τα παρακάτω:

(i) $d(x, x) = 0$, $\forall x \in X$.

(ii) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$.

(iii) $\forall x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Παράδειγμα: Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση που δεν είναι 1-1.

Θέτουμε $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$, $x, y \in X$. Τότε, η d είναι μια ψευδομετρική στο X που δεν είναι μετρική.

Έστω d ψευδομετρική στο X . Για κάθε $x \in X$, $\varepsilon > 0$, θέτουμε

$$B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\}.$$

Πρόταση 14 Υπάρχει μοναδική τοπολογία $\mathcal{T}_d$ που έχει σαν βάση τα σύνολα

$$B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\}, \quad x \in X, \quad \varepsilon > 0.$$

Απόδειξη: Έστω $x, y \in X$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ και $z \in B_d(x, \varepsilon_1) \cap B_d(y, \varepsilon_2)$. Επιλέγουμε

$$0 < \varepsilon < \min\{\varepsilon_1 - d(z, x), \varepsilon_2 - d(z, y)\}.$$

Τότε, $B_d(z, \varepsilon) \subseteq B_d(x, \varepsilon_1) \cap B_d(y, \varepsilon_2)$. Πράγματι, εάν $u \in B_d(z, \varepsilon)$, έχουμε

$$d(x, u) \leq d(x, z) + d(z, u) \leq d(x, z) + \varepsilon < \varepsilon_1, \quad d(u, y) \leq d(u, z) + d(z, y) < \varepsilon + d(z, y) < \varepsilon_2.$$

■

Ορισμός 15 Η τοπολογία $\mathcal{T}_d$ της παραπάνω πρότασης ονομάζεται **τοπολογία που επάγεται από την ψευδομετρική d στο X** .

Πρόταση 16 Έστω d ψευδομετρική στο X . Τότε, ο $(X, \mathcal{T}_d)$ είναι T_2 αν η d είναι μετρική.

Απόδειξη: (i) $\Rightarrow$ (ii). Έστω $x, y \in X$ με $x \neq y$. Τότε, υπάρχουν $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ ώστε $B_d(x, \varepsilon_1) \cap B_d(y, \varepsilon_2) = \emptyset$. Εάν ήταν $d(x, y) = 0$, τότε $y \in B_d(x, \varepsilon_1) \cap B_d(y, \varepsilon_2)$ (άτοπο). Άρα, $d(x, y) > 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Είναι γνωστό από τη θεωρία μετρικών χώρων. ■

Πρόταση 17 Έστω d ψευδομετρική στο X , $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq X$ δίκτυο στο X και $x \in X$. Τότε,

$$x_\lambda \xrightarrow{\mathcal{T}_d} x \Leftrightarrow d(x_\lambda, x) \rightarrow 0.$$

Απόδειξη: Έπεται άμεσα από τους ορισμούς. ■

Ορισμός 18 Δύο ψευδομετρικές d, ρ στο X λέγονται **ισοδύναμες** αν $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_\rho$.

Πρόταση 19 Έστω d ψευδομετρική στο X και $\rho = \frac{d}{1+d}$. Τότε, η ρ είναι ψευδομετρική στο X , ισοδύναμη με την d και $0 \leq \rho \leq 1$.

Η απόδειξη της Πρότασης 19 βασίζεται στο παρακάτω

Λήμμα 20 Η συνάρτηση $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1)$ με $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$, $t \geq 0$, είναι γν. αύξουσα και ομοιομορφισμός. Επιπλέον, $\varphi(0) = 0$ και $\varphi(t+s) \leq \varphi(t) + \varphi(s)$, $\forall t, s \geq 0$.

Απόδειξη: Είναι $\varphi'(t) = 1/(1+t)^2 > 0$, $\forall t \geq 0$. Επιπλέον, διαπιστώνεται εύκολα ότι $\varphi^{-1}(\xi) = \frac{\xi}{1-\xi}$, $\xi \in [0, 1)$. Τέλος, για όλα τα $t, s \geq 0$,

$$\varphi(t+s) = \frac{t+s}{1+t+s} = \frac{t}{1+t+s} + \frac{s}{1+t+s} \leq \frac{t}{1+t} + \frac{s}{1+s} = \varphi(t) + \varphi(s).$$

■

Απόδειξη της Πρότασης 19 : Είναι $\rho(x, y) = \varphi[d(x, y)]$, $x, y \in X$, όπου φ η συνάρτηση του Λήμματος. Προκύπτει άμεσα ότι $\rho(x, x) = \varphi(0) = 0$ και $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $x, y \in X$. Επιπλέον, για όλα τα $x, y, z \in X$,

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \Rightarrow \varphi[d(x, z)] \leq \varphi[d(x, y) + d(y, z)] \leq \varphi[d(x, y)] + \varphi[d(y, z)],$$

δηλ. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$. Συνεπώς, η ρ είναι ψευδομετρική.

Στη συνέχεια, έστω $(x_\lambda) \subseteq X$ δίκτυο και $x \in X$. Τότε,

$$x_\lambda \xrightarrow{\mathcal{T}_d} x \Leftrightarrow d(x_\lambda, x) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \varphi[d(x_\lambda, x)] \rightarrow \varphi(0) = 0 \Leftrightarrow \rho(x_\lambda, x) \rightarrow 0 \Leftrightarrow x_\lambda \xrightarrow{\mathcal{T}_\rho} x.$$

Από το Πόρισμα 12 έπεται ότι $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_\rho$. ■

Πρόταση 21 Έστω d_k , $k \geq 1$, ψευδομετρικές στο X . Θέτουμε $\rho_k = d_k/(1+d_k)$, $k \geq 1$ και

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_k(x, y)}{2^k}, \quad x, y \in X.$$

Τότε, η d είναι ψευδομετρική και για κάθε δίκτυο $(x_\lambda) \subseteq X$ και $x \in X$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$x_\lambda \xrightarrow{d} x \Leftrightarrow x_\lambda \xrightarrow{d_k} x, \quad \forall k \geq 1.$$

Απόδειξη: Το ότι η d είναι ψευδομετρική, προκύπτει εύκολα από το ότι οι ρ_k , $k \geq 1$, είναι ψευδομετρικές.

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι για κάθε $k \geq 1$, οι ρ_k , d_k είναι ισοδύναμες (βλ. Πρόταση 19).

Έστω $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq X$ δίκτυο και $x \in X$.

Υποθέτουμε ότι $x_\lambda \xrightarrow{d} x$. Τότε, $\forall k \geq 1$,

$$\rho_k(x_\lambda, x) \leq 2^k d(x_\lambda, x) \xrightarrow{\lambda} 0 \Rightarrow d_k(x_\lambda, x) \xrightarrow{\lambda} 0.$$

Επομένως, $x_\lambda \xrightarrow{d_k} x$, $\forall k \geq 1$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $x_\lambda \xrightarrow{d_k} x$, $\forall k \geq 1$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $N \geq 1$ ώστε

$$\sum_{k>N} \frac{1}{2^k} < \varepsilon/2.$$

Αλλά, για όλα τα k με $1 \leq k \leq N$, έχουμε $d_k(x_\lambda, x) \xrightarrow{\lambda} 0 \Rightarrow \rho_k(x_\lambda, x) \xrightarrow{\lambda} 0$ κι επομένως,

$$\sum_{k=1}^N \frac{\rho_k(x_\lambda, x)}{2^k} \xrightarrow{\lambda} 0.$$

Συνεπώς, υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ ώστε για κάθε $\lambda \succeq \lambda_0$,

$$\sum_{k=1}^N \frac{\rho_k(x_\lambda, x)}{2^k} < \varepsilon/2.$$

Συνοψίζοντας, για κάθε $\lambda \succeq \lambda_0$,

$$d(x_\lambda, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_k(x_\lambda, x)}{2^k} = \sum_{k=1}^N \frac{\rho_k(x_\lambda, x)}{2^k} + \sum_{k>N} \frac{\rho_k(x_\lambda, x)}{2^k} \leq \sum_{k=1}^N \frac{\rho_k(x_\lambda, x)}{2^k} + \sum_{k>N} \frac{1}{2^k} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

(σημ. ότι $0 \leq \rho_k \leq 1$, $\forall k \geq 1$). Άρα, $x_\lambda \xrightarrow{d} x$. ■

Το επόμενο θεώρημα δίνει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη μετριοποιησιμότητας για το χώρο $(X, \mathcal{T}_\Phi)$.
Θέτουμε

$$X' = \{ f \in X^\# : f \text{ είναι } \mathcal{T}_\Phi - \text{συνεχής} \}.$$

Γνωρίζουμε ότι $X' = \langle \Phi \rangle$ (βλ. Πρόταση 10).

Θεώρημα 22 Έστω X γραμμικός χώρος και $\Phi \subseteq X^\#$ που χωρίζει σημεία. Τότε, ο $(X, \mathcal{T}_\Phi)$ είναι μετριοποιησιμος αν ο X' έχει αριθμήσιμη αλγεβρική βάση (βάση Hamel).

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι ο $(X, \mathcal{T}_\Phi)$ είναι μετριοποιησιμος, δηλ. υπάρχει μετρική d στο X ώστε $\mathcal{T}_\Phi = \mathcal{T}_d$. Για κάθε $n \geq 1$, θέτουμε

$$V_n = B_d(0, 1/n) = \{ x \in X : d(x, 0) < 1/n \}.$$

Είναι γνωστό ότι τα V_n , $n \geq 1$ αποτελούν $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_\Phi$ -βάση περιοχών του 0. Σύμφωνα με την Πρόταση 5 (ii), για κάθε $n \geq 1$, υπάρχει $\Phi_n \subseteq \Phi$ πεπερασμένο ώστε

$$0 \in \bigcap_{f \in \Phi_n} \text{Ker } f = Y_n \subseteq V_n.$$

Θέτουμε $\Phi' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n$. Προφανώς, το Φ' είναι αριθμήσιμο.

Θα δείξουμε ότι $X' = \langle \Phi' \rangle$.

Πράγματι, έστω $g \in X'$. Τότε, το $g^{-1}((-1, 1))$ είναι $\mathcal{T}_\Phi$ -ανοικτό, άρα και $\mathcal{T}_d$ -ανοικτό και περιέχει το 0. Συνεπώς, υπάρχει $N \geq 1$ ώστε $Y_N \subseteq V_N \subseteq g^{-1}((-1, 1))$.

Ο Y_N είναι γραμμικός υπόχωρος του X , οπότε το $g(Y_N)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}$ κι επιπλέον $g(Y_N) \subseteq (-1, 1)$. Άρα, $g(Y_N) = \{0\}$, δηλ. $Y_N \subseteq \text{Ker } g$. Η Πρόταση 9 μας δίνει ότι $g \in \langle \Phi_N \rangle$.

Αντίστροφα, έστω $\mathcal{B} = \{f_k : k \geq 1\}$ αριθμήσιμη αλγεβρική βάση του X' . Η $\mathcal{B}$ χωρίζει σημεία στο X . Πράγματι, επειδή $\Phi \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle$, διαπιστώνεται εύκολα ότι

$$\bigcap_{f \in \mathcal{B}} \text{Ker } f \subseteq \bigcap_{f \in \Phi} \text{Ker } f = \{0\}.$$

Για κάθε $k \geq 1$, θέτουμε $d_k(x, y) = |f_k(x) - f_k(y)|$, $x, y \in X$. Η d_k , $k \geq 1$, είναι ψευδομετρική. Θέτουμε

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k(x, y)}{2^k [1 + d_k(x, y)]}, \quad x, y \in X.$$

Λόγω της Πρότασης 21 κι επειδή η $\mathcal{B}$ χωρίζει σημεία στο X , η d είναι μετρική στο X . Θα δείξουμε ότι $\mathcal{T}_\Phi = \mathcal{T}_d$. Έστω $(x_\lambda) \subseteq X$ δίκτυο και $x \in X$. Έχουμε τις παρακάτω ισοδυναμίες :

$$x_\lambda \xrightarrow{d} x \Leftrightarrow d_k(x_\lambda, x) \xrightarrow{\lambda} 0, \quad \forall k \geq 1 \quad (\text{βλ. Πρόταση 21}) \Leftrightarrow f_k(x_\lambda) \xrightarrow{\lambda} f_k(x), \quad \forall k \geq 1$$

$$\Leftrightarrow f(x_\lambda) \xrightarrow{\lambda} f(x), \quad \forall f \in \Phi \Leftrightarrow x_\lambda \xrightarrow{\mathcal{T}_\Phi} x.$$

Το συμπέρασμα έπεται από το Πόρισμα 12. ■

2. ΑΣΘΕΝΗΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΣΕ ΧΩΡΟ ΜΕ ΝΟΡΜΑ.

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $\Phi = X^*$. Από μια συνέπεια του Θ. Hahn -Banach γνωρίζουμε ότι η Φ χωρίζει σημεία στον X .

Ορισμός 23 Η τοπολογία $\mathcal{T}_\Phi$ ονομάζεται **ασθενής τοπολογία** του X και συμβολίζεται με $\mathcal{T}_w$ ή απλά w .

Με βάση τον παραπάνω ορισμό και τη γενική θεωρία που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, προκύπτουν άμεσα οι παρακάτω ιδιότητες της ασθενούς τοπολογίας w :

- (i) Η w είναι η μικρότερη τοπολογία ως προς την οποία όλα τα συναρτησιακά του X^* είναι συνεχή. Επιπλέον, $\mathcal{T}_w \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$, με την ισότητα να αποκλείεται στην περίπτωση που ο X είναι απειροδιάστατος.
- (ii) Εάν $f \in X^\#$, τότε $f \in X^* \Leftrightarrow f$ w -συνεχής.
- (iii) Έστω $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq X$ δίκτυο στον X και $x \in X$. Τότε, $x_\lambda \xrightarrow{w} x$ ανν για κάθε $f \in X^*$, $f(x_\lambda) \rightarrow f(x)$. Επιπλέον, εάν $x_\lambda \xrightarrow{\|\cdot\|} x$, τότε $x_\lambda \xrightarrow{w} x$.
- (iv) Εάν U w -ανοικτό με $0 \in U$, υπάρχουν $N \geq 1$, $f_j \in X^*$, $1 \leq j \leq N$ και $\varepsilon > 0$, ώστε

$$0 \in \bigcap_{j=1}^N \text{Ker } f_j = Y \subseteq \bigcap_{j=1}^N f_j^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq U.$$

Επιπλέον, εάν X απειροδιάστατος, ο Y είναι μη τετριμμένος γραμμικός υπόχωρος του X τέτοιος ώστε $Y \subseteq U$.

Συνεχίζουμε με περαιτέρω θεμελιώδεις ιδιότητες της ασθενούς τοπολογίας w .

Πρόταση 24 Έστω $K \subseteq X$ w -φραγμένο, δηλ. $f(K)$ φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, για κάθε $f \in X^*$. Τότε, K $\|\cdot\|$ -φραγμένο. Ειδικότερα, εάν K w -συμπαγές, τότε K $\|\cdot\|$ -φραγμένο.

Απόδειξη: Έστω $e : X \rightarrow X^{**}$ η κανονική ισομετρική εμφύτευση. Θεωρούμε την οικογένεια φραγμένων γραμμικών συναρτησιακών

$$e(x) : X^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \in K.$$

Για κάθε $f \in X^*$,

$$\sup_{x \in K} |e(x)(f)| = \sup_{x \in K} |f(x)| < \infty.$$

Επειδή ο X^* είναι *Banach*, η Αρχή Ομοιομόρφου Φράγματος μας δίνει ότι

$$\sup_{x \in K} \|e(x)\| < \infty \Rightarrow \sup_{x \in K} \|x\| < \infty.$$

Ειδικότερα, εάν K w -συμπαγές, τότε το K είναι w -φραγμένο. [Πράγματι, κάθε $f \in X^*$ είναι w -συνεχής και τα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι φραγμένα.] ■

Πρόταση 25 (Θ. Mazur) Εάν $A \subseteq X$ κυρτό, τότε $\overline{A}^w = \overline{A}^{||\cdot||}$.

Απόδειξη: Επειδή $\mathcal{T}_w \subseteq \mathcal{T}_{||\cdot||}$, έπεται ότι $\overline{A}^{||\cdot||} \subseteq \overline{A}^w$.

Υποθέτουμε ότι $\overline{A}^{||\cdot||} \subsetneq \overline{A}^w$ κι επιλέγουμε $x_0 \in \overline{A}^w \setminus \overline{A}^{||\cdot||}$. Το $\{x_0\}$ είναι $||\cdot||$ -συμπαγές κυρτό και το $\overline{A}^{||\cdot||}$ είναι $||\cdot||$ -κλειστό κυρτό και τα $\{x_0\}$, $\overline{A}^{||\cdot||}$ είναι ξένα μεταξύ τους. Από τη 2η μορφή του Γεωμετρικού Hahn-Banach, υπάρχει $f \in X^* \setminus \{0\}$ και $\mu \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\sup_{x \in \overline{A}^{||\cdot||}} f(x) < \mu < f(x_0).$$

Το σύνολο $G = \{x \in X : f(x) > \mu\} = f^{-1}((\mu, +\infty))$ είναι w -ανοικτό (σημ. ότι το f είναι w -συνεχές) και περιέχει το x_0 . Επειδή $x_0 \in \overline{A}^w$, ισχύει $A \cap G \neq \emptyset$. Επιλέγουμε $y \in A \cap G$. Τότε, $y \in A$ και $y > \mu$ (άτοπο), διότι $\sup_{x \in A} f(x) < \mu$. ■

Πρόταση 26 Έστω $(x_n) \subseteq X$ ακολουθία με $x_n \xrightarrow{w} x$. Τότε:

- (i) $x \in \overline{\text{co}(x_j : j > k)}^{||\cdot||}$, για κάθε $k \geq 1$.
- (ii) υπάρχουν μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών

$$1 = k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_n < \dots$$

και ακολουθία $(y_n) \subseteq X$, τέτοια ώστε $y_n \in \text{co}(x_j : k_n < j \leq k_{n+1})$, $n \geq 1$ και $\lim_n ||y_n - x|| = 0$.

Απόδειξη: (i) Για κάθε $k \geq 1$, η ακολουθία $(x_j)_{j > k}$ w -συγκλίνει στο x , οπότε

$$x \in \overline{\text{co}(x_j : j > k)}^w = \overline{\text{co}(x_j : j > k)}^{||\cdot||}$$

(βλ. Θ. 25).

(ii) Θέτουμε $k_1 = 1$. Λόγω του (i), ισχύει $x \in \overline{\text{co}(x_j : j > k_1)}^{||\cdot||}$. Επιλέγουμε

$$y_1 \in \text{co}(x_j : j > k_1)$$

με $||y_1 - x|| < 1$. Υπάρχει $k_2 > k_1$ ώστε

$$y_1 \in \text{co}(x_j : k_1 < j \leq k_2).$$

Πάλι λόγω του (i), ισχύει $x \in \overline{\text{co}(x_j : j > k_2)}^{||\cdot||}$. Επιλέγουμε

$$y_2 \in \text{co}(x_j : j > k_2)$$

με $||y_2 - x|| < 1/2$. Υπάρχει $k_3 > k_2$ ώστε

$$y_2 \in \text{co}(x_j : k_2 < j \leq k_3).$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, επαγωγικά κατασκευάζονται οι ακολουθίες (k_n) , (y_n) με τις ζητούμενες ιδιότητες. ■

Ορισμός 27 Έστω $(x_n) \subseteq X$ ακολουθία. Μία ακολουθία (y_n) λέγεται **κυρτό block** της (x_n) αν υπάρχουν μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών

$$1 = k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_n < \dots$$

και ακολουθία $(\lambda_j) \subseteq [0, 1]$, τέτοια ώστε

$$\sum_{k_n < j \leq k_{n+1}} \lambda_j = 1, \quad y_n = \sum_{k_n < j \leq k_{n+1}} \lambda_j x_j, \quad \forall n \geq 1.$$

Πόρισμα 28 Έστω $(x_n) \subseteq X$ ακολουθία με $x_n \xrightarrow{w} x$. Τότε, υπάρχει κυρτό block (y_n) της (x_n) τέτοιο ώστε $\lim_n \|y_n - x\| = 0$.

Απόδειξη: Έστω $(k_n), (y_n)$ ακολουθίες με τις ιδιότητες που αναγράφονται στην Πρόταση 26 (ii). Τότε, για κάθε $n \geq 1$, έχουμε $y_n \in \text{co}(x_j : k_n < j \leq k_{n+1})$, οπότε υπάρχει πεπερασμένη ακολουθία $\{\lambda_j^{(n)}\}_{k_n < j \leq k_{n+1}} \subseteq [0, 1]$ τέτοια ώστε

$$\sum_{k_n < j \leq k_{n+1}} \lambda_j^{(n)} = 1, \quad y_n = \sum_{k_n < j \leq k_{n+1}} \lambda_j^{(n)} x_j, \quad \forall n \geq 1.$$

Για κάθε $j \geq 2$, υπάρχει μοναδικό $n_j \geq 1$ ώστε $k_{n_j} < j \leq k_{n_j+1}$. Θέτουμε $\lambda_j = \lambda_j^{(n_j)}$, $j \geq 2$. Επιπλέον, θέτουμε $\lambda_1 = 0$.

Έστω $n \geq 1$ και $k_n < j \leq k_{n+1}$. Τότε,

$$k_n < j \leq k_{n_j+1} \Rightarrow n < n_j + 1 \Rightarrow n \leq n_j$$

και

$$k_{n_j} < j \leq k_{n+1} \Rightarrow n_j < n + 1 \Rightarrow n_j \leq n.$$

Επομένως, $n = n_j$, οπότε

$$\sum_{k_n < j \leq k_{n+1}} \lambda_j = \sum_{k_{n_j} < j \leq k_{n_j+1}} \lambda_j^{(n_j)} = 1, \quad y_n = y_{n_j} = \sum_{k_{n_j} < j \leq k_{n_j+1}} \lambda_j^{(n_j)} x_j = \sum_{k_n < j \leq k_{n+1}} \lambda_j x_j.$$

■

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τη **μετριοποιησιμότητα** της τοπολογίας w στον X αλλά και πάνω σε w -κλειστά ή w -συμπαγή υποσύνολά του.

Το πρώτο αποτέλεσμα αφορά στη μετριοποιησιμότητα της τοπολογίας w πάνω στα w -συμπαγή υποσύνολα ενός διαχωρίσιμου χώρου με νόρμα X . Για την απόδειξή του θα χρειαστούμε δύο λήμματα.

Λήμμα 29 Έστω $(X, \|\cdot\|)$ διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα. Τότε, υπάρχει $\Phi \subseteq X^*$ αριθμήσιμο που χωρίζει σημεία στον X .

Απόδειξη: Έστω $\{x_n : n \geq 1\}$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X . Για κάθε $n \geq 1$, επιλέγουμε $f_n \in X^*$ ώστε $f_n(x_n) = \|x_n\|$, $\|f_n\| = 1$ (Θεώρημα Hahn-Banach). Θέτουμε $\Phi = \{f_n : n \geq 1\}$. Θα δείξουμε ότι το Φ χωρίζει σημεία στον X .

Πράγματι, έστω $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Ker } f_n$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $N \geq 1$ με $\|x - x_N\| < \varepsilon/2$. Έχουμε

$$\|x_N\| = f_N(x_N) = f_N(x_N) - f_N(x) = f_N(x - x_N) \leq \|x - x_N\| < \varepsilon/2 \Rightarrow \|x\| \leq \|x - x_N\| + \|x_N\| < \varepsilon.$$

Η τελευταία ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, οπότε $x = 0$. ■

Λήμμα 30 Έστω τ, τ' τοπολογίες πάνω στο μη κενό σύνολο E . Υποθέτουμε ότι

- $\tau \subseteq \tau'$.
- $o(E, \tau)$ είναι T_2 .
- $o(E, \tau')$ είναι συμπαγής.

Τότε, $\tau = \tau'$.

Απόδειξη: Έστω $F \tau'$ — κλειστό. Τότε, $F \tau'$ — συμπαγές, άρα και τ — συμπαγές, διότι $\tau \subseteq \tau'$ (προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της συμπαγείας). Τότε όμως, $F \tau$ — κλειστό. Άρα, ισχύει και $\tau' \subseteq \tau$.

Θα χρειαστούμε και την έννοια της *σχετικής τοπολογίας*:

Ορισμός 31 Έστω (E, τ) τοπολογικός χώρος και $A \subseteq E$. Θέτουμε

$$\tau|_A = \{A \cap G : G \in \tau\}.$$

$\tau|_A$ είναι τοπολογία στον A που καλείται *σχετική τοπολογία* που επάγεται από την τ στο A .

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει άμεσα ότι εάν (E, τ) μετριοποιήσιμος, τότε και ο $(A, \tau|_A)$ είναι μετριοποιήσιμος.

Τώρα, είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε ένα αποτέλεσμα που αφορά στη μετριοποιήσιμότητα της τοπολογίας w πάνω στα w — συμπαγή υποσύνολα ενός διαχωρίσιμου χώρου με νόρμα.

Πρόταση 32 Έστω $(X, \|\cdot\|)$ διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα και $K \subseteq X$ w — συμπαγές. Τότε, ο τοπολογικός χώρος (K, w) είναι συμπαγής μετριοποιήσιμος.

Απόδειξη: Επιλέγουμε $\Phi \subseteq X^*$ αριθμήσιμο που χωρίζει σημεία στον X (βλ. Λήμμα 29). Σύμφωνα με το Θεώρημα 22, ο $(X, \mathcal{T}_\Phi)$ είναι μετριοποιήσιμος, άρα και ο $(K, \mathcal{T}_\Phi|_K)$ είναι μετριοποιήσιμος.

Επιπλέον, $\mathcal{T}_\Phi \subseteq \mathcal{T}_w \Rightarrow \mathcal{T}_\Phi|_K \subseteq \mathcal{T}_w|_K$, ενώ ο $(K, \mathcal{T}_w|_K)$ είναι συμπαγής.

Το Λήμμα 30 μας δίνει τώρα ότι $\mathcal{T}_\Phi|_K = \mathcal{T}_w|_K$ και συνεπώς, ο $(K, \mathcal{T}_w|_K)$ είναι μετριοποιήσιμος.

Το επόμενο θεώρημα είναι το θεμελιώδες **Θεώρημα του W. F. Eberlein**:

Θεώρημα 33 Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $K \subseteq X$ w — συμπαγές. Τότε, το K είναι και ακολουθιακά w — συμπαγές, δηλ. κάθε ακολουθία στο K έχει w — συγκλίνουσα υπακολουθία μέσα στο K .

Απόδειξη: Έστω $(x_n) \subseteq K$. Θέτουμε $Y = \overline{\langle x_n : n \geq 1 \rangle}^{\|\cdot\|}$. Ο Y είναι κλειστός και διαχωρίσιμος γραμμικός υπόχωρος του X (βλ. Παράρτημα Α, Πρόταση 55). Ο Y είναι και w — κλειστός (βλ. Πρόταση 25). Συνεπώς, το $K \cap Y$ είναι w — συμπαγές υποσύνολο του Y και άρα w — συμπαγές μετριοποιήσιμο (βλ. Πρόταση 32). Επειδή $(x_n) \subseteq K \cap Y$, η ακολουθία (x_n) έχει w — συγκλίνουσα υπακολουθία μέσα στο K .

Σχόλιο: Ισχύει και το αντίστροφο του Θεωρήματος του Eberlein και είναι γνωστό ως **Θεώρημα του Smulian**.

Στη συνέχεια, μελετάμε την w — μετριοποιήσιμότητα φραγμένων υποσυνόλων του X .

Πρόταση 34 Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $D \subseteq X^*$ $\|\cdot\|$ — πυκνό. Εάν $A \subseteq X$ φραγμένο, τότε, $\mathcal{T}_w|_A = \mathcal{T}_D|_A$.

Απόδειξη:

Ισχυρισμός: Το D χωρίζει σημεία στον X .

Πράγματι, ας υποθέσουμε αντιθέτως ότι υπάρχει $x \in \bigcap_{f \in D} \text{Ker } f \setminus \{0\}$. Από το Θεώρημα Hahn-Banach,

υπάρχει $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f(x) \neq 0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $g \in D$ με $\|g - f\| < \varepsilon/\|x\|$. Τότε,

$$|f(x)| = |f(x) - g(x)| \leq \|f - g\| \cdot \|x\| < \varepsilon.$$

Επειδή η τελευταία ισχύει για τυχαίο $\varepsilon > 0$, έπεται ότι $f(x) = 0$ (άτοπο). Ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι $\mathcal{T}_D \subseteq \mathcal{T}_w \Rightarrow \mathcal{T}_D|_A \subseteq \mathcal{T}_w|_A$. Θα δείξουμε ότι ισχύει η ισότητα, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 11.

Έστω $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq A$ δίκτυο και $x \in A$ με $x_\lambda \xrightarrow{\mathcal{T}_D} x$. Θα δείξουμε ότι και $x_\lambda \xrightarrow{w} x$.

Επιλέγουμε $f \in X^*$, $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $g \in D$ τέτοιο ώστε $\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{3M}$, όπου $M = \sup_{x \in A} \|x\|$.

Έχουμε ότι $g(x_\lambda) \rightarrow g(x)$. Συνεπώς, υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε

$$|g(x_\lambda) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall \lambda \succeq \lambda_0.$$

Επομένως, $\forall \lambda \succeq \lambda_0$,

$$\begin{aligned} |f(x_\lambda) - f(x)| &\leq |(f - g)(x_\lambda)| + |g(x_\lambda) - g(x)| + |g(x) - f(x)| \\ &\leq \|f - g\| \cdot \|x_\lambda\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|f - g\| \cdot \|x\| < \frac{\varepsilon}{3M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3M} \cdot M = \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Πόρισμα 35 Έστω X χώρος με νόρμα. Εάν ο X^* είναι διαχωρίσιμος, τότε κάθε φραγμένο υποσύνολο του X είναι w -μετρικοποιήσιμο.

Απόδειξη: Έστω $D \subseteq X^*$ αριθμήσιμο πυκνό και $A \subseteq X$ φραγμένο. Η Πρόταση 34 μας δίνει ότι $\mathcal{T}_w|_A = \mathcal{T}_D|_A$. Ταυτόχρονα, ο $(X, \mathcal{T}_D)$ είναι μετρικοποιήσιμος (βλ. Θεώρημα 22), οπότε και ο $(A, \mathcal{T}_D|_A)$ είναι μετρικοποιήσιμος. Έπεται ότι και ο $(A, \mathcal{T}_w|_A)$ είναι μετρικοποιήσιμος. ■

Σχόλιο: Γνωρίζουμε ότι εάν ο X^* είναι διαχωρίσιμος, τότε και ο X είναι διαχωρίσιμος (βλ. Παράρτημα Α, Πρόταση 56). Επιπλέον, κάθε w -συμπαγές είναι φραγμένο. Επομένως, το Πόρισμα 35 ισχυροποιεί το συμπέρασμα της Πρότασης 32, αλλά με την ισχυρότερη υπόθεση ότι ο X^* είναι διαχωρίσιμος.

Τέλος, θα ασχοληθούμε με τη μετρικοποιησιμότητα του χώρου (X, w) .

Πρόταση 36 Έστω $(E, \|\cdot\|)$ απειροδιάστατος χώρος Banach. Τότε, ο E δεν έχει αριθμήσιμη αλγεβρική βάση.

Απόδειξη: Υποθέτουμε αντιθέτως ότι ο E έχει αλγεβρική βάση $\{e_n : n \geq 1\}$. Τότε,

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

όπου $F_n = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$, $n \geq 1$. Για κάθε $n \geq 1$, ο F_n είναι γραμμικός υπόχωρος του X πεπερασμένης διάστασης και άρα κλειστός (βλ. Πρόταση 57, Παράρτημα Α). Από το Θεώρημα Baire, υπάρχει $N \geq 1$ ώστε $F_N \neq \emptyset$. Έπεται ότι $X = F_N$ (άτοπο). ■

Πρόταση 37 Έστω $(X, \|\cdot\|)$ απειροδιάστατος χώρος με νόρμα. Τότε, ο (X, w) δεν είναι μετρικοποιήσιμος.

Απόδειξη: Υποθέτουμε αντιθέτως ότι ο (X, w) είναι μετρικοποιήσιμος. Σύμφωνα με το Θεώρημα 22, ο X^* έχει αριθμήσιμη αλγεβρική βάση. Επειδή ο X^* είναι Banach, η Πρόταση 36 συνεπάγεται ότι $\dim X^* < \infty$. Τότε όμως (βλ. Πρόταση 58, Παράρτημα Α), ισχύει ότι και $\dim X < \infty$ (άτοπο). ■

3. w - ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΕ ΣΥΓΓΕΚΡΙΜΕΝΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ ΜΕ ΝΟΡΜΑ.

(I). Θεωρούμε το γραμμικό χώρο

$$c_0 = \{ x : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R} : \lim_{k \rightarrow +\infty} x(k) = 0 \}.$$

Για κάθε $x \in c_0$, θέτουμε

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \geq 1} |x(k)|.$$

Είναι γνωστό ότι ο $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach.

Επιπλέον θεωρούμε το γραμμικό χώρο

$$l^1 = \{ x : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{+\infty} |x(k)| < \infty \}.$$

Για κάθε $x \in l^1$, θέτουμε

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} |x(k)|.$$

Είναι γνωστό ότι ο $(l^1, \|\cdot\|_1)$ είναι χώρος Banach.

Διαπιστώνεται εύκολα ότι $l^1 \subseteq c_0$ και ότι για κάθε $x \in l^1$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$.

Η επόμενη πρόταση είναι γνωστή από την κλασική θεωρία χώρων με νόρμα και δίνει την ισομετρική ταύτιση των c_0^* , l^1 .

Πρόταση 38 (i) Για κάθε $y \in l^1$, θεωρούμε το γραμμικό συναρτησιακό $f_y : c_0 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_y(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} x(k)y(k), \quad \forall x \in c_0.$$

Τότε, $f_y \in c_0^*$ και $\|f_y\| = \|y\|_1$, $\forall y \in l^1$.

(ii) Η απεικόνιση $T : l^1 \rightarrow c_0^*$ με $T(y) = f_y$, $\forall y \in l^1$, είναι γραμμική ισομετρία επί.

Η επόμενη πρόταση μας δίνει ένα χαρακτηρισμό της w - σύγκλισης στον c_0 .

Πρόταση 39 Έστω $(x_n) \subseteq c_0$, $x \in c_0$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) $x_n \xrightarrow{w} x$.

(ii) $\sup_n \|x_n\|_\infty < \infty$ και $\lim_n x_n(k) = x(k)$, $\forall k \geq 1$.

Απόδειξη: (i) $\Rightarrow$ (ii).

Επειδή $x_n \xrightarrow{w} x$, το σύνολο $\{x_n : n \geq 1\}$ είναι w - συμπαγές και άρα $\|\cdot\|$ - φραγμένο (βλ. Πρόταση 24).

Για κάθε $k \geq 1$, θεωρούμε το γραμμικό συναρτησιακό $e_k^* : c_0 \rightarrow \mathbb{R}$ με $e_k^*(x) = x(k)$, $\forall x \in c_0$. Τότε, $\forall k \geq 1$, $e_k^* \in c_0^*$ και συνεπώς

$$\lim_n x_n(k) = \lim_n e_k^*(x_n) = e_k^*(x) = x(k).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i).

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x = 0$.

Θέτουμε $M = \sup_n \|x_n\|$.

Έστω $y \in l^1$ και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $N \geq 1$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{k>N} |y(k)| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Λόγω της υπόθεσης,

$$\lim_n \sum_{k=1}^N |x_n(k)| \cdot |y(k)| = 0,$$

οπότε υπάρχει $n_0 \geq 1$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{k=1}^N |x_n(k)| \cdot |y(k)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Τώρα, $\forall n \geq n_0$,

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} x_n(k)y(k) \right| \leq \sum_{k=1}^N |x_n(k)| \cdot |y(k)| + \sum_{k>N} |x_n(k)| \cdot |y(k)| < \frac{\varepsilon}{2} + M \sum_{k>N} |y(k)| < \varepsilon.$$

Έπεται ότι

$$\lim_n \sum_{k=1}^{+\infty} x_n(k)y(k) = 0$$

και λόγω της Πρότασης 38, παίρνουμε ότι $x_n \xrightarrow{w} 0$. ■

Παράδειγμα: Για κάθε $n \geq 1$, θέτουμε $e_n : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$e_n(k) = 0, \quad \forall k \neq n, \quad e_n(n) = 1.$$

Η (e_n) λέγεται φυσική βάση του c_0 .

Τότε, $e_n \in c_0$ και $\|e_n\|_\infty = 1$, $n \geq 1$.

Επιπλέον, έστω $k \geq 1$. Για κάθε $n > k$, ισχύει $e_n(k) = 0$ και άρα $\lim_n e_n(k) = 0$.

Η Πρόταση 39 συνεπάγεται ότι $e_n \xrightarrow{w} 0$.

Η (e_n) δεν είναι $\|\cdot\|$ -συγκλίνουσα διότι

$$\|e_{n+1} - e_n\|_\infty = 1, \quad \forall n \geq 1.$$

(II). Θεωρούμε το γραμμικό χώρο

$$l^\infty = \{x : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R} : \sup_k |x(k)| < \infty\}.$$

Για κάθε $x \in c_0$, θέτουμε

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \geq 1} |x(k)|.$$

Είναι γνωστό ότι ο $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach.

Διαπιστώνεται εύκολα ότι $l^1 \subseteq c_0 \subseteq l^\infty$.

Η επόμενη πρόταση είναι γνωστή από την κλασική θεωρία χώρων με νόρμα και δίνει την ισομετρική ταύτιση των $(l^1)^*$, l^∞ .

Πρόταση 40 (i) Για κάθε $z \in l^\infty$, θεωρούμε το γραμμικό συναρτησιακό $f_z : l^1 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_z(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} x(k)z(k), \quad \forall x \in l^1.$$

Τότε, $f_z \in (l^1)^*$ και $\|f_z\| = \|z\|_\infty$, $\forall z \in l^\infty$.

(ii) Η απεικόνιση $T : l^\infty \rightarrow (l^1)^*$ με $T(z) = f_z$, $\forall z \in l^\infty$, είναι γραμμική ισομετρία επί.

Σχόλιο: Δεν υπάρχει στον l^1 αποτέλεσμα ανάλογο με αυτό της Πρότασης 39.

Π.χ. έστω (e_n) η φυσική βάση του c_0 . Τότε, $\|e_n\|_1 = 1$, $n \geq 1$ και $\lim_n e_n(k) = 0$, $\forall k \geq 1$. Αλλά η (e_n) δεν συγκλίνει ως προς την τοπολογία w . Πράγματι, έστω $z \in l^\infty$ με $z(k) = (-1)^k$, $k \geq 1$. Τότε,

$$\sum_{k=1}^{\infty} e_n(k)z(k) = z(n) = (-1)^n, \quad n \geq 1$$

και η ακολουθία $\{(-1)^n\}_{n \geq 1}$ δεν συγκλίνει. Από την Πρόταση 40 έπεται ότι η (e_n) δεν είναι w -συγκλίνουσα.

Παρ' όλ' αυτά, εάν $x_n \xrightarrow{w} x$ στον l^1 , τότε ισχύει ότι

$$\sup_n \|x_n\|_1 < \infty \quad \text{και} \quad \lim_n x_n(k) = x(k), \quad \forall k \geq 1. \quad (1)$$

[Πράγματι, εάν $k \geq 1$ και $e_k^* : l^1 \rightarrow \mathbb{R}$ με $e_k^*(x) = x(k)$, $\forall x \in l^1$, τότε, $e_k^* \in (l^1)^*$, αφού $|e_k^*(x)| = |x(k)| \leq \|x\|_1$, $\forall x \in l^1$.]

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει μια πολύ σημαντική αλλά και απρόσμενη ιδιότητα του l^1 : η w -σύγκλιση ακολουθίας είναι ισοδύναμη με τη $\|\cdot\|_1$ -σύγκλισή της (**ιδιότητα Schur**).

Θεώρημα 41 (Schur) Εάν $(x_n) \subseteq l^1$ με $x_n \xrightarrow{w} x$, τότε $\lim_n \|x_n - x\|_1 = 0$.

Απόδειξη: Έστω $(x_n) \subseteq l^1$ με $x_n \xrightarrow{w} 0$. Ας υποθέσουμε αντιθέτως ότι $\|x_n\|_1 \not\rightarrow 0$. Περνώντας σε υπακολουθία, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\inf_n \|x_n\|_1 > 0$. Τότε,

$$\frac{x_n}{\|x_n\|_1} \xrightarrow{w} 0.$$

Εργαζόμενοι με την ακολουθία $\left\{ \frac{x_n}{\|x_n\|_1} \right\}_{n \geq 1}$, μπορούμε (χωρίς βλάβη της γενικότητας), να υποθέσουμε ότι $\|x_n\|_1 = 1$, $\forall n \geq 1$.

Ισχυρισμός 1: Έστω $N \geq 1$, $l \geq 1$ ώστε $\sum_{j=1}^N |x_l(j)| < \frac{1}{100}$.

Τότε, υπάρχουν $M > N$, $m > l$ τέτοια ώστε

$$\sum_{N < j \leq M} |x_l(j)| > \frac{9}{10}, \quad \sum_{j=1}^M |x_m(j)| < \frac{1}{100}.$$

Απόδειξη του Ισχυρισμού 1: Έχουμε

$$1 = \|x_l\|_1 = \sum_{j=1}^N |x_l(j)| + \sum_{j>N} |x_l(j)| < \frac{1}{100} + \sum_{j>N} |x_l(j)| \Rightarrow \sum_{j>N} |x_l(j)| > \frac{99}{100} > \frac{9}{10},$$

οπότε υπάρχει $M > N$ ώστε

$$\sum_{N < j \leq M} |x_l(j)| > \frac{9}{10}.$$

Επειδή

$$\lim_n \sum_{j=1}^M |x_n(j)| = 0 \quad (\text{βλ. (1)}),$$

υπάρχει $m > l$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{j=1}^M |x_m(j)| < \frac{1}{100}.$$

Η απόδειξη του Ισχυρισμού 1 ολοκληρώθηκε.

Ισχυρισμός 2: Υπάρχουν ακολουθίες θετικών ακεραίων

$$1 < N_1 < N_2 < N_3 < \dots, \quad 1 = n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

ώστε

$$\sum_{j=1}^{N_1} |x_1(j)| > \frac{9}{10}$$

και

$$\sum_{N_k < j \leq N_{k+1}} |x_{n_{k+1}}(j)| > \frac{9}{10}, \quad \sum_{j=1}^{N_k} |x_{n_{k+1}}(j)| < \frac{1}{100}, \quad \forall k \geq 1. \quad (2)$$

Απόδειξη του Ισχυρισμού 2: Επειδή $\|x_1\|_1 = 1$, υπάρχει $N_1 > 1$ ώστε

$$\sum_{j=1}^{N_1} |x_1(j)| > 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}.$$

Επειδή

$$\lim_n \sum_{j=1}^{N_1} |x_n(j)| = 0 \quad (\text{βλ. (1)}),$$

υπάρχει $n_2 > 1$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{j=1}^{N_1} |x_{n_2}(j)| < \frac{1}{100}.$$

Εφαρμόζοντας τον Ισχυρισμό 1 για “ l ” = n_2 μπορούμε να επιλέξουμε $N_2 > N_1$, $n_3 > n_2$ ώστε

$$\sum_{N_1 < j \leq N_2} |x_{n_2}(j)| > \frac{9}{10}, \quad \sum_{j=1}^{N_2} |x_{n_3}(j)| < \frac{1}{100}.$$

Εφαρμόζοντας ξανά τον Ισχυρισμό 1 για “ l ” = n_3 μπορούμε να επιλέξουμε $N_3 > N_2$, $n_4 > n_3$ ώστε

$$\sum_{N_2 < j \leq N_3} |x_{n_3}(j)| > \frac{9}{10}, \quad \sum_{j=1}^{N_3} |x_{n_4}(j)| < \frac{1}{100}.$$

Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο, επαγωγικά κατασκευάζονται οι ακολουθίες θετικών ακεραίων

$$1 < N_1 < N_2 < N_3 < \dots, \quad 1 = n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

με τις επιθυμητές ιδιότητες.

Η απόδειξη του Ισχυρισμού 2 ολοκληρώθηκε.

Θέτουμε $y_k = x_{n_k}$, $k \geq 1$.

Για $1 \leq j \leq N_1$, θέτουμε $\lambda_j = 0$.

Για κάθε $j > N_1$, υπάρχει μοναδικό $k \geq 1$ ώστε $N_k < j \leq N_{k+1}$ και θέτουμε $\lambda_j = \text{sgn}[y_{k+1}(j)]$.

Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$

$$\text{sgn}(a) = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ -1, & a < 0 \\ 0, & a = 0 \end{cases}$$

και $a \cdot \text{sgn}(a) = |a|$.

Θεωρούμε το γραμμικό συναρτησιακό $\Lambda : l^1 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\Lambda(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j z(j), \quad \forall z \in l^1.$$

Τότε, $\Lambda \in (l^1)^*$ και $\|\Lambda\| = \sup_{j \geq 1} |\lambda_j| = 1$.

Έχουμε, $\forall k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \Lambda(y_{k+1}) &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j y_{k+1}(j) = \sum_{j=1}^{N_k} \lambda_j y_{k+1}(j) + \sum_{N_k < j \leq N_{k+1}} \lambda_j y_{k+1}(j) + \sum_{j > N_{k+1}} \lambda_j y_{k+1}(j) \\ &\geq - \sum_{j=1}^{N_k} |y_{k+1}(j)| + \sum_{N_k < j \leq N_{k+1}} |y_{k+1}(j)| - \sum_{j > N_{k+1}} |y_{k+1}(j)| \\ &> -\frac{1}{100} + \frac{9}{10} - \sum_{j > N_{k+1}} |y_{k+1}(j)| = \frac{89}{100} - \sum_{j > N_{k+1}} |y_{k+1}(j)| \quad (\text{βλ. (2)}), \end{aligned}$$

ενώ

$$\begin{aligned} 1 = \|y_{k+1}\|_1 &= \sum_{j=1}^{N_{k+1}} |y_{k+1}(j)| + \sum_{j > N_{k+1}} |y_{k+1}(j)| \geq \sum_{N_k < j \leq N_{k+1}} |y_{k+1}(j)| + \sum_{j > N_{k+1}} |y_{k+1}(j)| \\ &> \frac{9}{10} + \sum_{j > N_{k+1}} |y_{k+1}(j)| \quad (\text{βλ. (2)}) \\ \Rightarrow \sum_{j > N_{k+1}} |y_{k+1}(j)| &< \frac{1}{10}, \end{aligned}$$

οπότε

$$\Lambda(y_{k+1}) > \frac{89}{100} - \frac{1}{10} = \frac{79}{100}.$$

Έπεται ότι $\Lambda(y_{k+1}) \not\rightarrow 0$ και συνεπώς $y_k \not\xrightarrow{w} 0$ (άτοπο). ■

(III). Έστω $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ διαχωρίσιμος χώρος Hilbert με ορθοκανονική βάση $\{e_n\}_{n \geq 1}$. Η επόμενη πρόταση μας δίνει ένα χαρακτηρισμό της w - σύγκλισης στον $\mathcal{H}$.

Πρόταση 42 Έστω $(x_n) \subseteq \mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- (i) $x_n \xrightarrow{w} x$.
- (ii) $\sup_n \|x_n\| < \infty$ και $\lim_n \langle x_n, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle$, $\forall k \geq 1$.

Απόδειξη: (i) $\Rightarrow$ (ii).

Επειδή $x_n \xrightarrow{w} x$, το σύνολο $\{x_n : n \geq 1\}$ είναι w - συμπαγές και άρα $\|\cdot\|$ - φραγμένο (βλ. Πρόταση 24).

Για κάθε $k \geq 1$, θεωρούμε το γραμμικό συναρτησιακό $e_k^* : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ με $e_k^*(x) = \langle x, e_k \rangle$, $\forall x \in \mathcal{H}$. Τότε, $\forall k \geq 1$, $e_k^* \in \mathcal{H}^*$ και συνεπώς

$$\lim_n \langle x_n, e_k \rangle = \lim_n e_k^*(x_n) = e_k^*(x) = \langle x, e_k \rangle.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i).

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x = 0$.

Θέτουμε $M = \sup_n \|x_n\|$.

Έστω $z \in \mathcal{H}$. Θα δείξουμε ότι $\lim_n \langle x_n, z \rangle = 0$ ή ισοδύναμα

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_n, e_k \rangle \langle z, e_k \rangle = 0.$$

Είναι γνωστό ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle z, e_k \rangle|^2 = \|z\|^2 < \infty.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $N \geq 1$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{k>N} |\langle z, e_k \rangle|^2 < \left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^2,$$

όπου $M = \sup_n \|x_n\|$.

Λόγω της υπόθεσης,

$$\lim_n \sum_{k=1}^N |\langle x_n, e_k \rangle| \cdot |\langle z, e_k \rangle| = 0,$$

οπότε υπάρχει $n_0 \geq 1$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{k=1}^N |\langle x_n, e_k \rangle| \cdot |\langle z, e_k \rangle| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Τώρα, $\forall n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x_n, e_k \rangle \cdot \langle z, e_k \rangle \right| &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle x_n, e_k \rangle| \cdot |\langle z, e_k \rangle| \leq \sum_{k=1}^N |\langle x_n, e_k \rangle| \cdot |\langle z, e_k \rangle| + \sum_{k>N} |\langle x_n, e_k \rangle| \cdot |\langle z, e_k \rangle| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \left(\sum_{k>N} |\langle x_n, e_k \rangle|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k>N} |\langle z, e_k \rangle|^2 \right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2} + \|x_n\| \frac{\varepsilon}{2M} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\lim_n \langle x_n, z \rangle = 0$$

και το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz σε χώρους Hilbert συνεπάγεται ότι $x_n \xrightarrow{w} 0$. ■

4. ΑΣΘΕΝΗΣ* ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ.

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $e : X \rightarrow X^{**}$ η κανονική ισομετρική εμφύτευση, δηλ.

$$e(x)(f) = f(x), \quad \forall x \in X, \quad f \in X^*.$$

Προφανώς η $\Phi = e(X) = \{ e(x) : x \in X \}$ χωρίζει σημεία στον X^* .

Ορισμός 43 Η ασθενής τοπολογία $\mathcal{T}_\Phi$ στον X^* ονομάζεται **ασθενής* τοπολογία** και συμβολίζεται με $\mathcal{T}_{w^*}$ ή απλά w^* .

Με βάση τον παραπάνω ορισμό και τη γενική θεωρία που αναπτύχθηκε στην παράγραφο 1, προκύπτουν άμεσα οι παρακάτω ιδιότητες της τοπολογίας w^* :

- (i) Η w^* είναι η μικρότερη τοπολογία ως προς την οποία όλα τα συναρτησιακά $e(x)$, $x \in X$ του X^{**} είναι συνεχή. Επιπλέον, $\mathcal{T}_{w^*} \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$, με την ισότητα να αποκλείεται στην περίπτωση που ο X είναι απειροδιάστατος.

- (ii) Εάν $F : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμική, τότε η F είναι w^* -συνεχής ανν $F \in e(X)$.
- (iii) Έστω $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq X^*$ δίκτυο και $f \in X^*$. Τότε, $f_\lambda \xrightarrow{w^*} f$ ανν για κάθε $x \in X$, $e(x)(f_\lambda) \rightarrow e(x)(f)$ ή $f(x_\lambda) \rightarrow f(x)$. Δηλαδή, $f_\lambda \xrightarrow{w^*} f$ ανν το $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ συγκλίνει στο f **κατά σημείο**.
- (iv) Εάν $\mathcal{U}$ w^* -ανοικτό με $0 \in \mathcal{U}$, υπάρχουν $N \geq 1$, $x_j \in X$, $1 \leq j \leq N$ και $\varepsilon > 0$, ώστε

$$0 \in \bigcap_{j=1}^N \text{Ker}[e(x_j)] = Y \subseteq \bigcap_{j=1}^N [e(x_j)]^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq \mathcal{U}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\bigcap_{j=1}^N [e(x_j)]^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon)) = \{ f \in X^* : |f(x_j)| < \varepsilon, 1 \leq j \leq N \} = V(x_1, x_2, \dots, x_N, \varepsilon).$$

Τα σύνολα της μορφής

$$V(x_1, x_2, \dots, x_N, \varepsilon), \quad x_1, x_2, \dots, x_N \in X, \quad \varepsilon > 0$$

είναι μια w^* -βάση περιοχών του 0.

Επιπλέον, εάν X απειροδιάστατος, ο Y είναι μη τετριμμένος γραμμικός υπόχωρος του X^* τέτοιος ώστε $Y \subseteq \mathcal{U}$.

Συνεχίζουμε με περαιτέρω θεμελιώδεις ιδιότητες της ασθενούς τοπολογίας w^* .

Πρόταση 44 Έστω X χώρος Banach. Εάν $K \subseteq X^*$ w^* -συμπαγές, τότε K $\|\cdot\|$ -φραγμένο.

Απόδειξη: Οι απεικονίσεις $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in K$, αποτελούν μια οικογένεια φραγμένων γραμμικών συναρτησιακών πάνω στο χώρο Banach X .

Για κάθε $x \in X$,

$$\sup_{f \in K} |f(x)| = \sup_{f \in K} |e(x)(f)| < \infty$$

διότι η $e(x) : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ είναι w^* -συνεχής, οπότε το $e(x)(K)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Από την Αρχή Ομοιομόρφου Φράγματος παίρνουμε ότι $\sup_{f \in K} \|f\| < \infty$. ■

Πόρισμα 45 Έστω X χώρος Banach και $(f_n) \subseteq X^*$ που είναι w^* -συγκλίνουσα.

Τότε, $\sup_n \|f_n\| < \infty$.

Σχόλιο: Στην τοπολογία w^* **δεν ισχύει** εν γένει το θεώρημα Mazur, δηλ. εάν $A \subseteq X^*$ κυρτό, δεν ισχύει εν γένει ότι $\overline{A}^{\|\cdot\|} = \overline{A}^{w^*}$.

Παράδειγμα: Θεωρούμε το χώρο Banach $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$, όπου

$$c_0 = \{ x : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R} : \lim_{k \rightarrow +\infty} x(k) = 0 \}$$

και για κάθε $x \in c_0$,

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \geq 1} |x(k)|.$$

Για κάθε $k \geq 1$, θεωρούμε το γραμμικό συναρτησιακό $e_k^* : c_0 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$e_k^*(x) = x(k), \quad \forall x \in c_0.$$

Διαπιστώνεται εύκολα ότι $e_k^* \in X^*$, $\|e_k^*\| = 1$, $k \geq 1$ και επιπλέον $e_k^* \xrightarrow{w^*} 0$.

Θέτουμε $A = \text{co}(e_k^* : k \geq 1)$. Το A είναι κυρτό και $0 \in \overline{A}^{w^*}$.

Θα δείξουμε ότι

$$A \subseteq S_{X^*} = \{ f \in X^* : \|f\| = 1 \}.$$

Έστω $f \in A$. Υπάρχουν $N \geq 1$ και $\lambda_j \in [0, 1]$, $1 \leq j \leq N$ ώστε

$$f = \sum_{j=1}^N \lambda_j e_j^*, \quad \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1.$$

Τότε,

$$\|f\| \leq \sum_{j=1}^N \lambda_j \|e_j^*\| = \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1.$$

Επιπλέον, θεωρούμε την ακολουθία $x = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{N-\text{όροι}}, 0, 0, 0, \dots) \in c_0$. Τότε, $\|x\|_\infty = 1$ και

$$f(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j e_j^*(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j x(j) = \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = |f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|_\infty = \|f\|.$$

Άρα, $\|f\| = 1$.

Έχουμε λοιπόν ότι

$$A \subseteq S_{X^*} \quad \Rightarrow \quad \overline{A}^{\|\cdot\|} \subseteq S_{X^*}, \quad 0 \in \overline{A}^{w^*}$$

και συνεπώς, $\overline{A}^{w^*} \neq \overline{A}^{\|\cdot\|}$.

Συνεχίζουμε με το θεμελιώδες **θεώρημα του Αλάογλου**.

Ξεκινάμε με το παρακάτω

Λήμμα 46 Θέτουμε $B_X = \{ x \in X : \|x\| \leq 1 \}$. Έστω $\rho : B_X \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με την παρακάτω ιδιότητα:

$$\text{εάν } x, y \in B_X, \ a, b \in \mathbb{R} \text{ με } ax + by \in B_X, \text{ τότε } \rho(ax + by) = a\rho(x) + b\rho(y).$$

Τότε, υπάρχει μοναδικό $f \in X^\#$ ώστε $f|_{B_X} = \rho$.

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = (1 + \|x\|)\rho\left(\frac{1}{1 + \|x\|}x\right), \quad x \in X.$$

Έστω $x, y \in X$. Θέτουμε

$$a = \frac{1 + \|x\|}{1 + \|x + y\|}, \quad b = \frac{1 + \|y\|}{1 + \|x + y\|}.$$

Τότε,

$$\frac{1}{1 + \|x + y\|}(x + y) = \frac{a}{1 + \|x\|}x + \frac{b}{1 + \|y\|}y$$

και λόγω των ιδιοτήτων της ρ ,

$$\rho\left[\frac{1}{1 + \|x + y\|}(x + y)\right] = \frac{a}{1 + \|x\|}\rho(x) + \frac{b}{1 + \|y\|}\rho(y) = \frac{1}{1 + \|x + y\|}[\rho(x) + \rho(y)]$$

$$\Rightarrow f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Επιπλέον, εάν $x \in B_X$ και $c \in \mathbb{R}$, τότε

$$\rho \left(\frac{1}{1 + \|cx\|} cx \right) = \rho \left[\frac{c(1 + \|x\|)}{(1 + \|cx\|)} \cdot \frac{1}{1 + \|x\|} x \right] = \frac{c(1 + \|x\|)}{(1 + \|cx\|)} \rho \left(\frac{1}{1 + \|x\|} x \right) \Rightarrow f(cx) = cf(x).$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι η f είναι γραμμική.

Επιπλέον, εάν $x \in B_X$, τότε

$$\rho \left(\frac{1}{1 + \|x\|} x \right) = \frac{1}{1 + \|x\|} \rho(x) \Rightarrow f(x) = \rho(x).$$

Τέλος, αν $f, g \in X^\#$ με $f|_{B_X} = g|_{B_X} = \rho$, τότε $\forall x \in X \setminus \{0\}$,

$$f(x) = \|x\| f \left(\frac{1}{\|x\|} x \right) = \|x\| g \left(\frac{1}{\|x\|} x \right) = g(x)$$

και συνεπώς, $f = g$. ■

Θεώρημα 47 (Αλάογλου) Εάν $B_{X^*} = \{ f \in X^* : \|f\| \leq 1 \}$, ο τοπολογικός χώρος (B_{X^*}, w^*) είναι συμπαγής.

Απόδειξη: Θέτουμε

$$E = [-1, 1]^{B_X} = \{ \rho : B_X \rightarrow [-1, 1] \mid \rho \text{ συνάρτηση} \}.$$

Το $[-1, 1]$ είναι συμπαγές στη φυσική τοπολογία του $\mathbb{R}$. Εφοδιάζουμε το E με την τοπολογία γινόμενο $\mathcal{T}$ (βλ. Παράρτημα Β -II.)

Σύμφωνα με το Θεώρημα Tychonoff (βλ. Παράρτημα Β -II, Θεώρημα 64), ο $(E, \mathcal{T})$ είναι συμπαγής.

Επιπλέον, εάν $(\rho_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq E$ δίκτυο, $\rho \in E$, τότε

$$\rho_\lambda \xrightarrow{\mathcal{T}} \rho \Leftrightarrow \rho_\lambda(s) \rightarrow \rho(s), \quad \forall s \in S$$

(βλ. Παράρτημα Β -II, Πρόταση 63).

Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\mathcal{E} : (B_{X^*}, w^*) \rightarrow (E, \mathcal{T}), \quad \mathcal{E}(f) = f|_{B_X}.$$

Η $\mathcal{E}$ είναι καλώς ορισμένη, διότι για όλα τα $f \in B_{X^*}$, $x \in B_X$, ισχύει $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| \leq 1$. Επιπλέον, η $\mathcal{E}$ είναι 1-1 (βλ. τέλος απόδειξης του Λήμματος 46).

Ισχυρισμός 1: Η $\mathcal{E}$ είναι ομοιομορφισμός (εντός).

Πράγματι, εάν $(f_\lambda) \subseteq B_{X^*}$ δίκτυο και $f \in B_{X^*}$, τότε

$$f_\lambda \xrightarrow{w^*} f \Leftrightarrow f_\lambda(x) \rightarrow f(x), \quad \forall x \in X \Leftrightarrow f_\lambda(x) \rightarrow f(x), \quad \forall x \in B_X$$

$$\Leftrightarrow f_\lambda|_{B_X} \rightarrow f|_{B_X} \text{ κατά σημείο} \Leftrightarrow \mathcal{E}(f_\lambda) \xrightarrow{\mathcal{T}} \mathcal{E}(f).$$

Ο Ισχυρισμός 1 αποδείχθηκε.

Ισχυρισμός 2: Το σύνολο $\mathcal{E}(B_{X^*})$ είναι $\mathcal{T}$ -κλειστό υποσύνολο του E .

Πράγματι, έστω $(f_\lambda) \subseteq B_{X^*}$ δίκτυο και $\rho \in E$ ώστε

$$\mathcal{E}(f_\lambda) \xrightarrow{\mathcal{T}} \rho, \quad \text{δηλ.} \quad f_\lambda(x) \rightarrow \rho(x), \quad \forall x \in B_X.$$

Έστω $x, y \in B_X$, $a, b \in \mathbb{R}$ με $ax + by \in B_X$. Τότε,

$$\rho(ax + by) = \lim_{\lambda} f_\lambda(ax + by) = \lim_{\lambda} [af_\lambda(x) + bf_\lambda(y)] = a\rho(x) + b\rho(y).$$

Το Λήμμα 46 εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός $f \in X^\#$ τέτοιο ώστε $f|_{B_X} = \rho$.
Επιπλέον, $f(B_X) = \rho(B_X) \subseteq [-1, 1]$, οπότε $f \in B_{X^*}$ και άρα $\rho = \mathcal{E}(f)$.
Ο Ισχυρισμός 2 αποδείχθηκε.

Επειδή ο $(E, \mathcal{T})$ είναι συμπαγής, ο Ισχυρισμός 2 συνεπάγεται ότι το σύνολο $\mathcal{E}(B_{X^*})$ είναι $\mathcal{T}$ - συμπαγές. Ο Ισχυρισμός 1 τώρα συνεπάγεται ότι ο (B_{X^*}, w^*) είναι συμπαγής. ■

Το επόμενο θεμελιώδες αποτέλεσμα είναι το **θεώρημα του Goldstine**.

Θα χρειαστούμε το παρακάτω

Λήμμα 48 Έστω E χώρος με νόρμα, $C \subseteq E^*$ μη κενό, κυρτό, w^* - κλειστό και $\mathcal{F}_0 \in E^* \setminus C$. Τότε, υπάρχει $f_0 \in E$ τέτοιο ώστε $\sup_{\mathcal{F} \in C} \mathcal{F}(f_0) < \mathcal{F}_0(f_0)$.

Απόδειξη: Σύμφωνα με το Γεωμετρικό Hahn - Banach υπάρχει μη τετριμμένη συνεχής γραμμική απεικόνιση $\mathcal{L}_0 : (E^*, w^*) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\sup_{\mathcal{F} \in C} \mathcal{L}_0(\mathcal{F}) < \mathcal{L}_0(\mathcal{F}_0).$$

Αλλά τότε, υπάρχει $f_0 \in E$ τέτοια ώστε $\mathcal{L}_0 = \tilde{e}(f_0)$, όπου $\tilde{e} : E \rightarrow E^{**}$ η κανονική ισομετρική εμφύτευση. Τώρα έχουμε

$$\sup_{\mathcal{F} \in C} \mathcal{F}(f_0) = \sup_{\mathcal{F} \in C} \mathcal{L}_0(\mathcal{F}) < \mathcal{L}_0(\mathcal{F}_0) = \mathcal{F}_0(f_0).$$

■

Θεώρημα 49 (Goldstine) Έστω X χώρος με νόρμα και $e : X \rightarrow X^{**}$ η κανονική ισομετρική εμφύτευση. Τότε,

$$\overline{e(B_X)}^{w^*} = B_{X^{**}}.$$

Απόδειξη:

Επειδή η e είναι ισομετρία, ισχύει $e(B_X) \subseteq B_{X^{**}}$. Το $B_{X^{**}}$ είναι w^* - συμπαγές (βλ. θεώρημα 47), άρα και w^* - κλειστό, οπότε παίρνουμε

$$\overline{e(B_X)}^{w^*} \subseteq B_{X^{**}}.$$

Θέτουμε $C = \overline{e(B_X)}^{w^*}$. Το C είναι w^* - κλειστό, κυρτό υποσύνολο του $X^{**} = E^*$, όπου $E = X^*$.

Υποθέτουμε ότι $C \subsetneq B_{X^{**}}$. Επιλέγουμε $\mathcal{F}_0 \in B_{X^{**}} \setminus C$. Το Λήμμα 48 μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός $f_0 \in X^*$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} \sup_{\mathcal{F} \in C} \mathcal{F}(f_0) < \mathcal{F}_0(f_0) &\Rightarrow \sup_{x \in B_X} e(x)(f_0) < \mathcal{F}_0(f_0) \Rightarrow \sup_{x \in B_X} f_0(x) < \mathcal{F}_0(f_0) \leq \|f_0\| \\ &\Rightarrow \|f_0\| < \|f_0\| \quad (\text{άτοπο}). \end{aligned}$$

■

Συνεχίζουμε με κάποια αποτελέσματα που αφορούν στην **μετριοποιησιμότητα** της τοπολογίας w^* .

Πρόταση 50 Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $D \subseteq X$ πυκνό. Εάν $A \subseteq X^*$ φραγμένο, τότε, $\mathcal{T}_{w^*}|_A = \mathcal{T}_{e(D)}|_A$, όπου $e : X \rightarrow X^{**}$ η κανονική ισομετρική εμφύτευση.

Απόδειξη:

Αρχικά, παρατηρούμε ότι το $e(D)$ χωρίζει σημεία στον X^* . Πράγματι, εάν $f \in \bigcap_{x \in D} \text{Ker}[e(x)]$, τότε $f|_D = 0 \Rightarrow f = 0$, διότι D πυκνό στον X .

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι $\mathcal{T}_{e(D)} \subseteq \mathcal{T}_{w^*} \Rightarrow \mathcal{T}_{e(D)}|_A \subseteq \mathcal{T}_{w^*}|_A$. Θα δείξουμε ότι ισχύει η ισότητα, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 11.

Έστω $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq A$ δίκτυο και $f \in A$ με $f_\lambda \xrightarrow{\mathcal{T}_{e(D)}} f$. Θα δείξουμε ότι και $f_\lambda \xrightarrow{w^*} f$.

Επιλέγουμε $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $z \in D$ τέτοιο ώστε $\|x - z\| < \frac{\varepsilon}{3M}$, όπου $M = \sup_{f \in A} \|f\|$.

Έχουμε ότι $f_\lambda(z) \rightarrow f(z)$. Συνεπώς, υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε

$$|f_\lambda(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall \lambda \succeq \lambda_0.$$

Επομένως, $\forall \lambda \succeq \lambda_0$,

$$\begin{aligned} |f_\lambda(x) - f(x)| &\leq |f_\lambda(x - z)| + |f_\lambda(z) - f(z)| + |f(z - x)| \\ &< \|f_\lambda\| \cdot \|x - z\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|f\| \cdot \|x - z\| \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} + M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $f_\lambda \xrightarrow{w^*} f$. ■

Πόρισμα 51 Έστω X διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα και $A \subseteq X^* \|\cdot\|$ -φραγμένο. Τότε, ο (A, w^*) είναι μετριοποιήσιμος. Ειδικότερα, ο (B_{X^*}, w^*) είναι συμπαγής μετριοποιήσιμος (και άρα ακολουθιακά w^* -συμπαγής).

Απόδειξη: Έστω D αριθμήσιμο πυκνό στον X . Η Πρόταση 50 μας δίνει ότι $\mathcal{T}_{w^*}|_A = \mathcal{T}_{e(D)}|_A$. Αλλά $e(D)$ αριθμήσιμο, οπότε η $\mathcal{T}_{e(D)}$ είναι μετριοποιήσιμη (βλ. Θεώρημα 22), οπότε και η $\mathcal{T}_{w^*}|_A$ το ίδιο.

Από το Θεώρημα Αλάογλου (Θ. 47), παίρνουμε ότι ο (B_{X^*}, w^*) είναι συμπαγής μετριοποιήσιμος. ■

Πόρισμα 52 Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach και $A \subseteq X^* w^*$ -συμπαγής. Τότε, ο (A, w^*) είναι συμπαγής μετριοποιήσιμος (και άρα ακολουθιακά w^* -συμπαγής).

Απόδειξη: Το A είναι $\|\cdot\|$ -φραγμένο (βλ. Πρόταση 44), οπότε $A \subseteq MB_{X^*}$ για κάποιο $M > 0$. Το συμπέρασμα έπεται από το Πόρισμα 51. ■

Σχόλιο: Η υπόθεση της διαχωρισιμότητας στο Πόρισμα 51, δεν μπορεί να παραλειφθεί.

Παράδειγμα: Θέτουμε $X = l^\infty$. Ο X είναι Banach ως προς τη νόρμα

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x(n)|, \quad x \in X.$$

Επιπλέον, ο X δεν είναι διαχωρίσιμος.

Θα δείξουμε ότι ο (B_{X^*}, w^*) δεν είναι ακολουθιακά w^* -συμπαγής.

Για κάθε $n \geq 1$, θέτουμε $e_n^*: X \rightarrow \mathbb{R}$, με $e_n^*(x) = x(n)$, $x \in X$. Τότε, $(e_n^*)_{n \geq 1} \subseteq B_{X^*}$. Θα δείξουμε ότι η $(e_n^*)_{n \geq 1}$ δεν έχει w^* -συγκλίνουσα υπακολουθία.

Πράγματι, έστω $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων. Θέτουμε $x: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε

$$x(k_n) = (-1)^n, \quad n \geq 1, \quad x(j) = 0, \quad \forall j \notin \{k_n : n \geq 1\}.$$

Τότε, $x \in l^\infty$ και η ακολουθία $\{e_{k_n}^*(x)\}_{n \geq 1} = \{(-1)^n\}_{n \geq 1}$ δεν είναι συγκλίνουσα.

Πρόταση 53 Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε, ο (X^*, w^*) είναι μετριοποιήσιμος ανν ο X έχει αριθμήσιμη αλγεβρική βάση.

Απόδειξη: Σύμφωνα με το Θεώρημα 22, ο (X^*, w^*) είναι μετριοποιήσιμος αν ο $e(X)$ έχει αριθμήσιμη αλγεβρική βάση. Επειδή οι $X, e(X)$ είναι ισομετρικοί, η τελευταία ισοδυναμεί με το ότι ο X έχει αριθμήσιμη αλγεβρική βάση. ■

Πόρισμα 54 Έστω X απειροδιάστατος χώρος **Banach**. Τότε, ο (X^*, w^*) δεν είναι μετριοποιήσιμος.

Απόδειξη: Το συμπέρασμα έπεται από τις Προτάσεις 53, 36. ■

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.

Πρόταση 55 Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα.

(i) Εάν Y διαχωρίσιμος γραμμικός υπόχωρος του X , τότε και ο $\bar{Y}$ είναι διαχωρίσιμος.

(ii) Εάν $D \subseteq X$ αριθμήσιμο, τότε οι γραμμικοί υπόχωροι $Z = \langle D \rangle$, $Y = \bar{Z}^{\|\cdot\|}$ είναι διαχωρίσιμοι.

Απόδειξη: (i) Έστω $D \subseteq Y$ αριθμήσιμο $\|\cdot\|$ -πυκνό και $x \in \bar{Y}$, $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχει $y \in D$ ώστε $\|x - y\| < \varepsilon/2$. Τότε όμως, υπάρχει $z \in D$ ώστε $\|y - z\| < \varepsilon/2$ και άρα $\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| < \varepsilon$. Συνεπώς, το D είναι και $\|\cdot\|$ -πυκνό στον $\bar{Y}$.

(ii) Έστω $\tilde{D}$ το σύνολο των πεπερασμένων γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του D με ρητούς συντελεστές. Είναι σαφές ότι το $\tilde{D}$ είναι αριθμήσιμο. Έστω $z \in Z$, $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχουν $N \geq 1$, $x_1, x_2, \dots, x_N \in D$, $a_1, a_2, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ ώστε

$$z = \sum_{k=1}^N a_k x_k.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_k \neq 0$, $1 \leq k \leq N$.

Για κάθε k , υπάρχει ρητός λ_k ώστε $|a_k - \lambda_k| < \frac{\varepsilon}{2^{N+1}\|x_k\|}$. Τότε,

$$\left\| z - \sum_{k=1}^N \lambda_k x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^N |a_k - \lambda_k| \cdot \|x_k\| \leq \sum_{k=1}^N \frac{\varepsilon}{2^{N+1}} < \varepsilon.$$

Άρα, το $\tilde{D}$ είναι πυκνό στον Z και συνεπώς, ο Z είναι διαχωρίσιμος. Λόγω του (i), ο Y είναι επίσης διαχωρίσιμος. ■

Πρόταση 56 Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα ώστε X^* διαχωρίσιμος. Τότε και ο X είναι διαχωρίσιμος.

Απόδειξη: Έστω $\{f_n : n \geq 1\}$ $\|\cdot\|$ -πυκνό υποσύνολο του $S_{X^*} = \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Για κάθε $n \geq 1$, επιλέγουμε $x_n \in S_{X^*}$ ώστε

$$f_n(x_n) > \|f_n\| - 1/2 = 1 - 1/2 = 1/2.$$

Θέτουμε $Y = \overline{\langle x_n : n \geq 1 \rangle}^{\|\cdot\|}$. Θα δείξουμε ότι $X = Y$.

Πράγματι, ας υποθέσουμε αντιθέτως ότι $Y \subsetneq X$. Από το Θεώρημα Hahn - Banach, υπάρχει $f \in S_{X^*}$ ώστε $f(Y) = \{0\}$.

Επιλέγουμε $N \geq 1$ ώστε $\|f - f_N\| < 1/2$. Τότε,

$$1/2 < |f_N(x_N)| = |(f_N - f)(x_N)| \leq \|f - f_N\| \cdot \|x_N\| = \|f - f_N\| < 1/2$$

(άτοπο). Άρα, $X = Y$ και το συμπέρασμα έπεται από την Πρόταση 55. ■

Πρόταση 57 Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα.

(i) Εάν Y κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X και $x_0 \in X \setminus Y$, τότε ο $Y + \langle x_0 \rangle$ είναι κλειστός.

(ii) Εάν Z γραμμικός υπόχωρος του X πεπερασμένης διάστασης, τότε ο Z είναι κλειστός.

Απόδειξη: (i) Έστω $(y_n) \subseteq Y$, $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{R}$ και $x \in X$ ώστε

$$y_n + \lambda_n x_0 = x_n \rightarrow x.$$

Ισχυριζόμαστε ότι $\sup_n |\lambda_n| < \infty$.

Πράγματι, αν αυτό δεν ίσχυε, τότε, περνώντας σε υπακολουθία, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|\lambda_n| \rightarrow \infty$. Αλλά τώρα έχουμε

$$\frac{1}{\lambda_n} y_n = \frac{1}{\lambda_n} x_n - x_0 \rightarrow -x_0, \quad \frac{1}{\lambda_n} y_n \in Y, \quad n \geq 1$$

και επειδή Y κλειστός, $x_0 \in Y$ (άτοπο).

Περνώντας τώρα σε υπακολουθία, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda_n \rightarrow \lambda$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$y_n \rightarrow x - \lambda x_0 \Rightarrow x - \lambda x_0 \in Y \Rightarrow x \in Y + \langle x_0 \rangle.$$

(ii) Η απόδειξη προκύπτει εύκολα με επαγωγή στη διάσταση του Z .

Πράγματι, για $\dim Z = 1$ ισχύει, λόγω του (i) (για $Y = \{0\}$).

Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάθε γραμμικό υπόχωρο διάστασης n . Θα δείξουμε ότι ισχύει και για διάσταση $n+1$.

Έστω Z γραμμικός υπόχωρος διάστασης $n+1$ και $\{e_j : 1 \leq j \leq n+1\}$ μια βάση του Z . Τότε, $Z = \langle e_j : 1 \leq j \leq n \rangle + \langle e_{n+1} \rangle$ και το συμπέρασμα έπεται από την υπόθεση της επαγωγής και το (i). ■

Πρόταση 58 (i) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα διάστασης n και $\{e_j : 1 \leq j \leq n\}$ μια βάση του X . Για κάθε k με $1 \leq k \leq n$, θεωρούμε το γραμμικό συναρτησιακό $e_k^* : X \rightarrow \mathbb{R}$ με $e_k^* \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \right) = \lambda_k$, για όλα τα $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Τότε, $e_k^* \in X^*$, $1 \leq k \leq n$ και $\dim X^* = n$.

(ii) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Τότε, ο X είναι πεπερασμένης διάστασης ανν ο X^* είναι πεπερασμένης διάστασης. Σε αυτή την περίπτωση, $\dim X = \dim X^*$.

Απόδειξη:

(i) Σταθεροποιούμε ένα k με $1 \leq k \leq n$. Το e_k^* είναι καλώς ορισμένο, διότι κάθε διάνυσμα του X γράφεται μονοσήμαντα σαν γραμμικός συνδυασμός των e_j , $1 \leq j \leq n$.

Θέτουμε $Y_k = \langle e_j : 1 \leq j \leq n, j \neq k \rangle$. Τότε, Y_k κλειστός (βλ. Πρόταση 57) και $e_k \notin Y_k$. Θέτουμε $d_k = d(e_k, Y_k) > 0$. Τότε, για κάθε $x \in X$, έχουμε

$$x = \sum_{1 \leq j \leq n} e_j^*(x) e_j$$

και

$$\begin{aligned} |e_k^*(x)| d_k &= d(e_k^*(x) e_k, Y_k) \leq \left\| e_k^*(x) e_k - \left(- \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq k} e_j^*(x) e_j \right) \right\| = \left\| \sum_{1 \leq j \leq n} e_j^*(x) e_j \right\| = \|x\| \\ \Rightarrow |e_k^*(x)| &\leq \frac{\|x\|}{d_k}. \end{aligned}$$

Άρα, $e_k^* \in X^*$.

Τέλος, θα δείξουμε ότι τα e_k^* , $1 \leq k \leq n$ είναι βάση του X^* .

Για κάθε $f \in X^*$ και για κάθε $x \in X$, έχουμε

$$f(x) = f \left(\sum_{1 \leq j \leq n} e_j^*(x) e_j \right) = \sum_{1 \leq j \leq n} e_j^*(x) f(e_j)$$

$$\text{δηλ. } f = \sum_{1 \leq j \leq n} f(e_j) e_j^* \in \langle e_j^* : 1 \leq j \leq n \rangle.$$

Επιπλέον, εάν $a_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$ ώστε $\sum_{1 \leq j \leq n} a_j e_j^* = 0$, τότε, για κάθε k ,

$$0 = \sum_{1 \leq j \leq n} a_j e_j^*(e_k) = a_k.$$

(ii) Εάν $\dim X = n$, τότε και $\dim X^* = n$, λόγω του (i).

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $\dim X^* = n$. Τότε, $\dim X^{**} = n$, πάλι λόγω του (i). Θεωρούμε την κανονική ισομετρική εμφύτευση $e : X \rightarrow X^{**}$. Επειδή η e είναι 1-1, παίρνουμε ότι $\dim X = m \leq n$. Λόγω του (i), $m = n$. ■

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β.

I. Οικογένειες με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής (F.I.P.).

Έστω E μη κενό σύνολο.

Ορισμός 59 Έστω $\mathcal{A}$ μια μη κενή κλάση υποσυνόλων του E . Η $\mathcal{A}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής (F.I.P.) ανν οποιαδήποτε τομή πεπερασμένου πλήθους μελών της $\mathcal{A}$ είναι μη κενή.

Πρόταση 60 Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(E)$ με την F.I.P.. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ όλων των κλάσεων που έχουν την F.I.P. και περιέχουν την $\mathcal{A}$. Τότε, το σύνολο $(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}, \subseteq)$ έχει *maximal* στοιχείο.

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{L}$ αλυσίδα στο $(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}, \subseteq)$. Θέτουμε

$$\mathcal{C} = \cup \{ \mathcal{B} : \mathcal{B} \in \mathcal{L} \}.$$

Η κλάση $\mathcal{C}$ έχει την F.I.P. Πράγματι, έστω $A_i \in \mathcal{C}$, $1 \leq i \leq N$, $N \geq 1$. Τότε, για κάθε i , υπάρχει $\mathcal{B}_i \in \mathcal{L}$, ώστε $A_i \in \mathcal{B}_i$. Επειδή η $\mathcal{L}$ είναι αλυσίδα, υπάρχει $i_0 \in \{1, 2, \dots, N\}$ με

$$\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}_{i_0}, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Τότε,

$$A_i \in \mathcal{B}_{i_0}, \quad 1 \leq i \leq N \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{i=1}^N A_i \neq \emptyset.$$

Επομένως, το $\mathcal{C}$ είναι άνω φράγμα της $\mathcal{L}$. Το συμπέρασμα τώρα έπεται από το Λήμμα του Zorn. ■

Πρόταση 61 Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(E)$ με την F.I.P. και $\mathcal{D}$ *maximal* στοιχείο του $(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}, \subseteq)$. Τότε:

- (i) οποιαδήποτε τομή πεπερασμένου πλήθους μελών της $\mathcal{D}$, ανήκει στην $\mathcal{D}$.
- (ii) Εάν $A \subseteq E$ με $A \cap D \neq \emptyset$, $\forall D \in \mathcal{D}$, τότε $A \in \mathcal{D}$.

Απόδειξη: (i) Έστω $A_i \in \mathcal{D}$, $1 \leq i \leq N$ ($N \geq 1$) και $A = \bigcap_{i=1}^N A_i$.

Η $\mathcal{D} \cup \{A\}$ έχει την F.I.P.. Πράγματι, έστω $D_j \in \mathcal{D}$, $1 \leq j \leq m$ ($m \geq 1$). Επειδή η $\mathcal{D}$ έχει την F.I.P., έχουμε

$$A \cap \bigcap_{i=1}^m D_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_N \cap D_1 \cap D_2 \cap \dots \cap D_m \neq \emptyset.$$

Επειδή $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D} \cup \{A\}$, έπεται ότι $A \in \mathcal{D}$.

(ii) Έστω $A \subseteq E$ με $A \cap D \neq \emptyset$, $\forall D \in \mathcal{D}$.

Η $\mathcal{D} \cup \{A\}$ έχει την F.I.P.. Πράγματι, εάν $A_i \in \mathcal{D}$, $1 \leq i \leq N$ ($N \geq 1$), τότε $\bigcap_{i=1}^N A_i \in \mathcal{D}$ (βλ. (i))

και άρα $A \cap \bigcap_{i=1}^N A_i \neq \emptyset$.

Επειδή $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D} \cup \{A\}$, έπεται ότι $A \in \mathcal{D}$. ■

Πρόταση 62 Έστω E τοπολογικός χώρος. Τ.Π.Ε.Ι.:

- (i) ο E είναι συμπαγής.
- (ii) Εάν $\mathcal{F}$ οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του E με την F.I.P., τότε $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$.

Η απόδειξη της τελευταίας πρότασης προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς της συμπαγείας και της F.I.P..

II. Τοπολογία Γινόμενο - Θεώρημα του Tychonoff (μια παραλλαγή).

Έστω S μη κενό σύνολο και K τοπολογικός χώρος. Θέτουμε $E = K^S$ το σύνολο των συναρτήσεων από το S στο K .

Για κάθε $s \in S$, θεωρούμε την απεικόνιση $\delta_s : E \rightarrow K$ με $\delta_s(\rho) = \rho(s)$, $\forall \rho \in E$.

Θεωρούμε τη μοναδική τοπολογία $\mathcal{T}$ στον E που έχει σαν υποβάση τα σύνολα

$$\delta_s^{-1}(G), \quad s \in S, \quad G \subseteq K \text{ ανοικτό.}$$

Τότε, $\forall \rho \in E$, $\forall U \in \mathcal{T}$ με $\rho \in U$, υπάρχουν $G_i \subseteq K$ ανοικτά, $s_i \in S$, $1 \leq i \leq N$ ($N \geq 1$), ώστε

$$\rho \in \bigcap_{i=1}^N \delta_{s_i}^{-1}(G_i) \subseteq U.$$

Η τοπολογία $\mathcal{T}$ λέγεται **τοπολογία γινόμενο** στον E .

Η παρακάτω πρόταση προκύπτει εύκολα από τους ορισμούς.

Πρόταση 63 (i) ο E είναι T_2 .

(ii) Εάν $(\rho_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq E$ δίκτυο, $\rho \in E$, τότε

$$\rho_\lambda \xrightarrow{\mathcal{T}} \rho \Leftrightarrow \rho_\lambda(s) \rightarrow \rho(s), \quad \forall s \in S.$$

(iii) Η $\mathcal{T}$ είναι η μικρότερη τοπολογία στο E ως προς την οποία όλες οι συναρτήσεις

$$\delta_s, \quad s \in S$$

είναι συνεχείς.

Θεώρημα 64 Εάν K συμπαγής, τότε ο $(E, \mathcal{T})$ είναι συμπαγής.

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(E)$ μια οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του E με την F.I.P..

Θα δείξουμε ότι

$$\bigcap_{F \in \mathcal{A}} F \neq \emptyset. \quad (3)$$

Επιλέγουμε $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(E)$ με την F.I.P. τέτοιο ώστε $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ και επιπλέον ικανοποιεί τις (i), (ii) της Πρότασης 61.

Για να δείξουμε την (3) αρκεί να δείξουμε ότι

$$\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{D} \neq \emptyset. \quad (4)$$

[Σημ. ότι εάν $F \in \mathcal{A}$, τότε $F \in \mathcal{D}$ και $\overline{F} = F$.]

Για κάθε $s \in S$, το σύνολο

$$\{ \overline{\delta_s(D)} : D \in \mathcal{D} \}$$

είναι μια οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του K με την F.I.P. (βλ. Πρόταση 61 (i)) και αφού K συμπαγής, ισχύει

$$\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{\delta_s(D)} \neq \emptyset.$$

Για κάθε $s \in S$, επιλέγουμε

$$k_s \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{\delta_s(D)}. \quad (5)$$

Ισχυρισμός 1: Εάν $s \in S$ και $G \subseteq K$ ανοικτό με $\rho(s) \in G$, τότε $\delta_s^{-1}(G) \in \mathcal{D}$.

Πράγματι, $\forall D \in \mathcal{D}$, έχουμε ότι $\rho(s) = k_s \in \overline{\delta_s(D)}$ (βλ. (5)) και επομένως,

$$G \cap \delta_s(D) \neq \emptyset \Rightarrow \delta_s^{-1}(G) \cap D \neq \emptyset.$$

Από την Πρόταση 61 (ii), έπεται ότι $\delta_s^{-1}(G) \in \mathcal{D}$.

Ισχυρισμός 2: $\rho \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{D}$ (και άρα ισχύει η (4)).

Πράγματι, έστω $D \in \mathcal{D}$ και $U \subseteq (E, \mathcal{T})$ ανοικτό με $\rho \in U$.

Επιλέγουμε $G_i \subseteq K$ ανοικτό, $s_i \in S$, $1 \leq i \leq N$ ($N \geq 1$), ώστε

$$\rho \in \bigcap_{i=1}^N \delta_{s_i}^{-1}(G_i) \subseteq U.$$

Τότε,

$$\forall i, \rho(s_i) \in G_i \Rightarrow \delta_{s_i}^{-1}(G_i) \in \mathcal{D} \text{ (βλ. Ισχυρισμό 1),}$$

οπότε

$$D \cap \left[\bigcap_{i=1}^N \delta_{s_i}^{-1}(G_i) \right] \neq \emptyset \text{ (διότι η } \mathcal{D} \text{ έχει την F.I.P.)} \Rightarrow U \cap D \neq \emptyset.$$

Άρα, $\rho \in \overline{D}$. ■